

Examen de Probabilidad y Estadística e Introducción a la Probabilidad y Estadística – FAMAf (26/07/2021)

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS SUS RESPUESTAS

Parte A:

Ejercicio 1:

En la fabricación de un artículo pueden presentarse sólo dos tipos de defectos, tipo I y tipo II. El defecto tipo I se presenta el 5% de las veces, el defecto tipo II se presenta el 10% de las veces y se puede suponer independencia entre los tipos de defectos. Se selecciona al azar un artículo de la producción de esta fábrica.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
- Si el artículo seleccionado fue defectuoso ¿cuál es la probabilidad de que el artículo tenga sólo el defecto tipo I?

Ejercicio 2:

Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{(x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [-2; 0) \\ 1 - \frac{(-x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [0; 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.
- Hallar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.
- Calcular el percentil 25 para la variable X .
- Calcular el valor esperado y desviación estándar para X .

Ejercicio 3:

El peso medio del equipaje registrado por un pasajero de clase turista, seleccionado al azar, que vuela entre dos ciudades por cierta aerolínea, es de 40 lb y la varianza es de 64 lb. La media y varianza para el peso del equipaje de un pasajero de clase ejecutiva es de 30 lb y 36 lb respectivamente. Suponga que los pesos individuales de equipaje son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el peso del equipaje de un pasajero de clase ejecutiva, seleccionado al azar, esté comprendido entre 17,52 y 33,84 lb?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el peso del equipaje de un pasajero de clase ejecutiva sea menor que el peso del equipaje de un pasajero de clase turista, seleccionados al azar?
- Se seleccionan al azar 10 pasajeros de clase ejecutiva.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el peso del equipaje de sólo tres de los 10 pasajeros exceda 33,84 lb?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el peso promedio del equipaje de los pasajeros sea inferior a 33,84 lb?

Parte B:

Ejercicio 4:

Un artículo reciente, publicado en el diario USA Today, indica que solo a uno de tres egresados de una universidad le espera un puesto de trabajo. En una investigación donde participaron 200 egresados recientes de esta universidad, se encontró que a 85 les esperaba ya un puesto de trabajo.

- Construya un intervalo de confianza del 98% para la verdadera proporción de egresados recientes con puesto de trabajo.
- ¿Puede concluirse a un nivel de significancia de 0,02, que en esta universidad la proporción de estudiantes recientemente egresados que tienen trabajo es mayor a la afirmación publicada en el diario? Responder planteando las hipótesis pertinentes, calcular el valor observado del estadístico de prueba y el p-valor. Concluir en el contexto del problema **usando el p-valor**.

Ejercicio 5:

El benceno es una sustancia química altamente tóxica para los seres vivos. Sin embargo, se utiliza en la fabricación de medicamentos, pinturas, etc. Regulaciones de gobierno establecen que el contenido de benceno en agua que resulta de cualquier proceso de producción no debe exceder 7950 ppm.

Para un proceso de fabricación particular, se realizaron 25 mediciones aleatorias del contenido de benceno en agua y se obtuvo un promedio de 7975 ppm y una desviación estándar de $s_n = 74$ ppm. Suponga que la variable X , contenido de benceno en agua, tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 .

- Dar estimaciones por máxima verosimilitud para $\sqrt{\mu}$; σ^2 y para $P(X \geq 7990)$. Justifique sus respuestas.
- Dar un intervalo de confianza del 95% para μ .
- ¿Existe evidencia suficiente para concluir que este proceso de producción excede los límites establecidos por el gobierno? Para responder: establecer las hipótesis pertinentes, calcular el valor alcanzado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%.
- Ahora asuma que $\sigma = 73$ ppm, ¿existe evidencia suficiente para concluir que este proceso de producción excede los límites establecidos por el gobierno? Para responder: calcular el p valor y concluir en el contexto del problema al 5% usando el pvalor.

Ejercicio 6:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución Uniforme en el intervalo $(\theta; \theta + 1)$, con $\theta > 0$.

- Considere $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ un estimador para θ cuya función densidad está dada por:

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} n(x - \theta)^{n-1} & ; \text{si } x \in (\theta; \theta + 1) \\ 0 & ; \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular la esperanza de $\hat{\theta}$.

- Obtener el estimador por el método de los momentos para θ .
- ¿ $\hat{\theta}_1$ es insesgado para θ ? Justificar claramente su respuesta.
- Sea $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta} - \frac{n}{n+1}$ un estimador para θ , ¿es insesgado para θ ? Justificar claramente su respuesta.

Ayuda: Si $X \sim U(a; b)$ entonces su función densidad está dada por $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a; b) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ y su esperanza y

varianza son iguales a: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.