Probabilidad y Estadística -
Introducción a la Probabilidad y Estadística
Parcial II - 2024

1,a)	1,b)	2,a)	2,b)	2,c)	3)	4,a)	4,b)	4,c)

Nombre y apellido:

Carrera:

▶ **1.** **(2 puntos)** Una báscula eléctrica dá una lectura igual al peso real más un error aleatorio que se distribuye normalmente con media 0 y desviación estándar $\sigma = 0{,}1$ mg. Suponga que los resultados de cinco pesajes sucesivos del mismo objeto dan como resultado una **media muestral observada** $\bar{x}$

$$\bar{x} = \ 3{,}1502\,\mathrm{mg}$$

a) Determine una estimación del intervalo de confianza del 95 % del peso real.

b) Suponga que la varianza no es conocida al iniciar el experimento, determine una estimación del intervalo de confianza del 95 % del peso real sabiendo que la **desviación estándar muestral observada** s es

$$s = \sqrt{0{,}0000847} \approx 0{,}0092\,\mathrm{mg}$$

▶ **2.** ea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{(\delta y + 1)}{2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $\delta \in [-1, 1]$.

a) Encuentre la esperanza de $\bar{Y}$, la media muestral.

b) Demuestre que la media muestral $\bar{Y}$ no es un estimador insesgado de δ.

c) Encuentre un estimador insesgado basado en $\bar{Y}$ y calcule su varianza.

▶ **3.** **(2 puntos)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de la distribución de Pareto con parámetro β Si la esperanza y varianza de esta distribución son

$$\mu = \frac{\beta}{\beta - 1}, \quad \sigma^2 = \frac{\beta}{(\beta - 1)^2(\beta - 2)}.$$

Encuentre un estimador de momentos de β

▶ **4.** **(3 puntos)** Históricamente una planta química industrial produce 1100 libras por día de un producto químico. Los registros del año pasado, basados en 260 días de trabajo, muestran los siguientes valores muestrales

$$\bar{y} = 1060 \text{ libras por día} \qquad s = 340 \text{ libras por día}$$

Se desea probar si el promedio de la producción bajó significativamente en el año pasado.
a) Establezca las hipótesis nula y alternativa apropiadas
b) Describa el estadístico de prueba, su distribución y determine la región de rechazo para $\alpha = 0{,}05$.
c) ¿Presentan los datos evidencia suficiente de que bajó la producción diaria promedio?

Resolución ejercicio 1

Vamos a resolver cada parte del problema paso a paso:

- Datos proporcionados:

  - Los resultados de los cinco pesajes sucesivos del mismo objeto son: $3{,}142, 3{,}163, 3{,}155, 3{,}150, 3{,}141$.

- Calcular la **media muestral** $\bar{x}$ y la **desviación estándar muestral** s

$$\bar{x} = \ 3{,}1502\,\mathrm{mg}$$

$$s = \sqrt{0{,}0000847} \approx 0{,}0092\,\mathrm{mg}$$

(a) Estimación del intervalo de confianza del 95 % para el peso real suponiendo que la varianza es conocida.

Cuando la varianza es conocida, utilizamos la fórmula del intervalo de confianza para la media de una distribución normal:

$$IC = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde: - $\bar{x} = 3{,}1502$ es la media muestral,

- $\sigma = 0{,}1$ mg es la desviación estándar conocida,

- $n = 5$ es el tamaño de la muestra,

- $Z_{\alpha/2}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar para un intervalo de confianza del 95

Para un intervalo de confianza del 95 %, el valor crítico $Z_{\alpha/2}$ es aproximadamente **1.96**.

Sustituyendo en la fórmula:

$$IC = 3{,}1502 \pm 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{5}} = 3{,}1502 \pm 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{2{,}236} = 3{,}1502 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0447$$

Calculamos:

$$IC = 3{,}1502 \pm 0{,}0876$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95 % para el peso real es:

$$IC = [3{,}0626, 3{,}2378]\,\mathrm{mg}$$

(b) Estimación del intervalo de confianza del 95 % para el peso real suponiendo que la varianza no es conocida.

Cuando la varianza no es conocida, utilizamos la distribución t de Student en lugar de la distribución normal estándar. El intervalo de confianza se calcula de la siguiente manera:

$$IC = \bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Donde: - $\bar{x} = 3{,}1502$ es la media muestral,

- $s = 0{,}0092$ mg es la desviación estándar muestral,

- $n = 5$ es el tamaño de la muestra,

- $t_{\alpha/2,n-1}$ es el valor crítico de la distribución t de Student para un intervalo de confianza del 95

El valor crítico $t_{0{,}025{,}4}$ para un intervalo de confianza del 95 % con 4 grados de libertad es aproximadamente **2.7765**.

Sustituyendo en la fórmula:

$$IC = 3{,}1502 \pm 2{,}7765 \cdot \frac{0{,}0092}{\sqrt{5}} = 3{,}1502 \pm 2{,}7765 \cdot \frac{0{,}0092}{2{,}236} = 3{,}1502 \pm 2{,}776 \cdot 0{,}0041$$

Calculamos:

$$IC = 3{,}1502 \pm 0{,}0114$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95 % para el peso real es:

$$IC = [3{,}1388, 3{,}1616]\,\mathrm{mg}$$

- Resumen de los resultados:

  - **Parte (a):** Si la varianza es conocida ($\sigma = 0{,}1$ mg), el intervalo de confianza del 95 % para el peso real es $[3{,}0626, 3{,}2378]$ mg.

  - **Parte (b):** Si la varianza no es conocida, el intervalo de confianza del 95 % para el peso real es $[3{,}1388, 3{,}1616]$ mg.

Resolución ejercicio 2

Vamos a resolver el problema paso a paso. Primero, repasemos los datos que tenemos:

- Tenemos una muestra aleatoria de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ con función de densidad $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{\delta y + 1}{2} \quad \text{para} \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \delta \in [-1, 1].$$

Y fuera del intervalo $[-1, 1]$, la densidad es cero.

Denotamos por $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ la media muestral.

(a) Encontrar la esperanza de $\bar{Y}$

Paso 1: Calcular la esperanza de Y

La esperanza de una variable aleatoria Y con función de densidad $f_Y(y)$ es:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$

En este caso, la función de densidad está definida solo en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que la integral se reduce a:

$$E(Y) = \int_{-1}^{1} y \cdot \frac{\delta y + 1}{2}\, dy$$

Desarrollamos la integral:

$$E(Y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y(\delta y + 1)\, dy$$

$$E(Y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\delta y^2 + y)\, dy$$

Ahora calculamos las integrales por separado:

1. $\int_{-1}^{1} \delta y^2\, dy = \delta \int_{-1}^{1} y^2\, dy = \delta \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \delta \cdot \frac{2}{3}$

2. $\int_{-1}^{1} y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$

Por lo tanto:

$$E(Y) = \frac{1}{2}\left(\delta \cdot \frac{2}{3} + 0\right) = \frac{\delta}{3}$$

Paso 2: Calcular la esperanza de $\bar{Y}$

La esperanza de $\bar{Y}$ es simplemente la esperanza de la media muestral. Como la muestra es aleatoria y todos los Y_i son identicamente distribuidos (i.i.d.), tenemos:

$$E(\bar{Y}) = E(Y)$$

Por lo tanto:

$$E(\bar{Y}) = \frac{\delta}{3}$$

(b) Demostrar que $\bar{Y}$ no es un estimador insesgado de δ

Un estimador es insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$, donde $\hat{\theta}$ es el estimador y θ es el parámetro que estamos estimando.

En este caso, el estimador $\bar{Y}$ es utilizado para estimar δ. Sin embargo, ya hemos encontrado que:

$$E(\bar{Y}) = \frac{\delta}{3}$$

Esto implica que $E(\bar{Y}) \neq \delta$, salvo para $\delta = 0$.

Por lo tanto, $\bar{Y}$ **no es un estimador insesgado de** δ.

(c) Encontrar un estimador insesgado para δ y calcular su varianza

Dado que $E(\bar{Y}) = \frac{\delta}{3}$, podemos construir un estimador insesgado de δ multiplicando $\bar{Y}$ por 3. Es decir, el estimador insesgado para δ es:

$$\hat{\delta} = 3\bar{Y}$$

Paso 1: Verificar que $\hat{\delta}$ es insesgado

La esperanza de $\hat{\delta}$ es:

$$E(\hat{\delta}) = E(3\bar{Y}) = 3E(\bar{Y}) = 3 \cdot \frac{\delta}{3} = \delta$$

Por lo tanto, $\hat{\delta} = 3\bar{Y}$ es un estimador insesgado de δ.

Paso 2: Calcular la varianza de $\hat{\delta}$

La varianza de $\hat{\delta}$ es:

$$V(\hat{\delta}) = V(3\bar{Y}) = 9V(\bar{Y})$$

Sabemos que:

$$V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{n}$$

Donde $V(Y)$ es la varianza de la variable Y. La varianza de Y se calcula como:

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

Ya sabemos que $E(Y) = \frac{\delta}{3}$, y ahora vamos a calcular $E(Y^2)$.

Paso 3: Calcular $E(Y^2)$

$$E(Y^2) = \int_{-1}^{1} y^2 \cdot \frac{\delta y + 1}{2}\, dy$$
$$E(Y^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2(\delta y + 1)\, dy = \frac{1}{2}\left(\delta \int_{-1}^{1} y^3\, dy + \int_{-1}^{1} y^2\, dy\right)$$

Tenemos que $\int_{-1}^{1} y^3\, dy = 0$ y $\int_{-1}^{1} y^2\, dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

Por lo tanto:

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Paso 4: Calcular la varianza de Y

Ahora que tenemos $E(Y) = \frac{\delta}{3}$ y $E(Y^2) = \frac{1}{3}$, podemos calcular la varianza de Y:

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{\delta}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{\delta^2}{9}$$

Paso 5: Calcular la varianza de $\hat{\delta}$

Ahora que tenemos la varianza de Y, la varianza de $\bar{Y}$ es:

$$V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{1}{3n} - \frac{\delta^2}{9n}$$

Finalmente, la varianza de $\hat{\delta} = 3\bar{Y}$ es:

$$V(\hat{\delta}) = 9V(\bar{Y}) = 9\left(\frac{1}{3n} - \frac{\delta^2}{9n}\right)$$
$$V(\hat{\delta}) = \frac{3}{n} - \frac{\delta^2}{n}$$

Por lo tanto, la varianza de $\hat{\delta}$ es:

$$V(\hat{\delta}) = \frac{3 - \delta^2}{n}$$

Resumen de respuestas:

a) La esperanza de $\bar{Y}$ es $E(\bar{Y}) = \frac{\delta}{3}$.

b) $\bar{Y}$ no es un estimador insesgado de δ, ya que $E(\bar{Y}) \neq \delta$.

c) El estimador insesgado de δ es $\hat{\delta} = 3\bar{Y}$, y su varianza es $V(\hat{\delta}) = \frac{3-\delta^2}{n}$.

Resolución ejercicio 3

En esta situación tenemos un solo parámetro β . Por lo cual, para encontrar el estimador de momentos $\hat{\beta}$ trabajamos con el primer momento

$$\mu = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

Despues resolvemos para β como función de μ

$$\beta = g(\mu) = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

Por lo cual el estimador del método de los momentos de β se obtiene remplanzando la media poblacional μ por la media muestral $\bar{X}$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - 1}$$

Resolución ejercicio 4

El z-test se aplica cuando tenemos una muestra grande pues aplicamos el TCL y el teorema de Slutzky. Dado que el tamaño de la muestra ($n = 260$) es grande, podemos usar el z-test para la media.

(a)

$$H_0 : \mu = 1100$$

$$H_a : \mu < 1100$$

(b) Estadístico de prueba, distribución y región de rechazo

Para realizar el z-test, utilizamos la fórmula del estadístico z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donde:

- $\bar{x}$ es la media muestral (1060 libras por día). - μ_0 es la media bajo la hipótesis nula (1100 libras por día). - σ es la desviación estándar de la población (en este caso, usaremos la desviación estándar muestral $s = 340$ libras por día, ya que no se nos da la desviación estándar de la población). - n es el tamaño de la muestra (260).

Sustituyendo los valores conocidos:

$$z = \frac{1060 - 1100}{\frac{340}{\sqrt{260}}} = -1{,}897$$

El estadístico z sigue una distribución normal estándar $N(0, 1)$. Dado que estamos realizando una prueba de una cola en el lado inferior (porque la hipótesis alternativa es $\mu < 1100$), y nuestro nivel de significancia es $\alpha = 0{,}05$, el valor crítico de z se obtiene de la tabla de la distribución normal estándar para un área acumulada de 0.05.

El valor crítico z_α para $\alpha = 0{,}05$ es aproximadamente:

$$z_\alpha = 1{,}645$$

Por lo tanto, la región de rechazo es:

$$z < -z_\alpha = -1{,}645$$

(c) Ahora, comparamos el valor calculado de z con el valor crítico:

- El valor calculado de z es $-1{,}897$.

- El valor crítico es $-1{,}645$.

Dado que $-1{,}897$ es menor que $-1{,}645$, rechazamos la hipótesis nula, esto significa que, con un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, hay suficiente evidencia para concluir que la producción diaria promedio ha disminuido respecto al año pasado.