

Examen de Probabilidad y Estadística e Introducción a  
Probabilidad y Estadística, FAMAF – UNC (10/02/2022)

**Justifique claramente todas sus respuestas y realizar las cuentas usando 4 dígitos decimales significativos**

**Parte A:**

**Ejercicio 1:**

Una caja contiene 400 sobres de los cuales 176 tienen \$70, 120 contienen \$50 y el resto de los sobres contienen \$30. Un sobre es seleccionado al azar y se vende por \$50.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de comprar un sobre que tenga por lo menos \$50?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de comprar un sobre que contenga \$70 si se sabe que contiene por lo menos \$50?
- c) Sea  $G$  la variable ganancia neta obtenida en la compra del sobre (notar que  $G$  puede tomar valores negativos).

Hallar:

- i) La función probabilidad de masa de la variable aleatoria  $G$ .
- ii) La función de distribución acumulada de  $G$ .
- iii) El valor esperado y desvío estándar de la variable aleatoria  $G$ .

**Ejercicio 2:**

El tiempo (en horas) requerido por los estudiantes para entregar un parcial de una hora, es una variable aleatoria con función densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x; & 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{ caso contrario} \end{cases}$$

- a) Determinar el valor de la constante  $c$ .
- b) Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.
- c) Calcular la probabilidad de que un estudiante necesite por lo menos 30 minutos para entregar dado que como mínimo se necesitan 15 minutos para entregar el parcial.
- d) Calcular la esperanza y varianza de  $X$ .

**Ejercicio 3:**

Los alambres que se utilizan en una computadora deben tener una resistencia entre 0,12 y 0,14 ohms. Suponga que la resistencia de alambres, de este tipo, producidos por dos compañías A y B tienen distribuciones normales. Los parámetros para la distribución en la compañía A son la media igual a 0,13 ohms y el desvío estándar igual a 0,005 ohms mientras que para la compañía B, la media es 0,125 ohms y el desvío estándar es 0,005 ohms.

- a) ¿Cuál compañía tiene mayor probabilidad de producir alambres que cumplan las condiciones establecidas?
- b) Calcular la probabilidad de que la resistencia de un alambre producido por la compañía A sea mayor que para la compañía B.
- c) Se seleccionaron 9 alambres aleatoriamente fabricados en la compañía B. Calcular:
  - i) la probabilidad de que por lo menos ocho cumplan las condiciones establecidas.
  - ii) el percentil 30 o cuantil 0,30 para la variable promedio muestral.

## **Parte B:**

### **Ejercicio 4:**

Según información de un país, el porcentaje de mujeres fumadoras es del 30%. En cierta región de este país se seleccionó una muestra aleatoria de 1200 mujeres, a las cuales se les preguntó sobre sus hábitos de fumar, resultando que 312 eran fumadoras.

- Construya un intervalo de confianza aproximado del 95% para la proporción de mujeres fumadoras en esta región.
- Si con los mismos datos del enunciado se obtiene un intervalo de confianza para la proporción de mujeres fumadoras en esta región de longitud aproximadamente igual a 0,03, ¿cuál es el nivel de confianza de este intervalo? Comparando este intervalo con el obtenido en a), determine cuál es más preciso.
- ¿Existe evidencia suficiente para determinar que en esta región la proporción de mujeres fumadoras difiere de la proporción de mujeres fumadoras del país? Plantear las hipótesis pertinentes, calcular el valor observado y dar la distribución aproximada del estadístico de prueba, calcular el p-valor aproximado y concluir en el contexto del problema usando el p-valor al 1%.

### **Ejercicio 5:**

El monóxido de carbono es un gas inodoro, incoloro, inflamable y altamente tóxico. Puede causar la muerte cuando se respiran niveles elevados. Se obtuvieron 15 muestras de aire de determinada región, registrándose la concentración de monóxido de carbono (medida en ppm) en cada una de ellas. Los resultados obtenidos fueron una concentración promedio de 10,88 y una desviación estándar muestral de  $s_{n-1} = 2,082$ .

Se puede suponer que la variable  $X$  (concentración de monóxido de carbono en aire) tiene distribución normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

- Dar estimaciones por el **método de máxima verosimilitud** para  $(\mu + 3\sigma)$ , para el percentil 95 o cuantil 0,95 de  $X$  y la  $P(X \geq 9)$ .
- Dar estimaciones por el **método de los momentos** para  $\mu$  y  $\sigma^2$ .
- Obtener un intervalo de confianza del 99% para  $\mu$ .
- La Organización Mundial de la Salud (OMS) ha fijado en 9 ppm el límite de tolerancia de concentración de monóxido de carbono en aire. ¿Existe evidencia suficiente para concluir que en esta región se supera el límite de tolerancia establecido por la OMS? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, determinar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 1%.

### **Ejercicio 6:**

Sea  $X$  una variable aleatoria con función densidad de probabilidad dada por:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & ; \text{ si } x > 0 \\ 0 & ; \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

y  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con la misma distribución que  $X$ .

- Probar que  $E(X^2) = 2\theta$ .
- Determinar el valor de la constante  $k$  tal que el estimador  $\hat{\theta} = k \sum_{i=1}^n X_i^2$  sea insesgado para  $\theta$ .
- Suponga que la distribución del esfuerzo vibratorio de una paleta de turbina bajo condiciones específicas tiene la misma distribución que  $X$  y seis mediciones de esta variable fueron: 16,88 ; 4,59 ; 6,66 ; 14,23 ; 10,95 y 9,40. Obtenga una estimación para  $\theta$  usando el estimador obtenido en b).