

## Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAf (21/12/2020)

### JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS SUS RESPUESTAS

#### Parte A:

##### **Ejercicio 1:**

i) Se midió la concentración de plomo en sangre para una muestra de 10 niños, que concurren a una escuela cercana a una calle de alto tránsito, obteniéndose el siguiente conjunto de datos:

10,62 ; 10,78 ; 10,84 ; 11,16 ; 13,21; 11,28 ; 12,98; 11,51 ; 11,53 y 11,67.

a) Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.

b) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Un club de estudiantes extranjeros tiene como miembros a dos canadienses, tres japoneses, cinco italianos y dos alemanes. Si se selecciona al azar un comité integrado por cuatro de ellos, calcular la probabilidad de que todas las nacionalidades estén representadas.

**Ejercicio 2:** Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ a & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ b & \text{para } 2 \leq x < 4 \\ c & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes, con  $0 < a < b < c$ .

- Determinar si la variable aleatoria  $X$  es discreta o continua usando propiedades de la función de distribución acumulada. Justifique su respuesta.
- Determinar el valor de las constantes  $a, b$  y  $c$  tales que  $E(X) = 2$  y  $E(X^2) = 5,6$ .
- Calcular la esperanza y varianza de  $W = -3X + 16$ , usando propiedades.

**Ejercicio 3:** Sea  $X$  la variable aleatoria que mide la determinación de oxígeno en aguas residuales con un método estándar y que tiene distribución normal con una media de 70 y una varianza de 12,25.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar estén comprendidas entre 68 y 80? Justifique su respuesta.
- Hallar los percentiles 25 y 75 para la variable determinación de oxígeno en aguas residuales con el método estándar.
- Se tomaron 12 muestras aleatorias de agua residuales en cierta región y se realizaron mediciones con el método estándar.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de mediciones con el método estándar supere 72?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de las 12 determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar supere 72? Justifique su respuesta.

## **Parte B:**

### **Ejercicio 4:**

Antes de tomar la decisión de ampliar el horario de atención al público, una institución bancaria desea tener una idea de cuál sería la verdadera proporción  $p$  de clientes interesados en este cambio de horario. En una muestra aleatoria de 260 clientes, 210 estaban de acuerdo con la extensión del horario de atención.

- a- Construya un Intervalo de Confianza del 98 % para la proporción poblacional  $p$ .
- b- El directorio del banco resuelve extender el horario de atención si  $p$  es superior a 0,75, entonces:
  - i) ¿Existe evidencia suficiente para que el banco decida extender el horario de atención? Para responder plantear las hipótesis pertinentes y concluir en el contexto del problema considerando  $\alpha = 0,05$ .
  - ii) Calcular el p-valor para las hipótesis planteadas en el ítem anterior y usando este valor tomar una decisión al 1%.

### **Ejercicio 5:**

Los tiempos de activación de un sistema para prevención de incendios para una muestra al azar de  $n = 11$  rociadores dieron como resultado un promedio muestral de 27,92 segundos y una desviación estándar muestral ( $s_{n-1}$ ) de 5,62 segundos. Se asume que la variable tiempo de activación del sistema para estos rociadores ( $X$ ) sigue una distribución normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

- a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para  $\mu$ ,  $\sigma^2$  y para la  $P(X \leq 37,46)$ .
- b) Obtenga un intervalo de confianza del 99% para el tiempo medio de activación del sistema.
- c) Según el fabricante, el tiempo medio de activación del sistema es a lo sumo 25 segundos.
  - i) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación del sistema es superior a lo que afirma el fabricante? Justifique su respuesta: planteando las hipótesis pertinentes, dando la región de rechazo y concluir al 5% en el contexto de la pregunta.
  - ii) Si ahora conocemos que  $\sigma = 5,60$  ¿existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación del sistema es superior a lo que afirma el fabricante? Justifique su respuesta dando la región de rechazo y concluir al 5% en el contexto de la pregunta.

### **Ejercicio 6:**

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con distribución *Bernoulli*( $p$ ).

- a) Dar la distribución de la variable aleatoria  $\sum_{i=1}^n X_i$  (especificando todos sus parámetros), su esperanza y su varianza.
- b) El estimador  $\bar{X}$  ¿es insesgado para  $p$ ? Justifique su respuesta.
- c) Probar que el estimador  $n \bar{X} (1 - \bar{X})$  no es insesgado para la varianza de  $\sum_{i=1}^n X_i$ .