

Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAf (21/12/2020)

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS SUS RESPUESTAS

Parte A:

Ejercicio 1:

i) Se midió la concentración de plomo en sangre para una muestra de 10 niños, que concurren a una escuela cercana a una calle de alto tránsito, obteniéndose el siguiente conjunto de datos:

10,62 ; 10,78 ; 10,84 ; 11,16 ; 13,21; 11,28 ; 12,98; 11,51 ; 11,53 y 11,67.

a) Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.

b) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Un club de estudiantes extranjeros tiene como miembros a dos canadienses, tres japoneses, cinco italianos y dos alemanes. Si se selecciona al azar un comité integrado por cuatro de ellos, calcular la probabilidad de que todas las nacionalidades estén representadas.

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ a & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ b & \text{para } 2 \leq x < 4 \\ c & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes, con $0 < a < b < c$.

- Determinar si la variable aleatoria X es discreta o continua usando propiedades de la función de distribución acumulada. Justifique su respuesta.
- Determinar el valor de las constantes a, b y c tales que $E(X) = 2$ y $E(X^2) = 5,6$.
- Calcular la esperanza y varianza de $W = -3X + 16$, usando propiedades.

Ejercicio 3: Sea X la variable aleatoria que mide la determinación de oxígeno en aguas residuales con un método estándar y que tiene distribución normal con una media de 70 y una varianza de 12,25.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar estén comprendidas entre 68 y 80? Justifique su respuesta.
- Hallar los percentiles 25 y 75 para la variable determinación de oxígeno en aguas residuales con el método estándar.
- Se tomaron 12 muestras aleatorias de agua residuales en cierta región y se realizaron mediciones con el método estándar.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de mediciones con el método estándar supere 72?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de las 12 determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar supere 72? Justifique su respuesta.

Parte B:

Ejercicio 4:

Antes de tomar la decisión de ampliar el horario de atención al público, una institución bancaria desea tener una idea de cuál sería la verdadera proporción p de clientes interesados en este cambio de horario. En una muestra aleatoria de 260 clientes, 210 estaban de acuerdo con la extensión del horario de atención.

- a- Construya un Intervalo de Confianza del 98 % para la proporción poblacional p .
- b- El directorio del banco resuelve extender el horario de atención si p es superior a 0,75, entonces:
 - i) ¿Existe evidencia suficiente para que el banco decida extender el horario de atención? Para responder plantear las hipótesis pertinentes y concluir en el contexto del problema considerando $\alpha = 0,05$.
 - ii) Calcular el p-valor para las hipótesis planteadas en el ítem anterior y usando este valor tomar una decisión al 1%.

Ejercicio 5:

Los tiempos de activación de un sistema para prevención de incendios para una muestra al azar de $n = 11$ rociadores dieron como resultado un promedio muestral de 27,92 segundos y una desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 5,62 segundos. Se asume que la variable tiempo de activación del sistema para estos rociadores (X) sigue una distribución normal de parámetros μ y σ^2 .

- a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para μ , σ^2 y para la $P(X \leq 37,46)$.
- b) Obtenga un intervalo de confianza del 99% para el tiempo medio de activación del sistema.
- c) Según el fabricante, el tiempo medio de activación del sistema es a lo sumo 25 segundos.
 - i) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación del sistema es superior a lo que afirma el fabricante? Justifique su respuesta: planteando las hipótesis pertinentes, dando la región de rechazo y concluir al 5% en el contexto de la pregunta.
 - ii) Si ahora conocemos que $\sigma = 5,60$ ¿existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación del sistema es superior a lo que afirma el fabricante? Justifique su respuesta dando la región de rechazo y concluir al 5% en el contexto de la pregunta.

Ejercicio 6:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución *Bernoulli*(p).

- a) Dar la distribución de la variable aleatoria $\sum_{i=1}^n X_i$ (especificando todos sus parámetros), su esperanza y su varianza.
- b) El estimador \bar{X} ¿es insesgado para p ? Justifique su respuesta.
- c) Probar que el estimador $n \bar{X} (1 - \bar{X})$ no es insesgado para la varianza de $\sum_{i=1}^n X_i$.