Examen de Probabilidad y Estadística e Introducción a la Probabilidad y Estadística – FAMAF (9/08/2021)

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS SUS RESPUESTAS

Parte A:

Ejercicio 1:

En un lote de 10 cubiertas para auto, dos poseen un pequeño defecto de fabricación. Se seleccionan 3 cubiertas al azar sin reposición, una después de otra. Sean los eventos *A* = {la primera cubierta es defectuosa} y *B* = {la segunda cubierta es defectuosa}.

a) Calcular la probabilidad de que al menos una de las cubiertas sea defectuosa.
b) Calcular la probabilidad de que exactamente una de las cubiertas sea defectuosa.
c) ¿ A y $\bar{B}$ son independientes? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2:

Sea *X* una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} k\,(x-1) & si\ 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{(4-x)}{4} & si\ 2 \leq x < 4 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

a) Determinar el valor de la constante k.
b) Calcular el percentil 25 para la variable *X* y $P\left(\frac{1}{2} < X < 3\right)$.
c) Calcular la esperanza y desviación estándar de *X* .
d) Si $W = 4\,X^2 - 3X + 16$ calcular su valor esperado. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3:

El tiempo de vida de cierto tipo de motor sigue una distribución normal con una media de 10 años y una desviación estándar de 2 años.

a) ¿Cuál es el porcentaje de motores con un tiempo de vida comprendido entre 7,28 y 15,3 años?
b) El fabricante reemplaza gratis todos los motores que fallen dentro del período de garantía. Si estuviese dispuesto a reemplazar sólo el 3% de los motores que fallan, ¿cuánto tiempo de garantía debería ofrecer?
c) Se seleccionaron al azar 16 de estos motores.
   i) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio muestral del tiempo de vida para los 16 motores supere 11,08 años?
   ii) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de los 16 motores tengan un tiempo de vida superior a 10,5 años?

Parte B:

Ejercicio 4:

Una organización de salud se interesa en actualizar su información con respecto a la proporción de hombres que fuman en una cierta zona. Se llevó a cabo una encuesta en la que se seleccionaron 1200 hombres, de los cuales 252 resultaron fumadores.

a) Calcule un intervalo de 99% de confianza para la proporción de hombres fumadores en esa región.

b) Registros de diez años atrás indican una proporción de fumadores de 0,24 en la región. ¿Existe evidencia suficiente para afirmar que hubo una disminución en la proporción de fumadores? Para responder esta pregunta, plantee las hipótesis de interés, calcule el valor observado del estadístico de prueba y concluya a nivel 0,05:

   i) a partir de la región de rechazo;

   ii) a partir del p-valor de la prueba.

Ejercicio 5:

El tiempo de activación de un sistema de rociadores para prevención de incendios, que utiliza una espuma acuosa, (X) sigue una distribución normal de parámetros μ y σ^2. Para una muestra al azar de 15 rociadores se obtuvieron un promedio muestral de 27,92 segundos y una desviación estándar muestral de $s_{n-1} = 4{,}60$ segundos.

a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para μ^2 , σ y para $P(X \geq 17{,}75)$. Justifique sus respuestas.

b) Dar un intervalo de confianza del 95% para σ.

c) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 26 segundos? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, determinar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%.

d) Si ahora asumimos que $\sigma = 3{,}5$, ¿existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 26 segundos? concluir en el contexto del problema al 5% .

Ejercicio 6:

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución Uniforme en el intervalo $(\theta;\ \theta + 1)$, con $\theta > 0$.

a) Considere $\hat{\theta} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ un estimador para θ cuya función densidad está dada por:

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} n\,(x-\theta)^{n-1} & ;\text{si } x \in (\theta;\ \theta+1) \\ 0 & ;\text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular la esperanza de $\hat{\theta}$.

b) Obtener el estimador por el método de los momentos para θ.

c) ¿$\hat{\theta}_1$ es insesgado para θ? Justificar claramente su respuesta.

d) Sea $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta} - \frac{n}{n+1}$ un estimador para θ. ¿Es insesgado para θ? Justificar claramente su respuesta.

Ayuda: Si $X \sim U(a;b)$ entonces su función densidad está dada por $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in (a;b) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ y su esperanza y varianza son iguales a: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.