Probabilidad y Estadística - Introducción a la Probabilidad y Estadística 2024

1,a)	1,b)	1,c)	2,a)	2,b)	2,c)	2,d)	3,a)	3,b)	3,c)	3,d)	4,a)	4,b)	4,c1)	4,c2)

Parcial I

▶ **1.** **(1 punto)** Anticipamos una probabilidad del 15 % de que el rendimiento de las acciones de ABC Corp el próximo año sea del 6 %, un 60 % de probabilidad de que sea del 8 % y un 25 % de probabilidad de que el rendimiento sea del 10 %.

También anticipamos que las mismas probabilidades y estados están asociados con un rendimiento del 4 % para XYZ Corp, un rendimiento del 5 % y un rendimiento del 5,5 %. Entonces, el valor esperado de los rendimientos de las acciones de ABC Corp es del 8,2 % y la desviación estándar es del 1,249 %, y el valor esperado de los rendimientos de las acciones de XYZ Corp es 4,975 % y la desviación estándar es 0,46 %.

a) Verifique que la tabla de doble entrada asociada a la distribución conjunta de los retornos es diagonal.

b) Encuentre la covarianza entre los rendimientos de las acciones de ABC Corp y XYZ Corp

c) Encuentre el coeficiente de correlación entre los rendimientos de las acciones de ABC Corp y XYZ Corp e interprete el resultado.

Solución

a)

Retornos			
		XYZ Corp	
ABC Corp	0.04	0.05	0.055
0.06	0,15	0	0
0.08	0	0.6	0
0.1	0	0	0,25

Esperanza Desviación Estándar ABC

$$E(R_{\text{ABC}}) = 0{,}06 \times 0{,}15 + 0{,}08 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}082$$
$$\sigma(R_{\text{ABC}}) = 0{,}06^2 \times 0{,}15 + 0{,}08^2 \times 0{,}6 + 0{,}1^2 \times 0{,}25 - 0{,}082^2 = 0{,}01249$$

Esperanza Desviación Estándar XYZ

$$E(R_{\text{XYZ}}) = 0{,}04 \times 0{,}15 + 0{,}05 \times 0{,}6 + 0{,}055 \times 0{,}25 = 0{,}04975$$
$$\sigma(R_{\text{XYZ}}) = 0{,}04^2 \times 0{,}15 + 0{,}05^2 \times 0{,}6 + 0{,}055^2 \times 0{,}25 - 0{,}04975^2 = 0{,}0046$$

b)

$$\text{Covarianza} = E((R_{\text{ABC}} - E(R_{\text{ABC}}))(R_{\text{XYZ}} - E(R_{\text{XYZ}})) = E(R_{\text{ABC}}R_{\text{XYZ}}) - E(R_{\text{XYZ}})E(R_{\text{ABC}})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathrm{R_{ABC}}, \mathrm{R_{XYZ}}) &= 0{,}15(0{,}06 – 0{,}082)(0{,}04 – 0{,}04975)\\ &+ 0{,}6(0{,}08 – 0{,}082)(0{,}05 – 0{,}04975)\\ &+ 0{,}25(0{,}10 – 0{,}082)(0{,}055 – 0{,}04975)\\ &= 0{,}00005\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathrm{R_{ABC}}, \mathrm{R_{XYZ}}) &= 0{,}15(0{,}06 \times 0{,}04) + 0{,}6(0{,}08 \times 0{,}05)\\ &+ 0{,}25(0{,}10 \times 0{,}055) - 0{,}04975 \times 0{,}082\\ &= 0{,}00005\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Correlacion}\,(R_i, R_j) &= \frac{\text{Covarianza}\,(R_i, R_j)}{\text{Desviación estándar}\,(R_i) * \text{Desviación estándar}\,(R_j)}\\ &= \frac{0{,}0000561}{(0{,}01249 * 0{,}0046)}\\ &= 0{,}976\end{aligned}$$

c) Interpretación: la correlación entre los rendimientos de las dos empresas es muy fuerte (casi +1) y los rendimientos se mueven linealmente en la misma dirección.

► **2.** **(2 puntos)** Boca y Talleres hacen una serie de partidos en los que si hay empate se define por penales. Suponga que $p = P(\text{gana Boca}) = 0{,}6$. Jugarán hasta que Boca gane dos partidos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que Talleres no gane ningún partido?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se jueguen a lo sumo 3 partidos?.
c) Escriba una relación entre el número de partidos jugados en la serie y el número de partidos que Talleres gana.
d) Use la relación anterior para decir cual es número esperado de partidos jugados en la serie y el número esperado de partidos que Talleres gana.

Solución

- X: Número de veces que Talleres gana antes de que Boca gane su segundo partido.
- Y: Número total de partidos jugados hasta que Boca gane su segundo partido.

La variable aleatoria Y sigue una distribución binomial negativa con parámetros $p = 0{,}6$ y $r = 2$. Por lo tanto,

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r\,.$$

a) Para que Talleres no gane ningún partido, Boca debe ganar los dos partidos necesarios sin que Talleres gane ninguno. Es decir, los dos partidos que Boca gana son los únicos partidos jugados.

Entonces, la probabilidad de que Boca gane dos partidos consecutivos es:

$$P(Y=2) = \binom{2-1}{1} \cdot (0{,}4)^0 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}36\,.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que Talleres no gane ningún partido es 0,36.

b) Para determinar la probabilidad de que se jueguen a lo sumo 3 partidos, debemos considerar los siguientes escenarios:

1. **Boca gana los dos primeros partidos:**

$$P(Y=2) = \binom{2-1}{1} \cdot (0{,}4)^0 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}36\,.$$

2. **Taller gana el primer o segundo partido:**

$$P(Y=3) = \binom{3-1}{1} \cdot (0{,}4)^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}288\,.$$

Sumamos las probabilidades de estos dos escenarios para encontrar la probabilidad total de que se jueguen a lo sumo 3 partidos:

$$P(\text{se juegan a lo sumo 3 partidos}) = 0{,}36 + 0{,}288 = 0{,}648$$

c) Observemos que X, el número de partidos que Talleres gana antes de que Boca gane su segundo partido es igual al número de partidos que Boca pierde antes de ganar dos partidos.

Por lo cual $X = Y - 2$.

d) Sabemos que el valor esperado de la variable aleatoria Y es

$$E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{2}{0{,}6} = \frac{10}{3} = 3{,}33\,.$$

Además, dado que $Y = X + 2$, podemos encontrar el valor esperado de X restando 2 al valor esperado de Y:

$$E(X) = E(Y) - 2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}\,.$$

► **3.** **(3 puntos)** Supongamos que una empresa importa monitores LED que, según el fabricante, tienen una vida media útil de 300 meses. Sea X la variable con distribución exponencial de media 300 meses que modela la vida útil de un monitor elegido al azar.

a) Defina la densidad de X y encuentre la tasa λ.
b) Encuentre la distribución acumulada de X.
c) Calcule la probabilidad de que un monitor dure mas de 200 meses.
d) Si conforma un lote de tres monitores eligiéndolos en forma independiente, cada uno de ellos tiene distribución exponencial con media 300 meses. Calcule la probabilidad de que la duración mínima del lote sea de 100 meses.

Solución

a) La función de densidad esta dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{300}e^{-\frac{t}{300}}\,. & \text{si } t \geq 0\,, \\ 0 & \text{si } t < 0\,. \end{cases}$$

b) La función de distribución acumulada esta dada, para $x > 0$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

por lo cual

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{300}t}\,. & \text{si } t \geq 0\,, \\ 0 & \text{si } t < 0\,. \end{cases}$$

c) La probabilidad de que un monitor dure mas de 200 meses $P(X > 200)$ esta dada por

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= 1 - P(X \leq 200) \\ &= 1 - P(X < 200) \\ &= 1 - F(200) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{200}{300}}) \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \\ &\approx 0{,}5134\,. \end{aligned}$$

d) Como son independientes la probabilidad que los 3 monitores X_1, X_2 y X_3 duren mas de 100 meses esta dada por

$$\begin{aligned} P(X_1 > 100, X_2 > 100, X_3 > 100) &= P(X_1 > 100)P(X_2 > 100)P(X_3 > 100) \\ &= (1 - P(X_1 < 100))(1 - P(X_2 < 100))(1 - P(X_3 < 100)) \\ &= (1 - F(100))(1 - F(100))(1 - F(100)) \\ &= (1 - (1 - e^{-\frac{100}{300}}))^3 \\ &= e^{-1} \\ &\approx 0{,}3679\,. \end{aligned}$$

► **4.** **(4 puntos)** La dureza Rockwell de un metal se determina al golpear con un punto acerado la superficie del metal y después medir la profundidad de penetración del punto. Si se tiene dos aleaciones templadas en forma diferente, una al agua y la otra al aceite. Suponga que la dureza Rockwell de la aleación templada al aceite esta normalmente distribuida con media de 70 y desviación estándar de 3 y que la aleación templada al agua esta normalmente distribuida con media de 71 y desviación estándar de 1.2.

a) Un espécimen es aceptable si su dureza esta entre 67 y 75. ¿Cual es el método que produce un mayor porcentaje de especímenes con dureza aceptable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo ocho de diez especímenes templados al aceite, seleccionados independientemente, tengan una dureza menor de 73,84?

c) Sabemos que el lote disponible tiene 40 % de especímenes templados al agua y 60 % de especímenes templados al aceite,

- Si se selecciona un espécimen al azar, ¿cual es la probabilidad de que tenga una dureza aceptable?
- Si el espécimen elegido al azar resulta aceptable, calcule la probabilidad de que haya sido templado al agua.

Solución

a) Sean X e Y las variables aleatorias que miden la dureza Rockwell de un espécimen de aleación templada al aceite y al agua respectivamente. Entonces $X \sim N(70, 3^2)$ e $Y \sim N(71,\, 1{,}2^2)$.

$P(\text{Dureza aceptable}|\text{templado al aceite}) = P(67 \leq X \leq 75)$. Estandarizando obtenemos que $Z = \frac{X-70}{3} \sim N(0,1)$, entonces

$$P(67 \leq X \leq 75) = P\left(\frac{67-70}{3} \leq Z \leq \frac{75-70}{3}\right) = P\left(-1 \leq Z \leq \frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi(-1).$$

Para resolver buscamos los valores en la tabla:

$$\Phi\left(\frac{5}{3}\right) = \Phi(1{,}666) \approx 0{,}952 \quad \text{y} \quad \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$$

Entonces $P(\text{Dureza aceptable}|\text{templado al aceite}) = 0{,}952 - 0{,}1587 = 0{,}7933$.

Análogamente, podemos calcular $P(\text{Dureza aceptable}|\text{templado al agua}) = P(67 \leq Y \leq 75)$, tomando $Z = \frac{Y-71}{1{,}2} \sim N(0,1)$.

$$P(67 \leq Y \leq 75) = P\left(\frac{67-71}{1{,}2} \leq Z \leq \frac{75-71}{1{,}2}\right) = P\left(-\frac{10}{3} \leq Z \leq \frac{10}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{10}{3}\right) - 1.$$

Buscando en la tabla, tenemos $\Phi\left(\frac{10}{3}\right) = \Phi(3{,}333) \approx 0{,}9996$.

Entonces $P(\text{Dureza aceptable}|\text{templado al agua}) = 2 \cdot 0{,}9996 - 1 = 0{,}9992$.

Como $0{,}9992 > 0{,}7933$, entonces el método de templado al agua produce mayor porcentaje de especímenes con dureza aceptable.

b) La probabilidad de que la dureza de una muestra de metal templado al aceite sea menor que 73,84 es

$$P(X \leq 73,84) = P\left(\frac{X-70}{3} \leq \frac{73,84-70}{3}\right) = P(Z \leq 1{,}28) = \Phi\,(1{,}28) = 0{,}8997$$

pues $Z = \frac{X-70}{3} \sim N(0,1)$.

Si elegimos 10 muestras al azar, W el número de muestras que tienen dureza menor a 73,84 es una variable binomial con parámetro $p = 0{,}8997$ y $n = 10$. por lo cual

$$\begin{aligned} P(W \leq 8) &= 1 - P(W = 9) - P(W = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} 0{,}8997^9 (1 - 0{,}8997) - \binom{10}{10} 0{,}8997^{10} \\ &= 10 \times 0{,}8997^9 \times (1 - 0{,}8997) - 0{,}8997^{10} \\ &= 0{,}2650 \end{aligned}$$

c) Sabemos que el lote disponible tiene 40 % de especímenes templados al agua y 60 % de especímenes templados al aceite,

- Si se selecciona un espécimen al azar, ¿cual es la probabilidad de que tenga una dureza aceptable?

$$\begin{aligned} P(\text{aceptable}) &= P(\text{aceptable}|\text{templado al aceite})P(\text{templado al aceite}) + \\ &+ P(\text{aceptable}|\text{templado al agua})P(\text{templado al agua}) \\ &= 0{,}7933 \times 0{,}6 + 0{,}9992 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}87566 \end{aligned}$$

- Si el espécimen elegido al azar resulta aceptable, calcule la probabilidad de que haya sido templado al agua.

$$\begin{aligned} P(\text{templado al agua}|\text{aceptable}) &= \frac{P(\text{aceptable}|\text{templado al agua})P(\text{templado al agua})}{P(\text{aceptable})} \\ &= \frac{0{,}9992 \times 0{,}4}{0{,}87566} \\ &= 0{,}4564 \end{aligned}$$