

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA -  
INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1	2	3	4	Total

Apellido y Nombre:

Carrera:

Justifique claramente todas sus respuestas.

Comisión:

**Ejercicio 1 (25 pts).**

Se desea realizar una obra donde ciertas líneas telefónicas sean subterráneas. Para su realización una compañía telefónica requiere que más del 75 % de estos clientes estén a favor de dicha obra, pues se efectuará con un cargo adicional en sus cuentas. De una muestra aleatoria de 200 personas resultaron 162 a favor de dicha obra. Considerando  $p$  la proporción verdadera de clientes a favor de dicha obra, entonces

- a) Dar un intervalo de confianza del 95 % para  $p$ .
- b) Determinar el menor tamaño de muestra necesario que deben seleccionarse para conseguir un intervalo de confianza de longitud a lo sumo 0.05 y de nivel de confianza 0.95, independientemente del valor de  $\hat{p}$ .

**Ejercicio 2 (25 pts).**

Se efectuaron 21 observaciones de resistencia a la fractura de placas base de 18% de acero maragizado al níquel obteniéndose un promedio y desviación estándar muestral de  $\bar{x} = 77,53$  y  $s_{n-1} = 5,07$  respectivamente. Suponga que la resistencia esta normalmente distribuida.

- a) Dar la estimación por máxima verosimilitud para:
  - i) la resistencia media de las placas ( $\mu$ ) y el desvío estándar poblacional ( $\sigma$ ), para estas placas.
  - ii) El percentil 30 para la variable resistencia a la fractura de placas base de 18% de acero maragizado al níquel.
- b) Calcule un intervalo de confianza de 99% para la media poblacional ( $\mu$ ) de la distribución de resistencia a la fractura.
- c) Suponga ahora que el desvío poblacional es conocido con  $\sigma = 5$ . Para las siguientes hipótesis

$$H_0 : \mu = 80 \quad , \quad H_a : \mu < 80$$

- i) dar el estadístico de prueba y su distribución bajo  $H_0$ .
- ii) definir la región de rechazo de nivel  $\alpha = 0,05$  y tomar una decisión concluyendo en el contexto del problema.

**Ejercicio 3 (25 pts).**

Un ingeniero mide la cantidad (por peso) de cierto contaminante en muestras de aire recogidas sobre la chimenea de una central de energía eléctrica, que funciona con carbón. Sea  $X$  la cantidad de contaminante obtenido cuando no está en funcionamiento el dispositivo de limpieza en la chimenea e  $Y$  la cantidad de contaminante por muestra recogida cuando el dispositivo de limpieza esta trabajando. Considere la siguiente función de  $(X, Y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} k & , \text{ si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \text{ y } 2y \leq x \\ 0 & , \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es el valor de  $k$  que hace que  $f$  sea función densidad conjunta de  $(X, Y)$ ?
- b) Calcular  $P(Y \geq X/3)$ .

17 de noviembre de 2022

PARCIAL 2 - TEMA B

FaMAF-UNC

- c) Hallar las funciones de densidad marginal de  $X$  e  $Y$ . ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.
- d) Hallar la covarianza entre  $X$  e  $Y$  ( $cov(X, Y)$ ).

**Ejercicio 4** (25 pts).

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) una muestra aleatoria con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , cuya función densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

- a) Hallar los Estimadores por el Método de los Momentos y de Máxima Verosimilitud para  $\theta = 1/\lambda$ .
- b) Considere los siguientes estimadores para  $\theta = 1/\lambda$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 2X_n}{2}$$

¿Cuáles de estos estimadores son insesgados para  $\theta$ ? Justifique su respuesta.