

## Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAFA (11/08/2020)

Nombre:

Carrera:

### JUSTIFIQUE CLARAMENTE SU RESPUESTA

#### Parte A:

**Ejercicio 1:** i) Los valores de contenido de Nitrógeno (mg/L) en muestras de aguas residuales, registrados a la salida de una planta industrial, fueron: 11,6; 19,2; 14,9; 7,3; 16,6; 9,8; 11,6; 9,7; 15,1; 14,4; 5,1; 28,8 y 15,9.

- Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.
- Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Se realizó una investigación en personas que sufren leucoplasia oral. El 85% de ellos fuman o consumen alcohol, el 55% consume alcohol (A) y el 65% fuma (F).

- ¿Cuál es la probabilidad que la persona no fume y consuma alcohol?
- ¿Son disjuntos o excluyentes los eventos F y A?
- ¿Son independientes los eventos F y A?
- Dado que se selecciona un sujeto fumador ¿cuál es la probabilidad que consuma alcohol?

**Ejercicio 2:** Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{(x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [-2; 0) \\ 1 - \frac{(-x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [0; 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.
- Hallar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.
- Calcular el valor esperado y desviación estándar para X.

**Ejercicio 3:** La altura de los hombres (X) de una población tiene una distribución normal con una media de 170 cm y un desvío estándar de 1,5 cm y la altura de las mujeres (Y) tiene una distribución normal con una media de 164 cm y un desvío estándar 1,5 cm.

- Si se elige un hombre al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que su altura esté comprendida entre 168 y 173 cm?
- Hallar el percentil 7% o cuantil 0,07 para la variable Y.
- Se elige un hombre y una mujer al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que el hombre sea más alto que la mujer?
- Si se eligen 9 mujeres al azar
  - ¿cuál es la probabilidad de que el promedio muestral de las alturas esté comprendida entre 162 y 165 cm?
  - ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 7 de ellas tengan una altura superior a 165 cm?

## Parte B:

**Ejercicio 4:** Los tiempos de activación de un sistema para prevención de incendios, que utiliza una espuma acuosa, para una muestra al azar de rociadores se obtuvieron para una muestra de tamaño  $n = 13$ , la cual arrojó un promedio muestral de 27,92 segundos y una desviación estándar muestral ( $s_{n-1}$ ) de 5,62 segundos.

Se asume que la variable tiempos de activación de estos rociadores sigue una distribución normal. Según el fabricante, el tiempo medio de activación del sistema es menor a 25 segundos.

- Dar estimaciones por máxima verosimilitud para la media poblacional, para la varianza poblacional y para el percentil 30 de esta distribución.
- ¿Existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 25 segundos? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%
- Si ahora suponemos que  $\sigma = 5,1$  ¿existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 25 segundos? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 1% usando el p-valor.

**Ejercicio 5:** De una muestra aleatoria de 200 infractores de tránsito se encontró que 70 fueron debido al uso del celular por parte del conductor sin el uso de manos libres mientras conducía.

- Dar un intervalo de confianza del 98% para la verdadera proporción ( $p$ ) de conductores que usan el celular mientras conducen no usando manos libres.
- Determine el menor tamaño de muestra necesario para que la longitud de un intervalo de confianza del 98% para  $p$  no supere 0,05, independientemente del valor  $\hat{p}$ .
- Se desea tomar una decisión para las siguientes hipótesis:  
$$H_0 : p = 0,25 \text{ vs } H_a : p > 0,25.$$
  - Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo  $H_0$ .
  - Dar la Región de rechazo usando  $\alpha = 0,03$  y concluir en el contexto del problema.
  - Calcular el p valor aproximado y usando ese valor tomar una decisión al 1%.

**Ejercicio 6:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con función densidad de probabilidad dada por:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{para } x > 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{para } \theta > 1.$$

- Hallar el estimador por el método de los momentos para  $\theta$ .
- Hallar el estimador por el método de máxima verosimilitud para  $\theta$ .
- ¿Cuánto vale la esperanza de  $\bar{X}$ ?