

Examen de Probabilidad y Estadística

FAMAF - UNC (21/12/2021)

Justifique claramente todas sus respuestas y realizar las cuentas usando 4 dígitos decimales significativos

Parte A:

Ejercicio 1:

Un fabricante de una vacuna para la gripe está interesado en determinar la calidad de su suero. Con ese fin, tres departamentos diferentes (A, B y C) procesan los lotes de suero en Aceptables o No aceptables y tienen probabilidades de no aceptabilidad de 0,10; 0,08 y 0,12 respectivamente. Las inspecciones de los tres departamentos son secuenciales, o sea primero A, seguido por B y por último C, y los resultados son independientes entre sí.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero no sea aceptable por los tres departamentos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sea aceptable para el departamento A pero no lo sea para el departamento B?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sea aceptable para exactamente uno de los tres departamentos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sea aceptable para el departamento C dado que es aceptable para exactamente dos departamentos?

Ejercicio 2:

Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada dada por

$$F(x) = \begin{cases} a & ; \text{si } x < 1 \\ b(x-1)^2 & ; \text{si } x \in [1, 5) \\ c & ; \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes.

- Determinar el valor de las constantes usando propiedades de la función de distribución acumulada.
- Hallar la función de densidad de X .
- Calcular la esperanza y varianza de X .
- Calcular la esperanza de $W = 7X^2 - 8X$.

Ejercicio 3:

Una máquina produce tubos rígidos cuyo diámetro (X , en mm) tiene una distribución normal con media y varianza de 100 y 0,25 respectivamente. Los tubos con diámetro inferior a 99,05 mm o superior a 100,85 mm son considerados defectuosos y deben ser reciclados.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un tubo elegido al azar tenga un diámetro superior a 99,24 mm ?
- ¿Qué porcentaje de la producción deberá ser reciclada?
- Hallar el percentil 3% o cuantil 0,03 de X .
- Se seleccionaron 10 tubos al azar de la producción.
 - Calcular la probabilidad de que por lo menos 8 de los 10 tubos no requieran ser reciclados.
 - Calcular la probabilidad de que el promedio de los diámetros de estos tubos sea a lo sumo 99,5 mm .

Parte B:

Ejercicio 4:

Una empresa conoce que el porcentaje de accidentes de trabajo en sus trabajadores es del 25%. Con el fin de disminuir este porcentaje de accidentes se organiza un curso obligatorio, sobre medidas de seguridad en la empresa. Al año siguiente se seleccionó una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los cuales 100 sufrieron algún tipo de accidente en el trabajo. Sea p la verdadera proporción de trabajadores que sufren algún accidente laboral después de la capacitación.

- Determinar un intervalo de confianza del 97% para p .
- Determinar el menor tamaño de muestra necesario para que un intervalo de confianza del 97% para p tenga una longitud de a lo sumo 0,05, independientemente del valor \hat{p} .
- ¿Hay evidencia suficiente para decir que la capacitación logró disminuir la proporción de accidentes laborales? Plantear las hipótesis pertinentes, calcular el p-valor y usando el p-valor concluir en el contexto del problema al 2%.

Ejercicio 5:

Se midieron las ganancias de peso corporal (X , en gramos) en 16 ratas que recibieron una dosis de cierto esteroide, durante cierto tiempo. Suponga que la variable ganancia de peso para este grupo tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 . Para esta muestra se obtuvo un promedio y desvío estándar muestral (s_{n-1}) de 36,8 y 2,6 respectivamente.

- Dar estimaciones por máxima verosimilitud para σ^2 , $(\mu + 3\sigma)$ y para el percentil 15 o cuantil 0,15 para la variable X . Justifique claramente sus respuestas.
- Obtenga un intervalo de confianza del 99% para la ganancia media de peso en este grupo tratado con esteroides.
- Se sabe que la ganancia media de peso corporal si no recibe la dosis de esteroide es de 34,5 gramos. ¿Existe evidencia suficiente para decir que la ganancia media de peso es mayor en quienes recibieron la dosis de esteroide? Plantear las hipótesis pertinentes, determinar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 1%.

Ejercicio 6:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria, $n \geq 2$, con función densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2} (\theta - x) & ; \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & ; \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $\theta > 0$.

- Hallar el estimador por el método de los momentos para θ .
- Determinar si el estimador obtenido en a) es insesgado para θ y hallar su varianza.
- ¿Para qué valor de k es $\frac{kn}{1+2n} \bar{X}^2$ insesgado para θ^2 ?