Examen de Probabilidad y Estadística

FAMAF - UNC (06/12/2021)

Justifique claramente todas sus respuestas y realizar las cuentas usando 4 dígitos decimales significativos

Parte A:

Ejercicio 1:

Una urna contiene tres monedas. La moneda I tiene dos cruces, la moneda II es tal que la probabilidad de que salga cruz es igual a la de que salga cara y la moneda III es tal que la probabilidad de que salga cruz es el triple de la de que salga cara. Se extrae al azar una moneda de la urna y es lanzada.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte cruz en el lanzamiento?
b) Suponiendo que en el lanzamiento resultó cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la III?

Ejercicio 2:

Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)/2 & si -1 \leq x < 0 \\ (-x+3)/6 & si\ 0 \leq x < 3 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

a) Calcular $P(X < 0)$ y $P(X \geq 1)$.
b) Calcular el percentil 50 o cuantil 0,50 de X.
c) Calcular la esperanza de X.
d) Si $W = -6X + 16$, calcular su valor esperado.

Ejercicio 3:

Un empleado de oficina viaja todos los días desde su casa al trabajo en auto. Suponga que el tiempo de viaje de su casa al trabajo tiene una distribución normal, con una media de 24 minutos y una desviación estándar de 3,8 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el viaje de ida al trabajo dure a lo sumo 20 minutos?
b) Si el horario de ingreso a la oficina es a las 9:00 A.M. y él sale a diario de su casa a las 8:25 A.M., ¿qué porcentaje de las veces llegará tarde a su trabajo?
c) Considerar que los tiempos de duración de los cinco viajes de ida, de lunes a viernes, son independientes.
   i) Calcular la probabilidad de que a lo sumo uno de los 5 viajes dure por lo menos 30 minutos.
   ii) Calcular la probabilidad de que el tiempo de duración total de los cinco viajes de ida sea a lo sumo 100 minutos.

Parte B:

Ejercicio 4: Muchos consumidores están recurriendo a productos genéricos como una forma de reducir el costo de medicamentos por prescripción. Sobre un estudio realizado a 800 médicos, se encontró que 632 conocían el nombre genérico de la metadona.

a) Determinar un intervalo de confianza del 97 % para p, la verdadera proporción de médicos que conocen el nombre genérico de la metadona.
b) ¿Qué tamaño de muestra se debería tomar para que la longitud del intervalo de confianza del 97% para p sea a lo sumo 0,04? Independientemente del valor de $\hat{p}$.

c) ¿Se puede decir que existe evidencia suficiente para afirmar que más del 75 % de los médicos conocen el nombre genérico de la metadona? Plantear las hipótesis adecuadas y **concluir al 2% usando el p-valor**.

Ejercicio 5:

Se sabe que la cantidad de monóxido de carbono (CO) para un determinado gas es de 70 ppm. Para evaluar si un fotómetro está bien calibrado, se lo utilizó para realizar 15 mediciones de la cantidad de monóxido de carbono (X) para este gas, obteniendo un promedio y varianza muestrales de $68{,}5$ y ${s_{n-1}}^2 = 12{,}25$ respectivamente. Suponga que las mediciones con este fotómetro responden a una distribución normal de parámetros μ y σ^2.

a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para $\sqrt{\mu}$, σ y para $P(X \geq 66{,}5)$. Justifique claramente sus respuestas.
b) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el fotómetro está bien calibrado? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, determinar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%.
c) Si ahora asumimos que $\sigma = 3{,}5$, ¿existe evidencia suficiente para decir que el fotómetro está bien calibrado? Concluir en el contexto del problema a nivel 0,05 usando el p-valor.

Ejercicio 6:

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $Bernoulli(p)$.

a) Dar la distribución de la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (especificando todos sus parámetros), su esperanza y su desvío estándar.
b) Hallar el estimador por el método de los momentos para p.
c) El estimador obtenido en b), ¿es insesgado para p? ¿Cuánto vale su varianza? Justifique sus respuestas.
d) Probar que el estimador $n\,\bar{X}\,(1-\bar{X})$ no es insesgado para la varianza de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.