

Examen de Probabilidad y Estadística

FAMAF - UNC (11/03/2021)

Justifique claramente todas sus respuestas y realizar las cuentas usando 4 dígitos decimales significativos

Parte A:

Ejercicio 1:

Determinar si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones, justificando todas sus respuestas.

- I) Un profesor analiza las notas obtenidas por sus alumnos en un primer parcial de Probabilidad y Estadística. A continuación se presenta una tabla con las notas y sus correspondientes porcentajes.

nota	2	3	6	8	9	10
porcentaje	5	20	50	15	5	5

- a) El porcentaje de alumnos con nota menor o igual a 6 es del 50%.
b) El promedio para este conjunto de notas es 6,33.
c) Considere que el número total de alumnos que rindió el parcial es de 40.
i) Si se aprueba con por lo menos 4, entonces 25 alumnos no aprobaron el parcial.
ii) Para poder alcanzar la promoción de la materia, el alumno necesita obtener por lo menos siete en cada uno de los dos parciales. Entonces, 27 alumnos continúan en carrera para la promoción.
- II) Para un conjunto de 18 datos se obtuvo un promedio de 64,50. Luego se agregan dos observaciones: 56,8 y 80,6 al conjunto inicial. Entonces el promedio del conjunto incluyendo a las nuevas observaciones es igual a 64,92.

Ejercicio 2:

- a) Considere dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 4 rojas y la caja B, 8 blancas y 4 rojas. Si se selecciona una bola de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola elegida de la caja A sea blanca dado que exactamente una bola fue blanca?
- b) Un nuevo test para detectar la presencia de HIV es efectivo en un 98% cuando el virus está presente, pero también arroja “falsos positivos” en el 4% de los individuos no portadores (el test resulta positivo pero el individuo no es portador). Se sabe que en ciertas regiones de África, el 5% de los habitantes son portadores de HIV. Se aplica el test a un individuo elegido al azar de esta población.
i) Calcular la probabilidad de obtener un resultado negativo en el test.
ii) Si el resultado del test es positivo, calcular la probabilidad de que el individuo sea portador.
iii) Calcular la probabilidad de que el test arroje un resultado erróneo.

Ejercicio 3:

La velocidad (en Km/h) a la que van los automóviles por una autopista tiene distribución normal de parámetros $\mu = 100$ y $\sigma = 15$. El límite de velocidad para esa autopista es de $110 Km/h$. Si un vehículo va entre 110 y $120 Km/h$ pagará una multa de \$3000 y si va a más de $120 Km/h$ pagará \$6000.

- a) ¿Qué proporción de vehículos pagará una multa de \$3000? ¿Y de \$6000?
b) Se eligen al azar 10 automóviles en esta autopista, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos tengan que pagar una multa?
c) Se quiere cambiar el límite de velocidad para que sólo el 15% de los automovilistas paguen multa. ¿Cuál debería ser ese nuevo límite?

- d) La velocidad a la que van los vehículos pesados es una variable aleatoria con distribución normal cuyo valor medio y desvío estándar son iguales a 85 y 12 Km/h respectivamente. Con el nuevo límite de velocidad encontrado en el ítem c), ¿qué porcentaje de vehículos pesados pagarán multa?

Parte B:

Ejercicio 4: Se seleccionó una muestra aleatoria de 480 productores agropecuarios, de una región de la provincia de Córdoba, de los cuales 360 eran propietarios. Sea p la proporción de productores agropecuarios, de esta zona, que son propietarios.

- a) Dar un intervalo de confianza del 97,5% para p .
- b) ¿Existe evidencia suficiente para afirmar que más del 70% de los productores agropecuarios, de esta zona, son propietarios?
 - i) Plantear las hipótesis pertinentes.
 - ii) Calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema a nivel 0,03.
 - iii) Calcular el p -valor aproximado y **usando ese valor** tomar una decisión en el contexto del problema al 1%.

Ejercicio 5: Un fabricante afirma que sus tabletas de aspirinas pesan 1 gr. Como parte de un estudio de medicamentos, se tomó una muestra de 18 tabletas de aspirinas, producidas por este fabricante, cuyo peso promedio muestral fue de 0,96 gr y el desvío estándar muestral (s_{n-1}) de 0,04 gr. Suponga que la variable peso de las tabletas (X) tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 .

- a) Dar la estimación por máxima verosimilitud para μ^2 , σ y el percentil 30. Justifique sus respuestas.
- b) Obtenga un intervalo de 98% de confianza para σ .
- c) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas difiere de lo que afirma el fabricante? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%.

Ejercicio 6: Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con $n \geq 3$ y función densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \theta x) & ; \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & ; \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde $-1 \leq \theta \leq 1$.

- a) Hallar el estimador por el método de los momentos para θ .
- b) Calcular el valor esperado y desviación estándar para el estimador obtenido en a). Justifique.
- c) Considere los siguientes estimadores para θ :
 $\hat{\theta}_1 = X_1 + X_2 + X_n$; $\hat{\theta}_2 = \bar{X}$; $\hat{\theta}_3 = 3\bar{X}$ y $\hat{\theta}_4 = X_1 + 2X_2 + X_3$.
 - i) Determinar cuáles estimadores son insesgados para θ . Justifique.
 - ii) Entre los estimadores insesgados para θ , ¿cuál elegiría? Justifique.