

Examen de Probabilidad y Estadística

FAMAF - UNC (25/02/2021)

Justifique claramente todas sus respuestas y realizar las cuentas con 4 dígitos decimales significativos

Parte A:

Ejercicio 1:

- a) Un fabricante de componentes electrónicos está interesado en determinar su tiempo de vida medio. Los tiempos de vida (en horas), de componentes elegidos al azar, fueron: 123; 116; 132; 110; 175; 126; 125; 111; 118; 117; 121; 134; 146.
- Calcular el promedio muestral, desvío estándar muestral, los cuartiles inferior y superior para estos datos.
 - Determinar si hay datos atípicos en esta muestra.
 - Se define $y_i = 6(x_i - 100)$ para $1 \leq i \leq 13$, donde $\{x_i\}_{i=1}^{13}$ son los datos originales. Calcular el promedio y desvío estándar muestrales para $\{y_i\}_{i=1}^{13}$.
- b) Una fábrica tiene sólo dos máquinas (I y II) donde la máquina I produce el triple de artículos que la máquina II. Además se sabe que el 1% de los artículos que produce la máquina I son defectuosos mientras que para la máquina II, el 2%. Se selecciona un artículo al azar de la producción de esta fábrica y resulta defectuoso. Calcular la probabilidad de que el artículo haya sido producido por la máquina II.

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ k(4 - x) & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Determinar el valor de la constante k .
- Calcular $P\left(\frac{1}{2} < X < 3\right)$ y la mediana o percentil 50 de X .
- Calcular la esperanza de X y varianza de X .
- Si $W = 4X^2 - 3X + 16$ dar su valor esperado. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3: El tiempo de vida de cierto tipo de motor sigue una distribución normal con una media de 10 años y una desviación estándar de 2 años.

- ¿Cuál es el porcentaje de motores con un tiempo de vida comprendido entre 7,28 y 15,3 años?
- El fabricante reemplaza gratis todos los motores que fallen dentro del período de garantía. Si estuviese dispuesto a reemplazar sólo el 3% de los motores que fallan, ¿cuánto tiempo de garantía debería ofrecer?
- Se seleccionaron al azar 16 de estos motores.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio muestral del tiempo de vida para los 16 motores supere 138 meses?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de los 16 motores tengan un tiempo de vida superior a 10,5 años?

Parte B:

Ejercicio 4:

En una muestra aleatoria de 300 infractores de tránsito se encontró que 111 fueron debido al uso del celular, por parte del conductor, sin el uso de manos libres mientras conducía. Sea p la proporción de infractores que usan el celular mientras conducen, no usando manos libres.

- a) Dar un intervalo de confianza del 90% para p .
- b) Dadas las siguientes hipótesis:
$$H_0: p = 0,30 \text{ versus } H_a: p > 0,30$$
 - i) Calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 3%.
 - ii) Calcular el p -valor aproximado y **usando ese valor** tomar una decisión en el contexto del problema al 1%.

Ejercicio 5:

El benceno es una sustancia química altamente tóxica para los seres vivos. Sin embargo se utiliza en la fabricación de medicamentos, pinturas, etc. Regulaciones de gobierno establecen que el contenido de benceno en agua que resulta de cualquier proceso de producción no debe exceder 7950 ppm.

Para un proceso de fabricación particular, se realizaron 25 mediciones aleatorias del contenido de benceno en agua y se obtuvo un promedio de 7975 ppm y una desviación estándar de $s_{n-1} = 75$ ppm. Suponga que la variable X contenido de benceno en agua tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 .

- a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para $\sqrt{\mu}$; σ y para $P(X \leq 8068)$. ¿Qué propiedad está usando?
- b) Dar un intervalo de confianza del 99% para σ^2 .
- c) ¿Existe evidencia suficiente para concluir que este proceso de producción excede los límites establecidos por el gobierno? Para responder: establecer las hipótesis pertinentes, calcular el valor alcanzado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%.
- d) Ahora suponga que $\sigma = 75$ ppm, ¿existe evidencia suficiente para concluir que este proceso de producción excede los límites establecidos por el gobierno? Para responder: calcular el p -valor y concluir en base al mismo en el contexto del problema al 5%.

Ejercicio 6: Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución Uniforme en el intervalo $(\theta; \theta + 1)$, con $\theta > 0$.

- a) Considere $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ un estimador para θ cuya función densidad está dada por:

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} n(x - \theta)^{n-1}; & \text{si } x \in (\theta; \theta + 1) \\ 0 & \text{; en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular la esperanza de $\hat{\theta}$.

- b) Obtener el estimador por el método de los momentos para θ .
- c) Demostrar que $\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \frac{1}{2}$ y $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta} - \frac{n}{n+1}$ son estimadores insesgados para θ .

Ayuda: Si $X \sim U(a; b)$ entonces su función densidad está dada por $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a; b) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ y su esperanza

y varianza son iguales a: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.