Probabilidad y Estadística -
Introducción a la Probabilidad y Estadística
Recuperatorio Parcial I - 2024

1)	2,a)	2,b)	2,c)	3,a)	3,b)	4,a)	4,b)

► **1.** **(3 puntos)** Tomando una determinada muestra de suelo se pueden aislar tres clases de bacterias A, B y C que se presentan en las proporciones 0,6 ; 0,3 y 0,1 respectivamente. Dado que se tiene una colonia de la clase A la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato (transformándolo en nitrito) es 0,15. Dado que se tiene una colonia de la clase B la probabilidad de que reaccione es 0,8 y para la clase C es de 0,6. Se aísla una colonia y ésta reacciona a la prueba del nitrato. Identifique a qué colonia pertenece usando como criterio asignar a aquella que tenga mayor

$$P(\text{pertenecer a una colonia determinada} \mid \text{reaccionó a la prueba del nitrato})$$

.

► **2.** **(3 puntos)** Se supone que el diámetro de un cable eléctrico es una variable aleatoria Y con función densidad

$$f(y) = \begin{cases} cy(1-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c.

b) ¿ Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea a lo sumo $\frac{1}{2}$?.

c) Calcular $P(Y \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} \leq Y \leq 1)$.

► **3.** **(2 puntos)** El tiempo necesario para terminar un examen de aprovechamiento académico tiene distribución Normal con media 150 minutos y desviación estándar 20 minutos.

a) Se seleccionan aleatoriamente tres alumnos. ¿ Cuál es la probabilidad de que los tres demoren menos de 165 minutos?.

b) Si se desea dar el tiempo suficiente para que lo terminen el 80 % de los examinados. ¿Cuando debe darse por concluido el examen?. Hint: Buscamos el valor de t tal que:

$$P(X \leq t) = 0{,}80$$

► **4.** **(2 puntos)** Supóngase que X e Y son variables aleatorias independientes con:

$$E(X) = 10,\ E(Y) = 20,\ V(X) = 5,\ V(Y) = 16.$$

Considere $Z = bX + Y$

a) ¿Qué valor le debe asignar a b para obtener E(Z) = 0 ?

b) Calcular la desviación estándar de Z con el valor asignado a b en la parte **a)**.

Ejercicio 1

- Para resolver este problema, vamos a utilizar el teorema de Bayes. Este teorema nos permite calcular la probabilidad de que una colonia pertenezca a una de las clases A, B o C, dado que ha reaccionado a la prueba del nitrato.

  Definiciones: - A, B, C: son las clases de bacterias.

  - R: evento de que la colonia haya reaccionado a la prueba del nitrato.

  Las probabilidades que nos dan son: - $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}1$.

  - $P(R \mid A) = 0{,}15$: probabilidad de que la colonia A reaccione.

  - $P(R \mid B) = 0{,}8$: probabilidad de que la colonia B reaccione.

  - $P(R \mid C) = 0{,}6$: probabilidad de que la colonia C reaccione.

  Queremos calcular:
  $$P(A \mid R), \quad P(B \mid R), \quad P(C \mid R)$$

  y luego asignar la colonia a la que tenga la mayor probabilidad.

  Paso 1: Aplicar el teorema de Bayes

  El teorema de Bayes nos dice que:

  $$P(A \mid R) = \frac{P(R \mid A) \cdot P(A)}{P(R)}$$

  donde $P(R)$ es la probabilidad total de que la colonia reaccione a la prueba del nitrato, que se puede calcular como:
  $$P(R) = P(R \mid A) \cdot P(A) + P(R \mid B) \cdot P(B) + P(R \mid C) \cdot P(C)$$

  Paso 2: Calcular $P(R)$

  Sustituyendo los valores dados:

  $$P(R) = (0{,}15 \cdot 0{,}6) + (0{,}8 \cdot 0{,}3) + (0{,}6 \cdot 0{,}1)$$

  $$P(R) = 0{,}09 + 0{,}24 + 0{,}06 = 0{,}39$$

  Paso 3: Calcular las probabilidades condicionales

  Ahora calculamos las probabilidades condicionales utilizando el teorema de Bayes:

  1. Para A:
  $$P(A \mid R) = \frac{P(R \mid A) \cdot P(A)}{P(R)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}6}{0{,}39} = \frac{0{,}09}{0{,}39} \approx 0{,}2308$$

  2. Para B:
  $$P(B \mid R) = \frac{P(R \mid B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}3}{0{,}39} = \frac{0{,}24}{0{,}39} \approx 0{,}6154$$

  3. Para C:
  $$P(C \mid R) = \frac{P(R \mid C) \cdot P(C)}{P(R)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}39} = \frac{0{,}06}{0{,}39} \approx 0{,}1538$$

  Paso 4: Conclusión

  De las probabilidades calculadas: - $P(A \mid R) \approx 0{,}2308$ - $P(B \mid R) \approx 0{,}6154$ - $P(C \mid R) \approx 0{,}1538$

  La mayor probabilidad es $P(B \mid R) \approx 0{,}6154$, por lo que, dado que la colonia reaccionó a la prueba del nitrato, es más probable que pertenezca a la clase B.

Ejercicio 2

- Vamos a resolver paso a paso cada parte del problema.

  Parte (a): Determinar el valor de c

  La función de densidad de probabilidad $f(y)$ está definida en el intervalo $[0,1]$ como:

$$f(y) = \begin{cases} cy(1-y), & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

  Para que $f(y)$ sea una función de densidad de probabilidad válida, debe cumplir con la propiedad de que la integral de $f(y)$ sobre su dominio (en este caso, $[0,1]$) debe ser igual a 1. Es decir:

$$\int_0^1 f(y)\, dy = 1$$

  Sustituyendo la expresión de $f(y)$:

$$\int_0^1 cy(1-y)\, dy = 1$$

  Vamos a resolver la integral definida en $[a,b]$ así nos sirve para todos los otros ejercicios

$$\int_a^b y(1-y)\, dy = \int_a^b (y-y^2)\, dy$$

  Calculando las integrales de cada término:

$$\int_a^b y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b y^2\, dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

  Por lo tanto

$$\int_a^b y(1-y)\, dy = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$$

  Volviendo al problema de calcular el valor de c

$$\int_0^1 y(1-y)\, dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

  Entonces, la ecuación para c es:

$$c \cdot \frac{1}{6} = 1$$

  Despejando c:

$$c = 6$$

  Por lo tanto, el valor de c es 6.

  Parte (b): ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea a lo sumo $\frac{1}{2}$?

  La probabilidad de que Y sea a lo sumo $\frac{1}{2}$ es:

$$P(Y \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} 6y(1-y)\, dy = 6[\frac{0{,}5^2}{2} - \frac{0^2}{2} - \frac{0{,}5^3}{3} + \frac{0^3}{3}]$$

  Entonces:

$$P(Y \leq \frac{1}{2}) = 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = 6 \cdot \frac{3}{24} = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

  Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{3}{4}$.

  Parte (c): Calcular $P(Y \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq Y \leq 1)$

La probabilidad condicional se define como:

$$P(Y \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq Y \leq 1) = \frac{P(Y \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} \leq Y \leq 1)}{P(\frac{1}{3} \leq Y \leq 1)}$$

La probabilidad $P(Y \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} \leq Y \leq 1)$ es simplemente la probabilidad de que Y esté en el intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, es decir:

$$\begin{aligned}
P\left(Y \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} \leq Y \leq 1\right) &= P\left(\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{1}{2}\right) \\
&= \int_{1/3}^{1/2} 6y(1-y)\, dy \\
&= 6\left(\frac{(1/2)^2}{2} - \frac{(1/3)^2}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/3)^3}{3}\right) \\
&= 0{,}2407
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos $P\left(\frac{1}{3} \leq Y \leq 1\right)$:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{3} \leq Y \leq 1\right) &= \int_{1/3}^{1} 6y(1-y)\, dy \\
&= 6\left(\frac{1^2}{2} - \frac{(1/3)^2}{2} - \frac{1^3}{3} + \frac{(1/3)^3}{3}\right) \\
&= 6 \cdot 0{,}1284 \\
&= 0{,}7407
\end{aligned}$$

Después, dividimos ambas probabilidades para obtener la probabilidad condicional.

$$P\left(Y \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq Y \leq 1\right) = \frac{P(Y \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} \leq Y \leq 1)}{P(\frac{1}{3} \leq Y \leq 1)} = \frac{0{,}2407}{0{,}7407} = 0{,}3249$$

Ejercicio 3

- Datos proporcionados:

  - El tiempo necesario para terminar el examen tiene distribución Normal con media $\mu = 150$ minutos y desviación estándar $\sigma = 20$ minutos.

  - La variable aleatoria X representa el tiempo que un alumno tarda en completar el examen: $X \sim N(150, 20^2)$.

  Vamos a resolver cada parte del problema paso a paso.

  —

  Parte (a): Probabilidad de que los tres alumnos demoren menos de 165 minutos

  Para este problema, primero se tiene que calcular la probabilidad de que un alumno demore menos de 165 minutos. Luego, debido a que los tiempos de los tres alumnos son independientes, la probabilidad de que los tres alumnos demoren menos de 165 minutos será el producto de las probabilidades individuales.

  Paso 1: Calcular la probabilidad de que un alumno demore menos de 165 minutos

  Sabemos que $X \sim N(150, 20^2)$, por lo que debemos estandarizar la variable X usando la fórmula para la distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 150}{20}$$

  Ahora, queremos calcular la probabilidad $P(X \leq 165)$, lo que se puede escribir como:

$$P(X \leq 165) = P\left(Z \leq \frac{165 - 150}{20}\right) = P\left(Z \leq \frac{15}{20}\right) = P(Z \leq 0{,}75)$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar (o una calculadora) para encontrar $P(Z \leq 0{,}75)$. Buscando el valor en la tabla:

$$P(Z \leq 0{,}75) \approx 0{,}7734$$

Entonces, la probabilidad de que un alumno demore menos de 165 minutos es $P(X \leq 165) \approx 0{,}7734$.

Paso 2: Calcular la probabilidad de que los tres alumnos demoren menos de 165 minutos

Dado que los tres alumnos son seleccionados de forma independiente, la probabilidad de que los tres demoren menos de 165 minutos es el producto de las probabilidades individuales:

$$\begin{aligned} P(\text{los tres alumnos demoran menos de 165 minutos}) &= P(X_1 \leq 165) \cdot P(X_2 \leq 165) \cdot P(X_3 \leq 165) \\ &= (0{,}7734)^3 \approx 0{,}463 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que los tres alumnos demoren menos de 165 minutos es aproximadamente **0.463**.

—

Parte (b): Determinar el tiempo suficiente para que el 80 % de los alumnos terminen el examen

En este caso, necesitamos encontrar el tiempo t tal que el 80 % de los alumnos terminen el examen dentro de ese tiempo. Es decir, buscamos el valor de t tal que:

$$P(X \leq t) = 0{,}80$$

Para resolver esto, utilizamos la distribución normal estándar y buscamos el valor z correspondiente al cuantil del 80 % en la tabla de la distribución normal estándar, es decir, el valor de z tal que:

$$P(Z \leq z) = 0{,}80$$

Consultando la tabla de la distribución normal estándar, encontramos que el valor z correspondiente a una probabilidad acumulada de 0.80 es aproximadamente $z = 0{,}8416$.

- Paso 1: Despejar t usando la relación entre Z y X

Sabemos que la relación entre la variable Z estándar y la variable X original es:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sustituyendo el valor de $z = 0{,}8416$, la media $\mu = 150$, y la desviación estándar $\sigma = 20$, tenemos:

$$0{,}8416 = \frac{t - 150}{20}$$

Paso 2: Resolver para t

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 20:

$$0{,}8416 \times 20 = t - 150$$

$$16{,}832 = t - 150$$

Finalmente, sumamos 150 a ambos lados para obtener t:

$$t = 150 + 16{,}832 = 166{,}832$$

Por lo tanto, el tiempo suficiente para que el 80 % de los alumnos terminen el examen es aproximadamente **166.83 minutos**.

Ejercicio 4

Datos dados:

- $E(X) = 10$, $E(Y) = 20$ - $V(X) = 5$, $V(Y) = 16$ - $Z = bX + Y$, con b una constante que necesitamos determinar.

—

Parte (a): Determinar el valor de b para que $E(Z) = 0$

Sabemos que la esperanza de una combinación lineal de variables aleatorias se calcula como:

$$E(Z) = E(bX + Y)$$

Utilizando la propiedad de la esperanza de una combinación lineal:

$$E(Z) = bE(X) + E(Y)$$

Sustituyendo los valores de $E(X)$ y $E(Y)$:

$$E(Z) = b \cdot 10 + 20$$

Queremos que $E(Z) = 0$, por lo que:

$$b \cdot 10 + 20 = 0$$

Despejando b:

$$b \cdot 10 = -20$$

$$b = -\frac{20}{10} = -2$$

Por lo tanto, el valor que debe tomar b para que $E(Z) = 0$ es $b = -2$.

—

Parte (b): Calcular la desviación estándar de Z con $b = -2$

La varianza de una combinación lineal de variables aleatorias independientes se calcula como:

$$V(Z) = V(bX + Y)$$

Utilizando la propiedad de la varianza para combinaciones lineales de variables aleatorias independientes, tenemos:

$$V(Z) = b^2 V(X) + V(Y)$$

Sustituyendo los valores de $b = -2$, $V(X) = 5$ y $V(Y) = 16$:

$$V(Z) = (-2)^2 \cdot 5 + 16$$

$$V(Z) = 4 \cdot 5 + 16 = 20 + 16 = 36$$

Ahora, la desviación estándar de Z es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{36} = 6$$

Por lo tanto, la desviación estándar de Z es **6**.