Probabilidad y Estadística

Profesorados y Licenciatura en Cs. de la Computación (2006)

Tercer parcial

Apellido y Nombre:

Carrera que cursa:

Ej. 1 Se observó el contenido en grasa (en porcentaje) de 10 hamburguesas, obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 21.90$ y una desviación estándar muestral $s = 4.134$

Se supone que el contenido en grasa está normalmente distribuido.

a) Estime la media poblacional y el desvío estándar poblacional del contenido de grasa, usando los estimadores de máxima verosimilitud.

b) Usar los estimadores obtenidos en a) para dar una estimación del percentil 95 de la distribución del contenido de grasa.

c) Supongamos que se ha provisto un IC estimado para esos datos y lo único que se sabe es que la longitud es de 5.92. Con qué nivel de confianza se ha construido dicho IC?

d) Utilizando algunos de los siguientes datos

$$\chi_{0.975,9} = 2.7, \quad \chi_{0.975,10} = 3.247, \quad \chi_{0.025,9} = 19.022 \quad \chi_{0.025,10} = 20.483$$

estime un IC con nivel de confianza 0.95 para la varianza poblacional σ^2 en base a los valores observados.

Ej. 2 En una manufactura textil se producen alfombras tejidas cuyo peso medio es de 8 kg. Para testear el peso medio de las alfombras tejidas de pura lana, se eligió una muestra aleatoria de la producción de 64 alfombras, observándose que la desviación estándar muestral era de $s = 0.1kg$

Se quiere saber si el valor medio es significativamente distinto del peso medio anunciado.

a) Si el p-valor es igual a 0.0202, 4 ¿qué valores puede haber tomado la media muestral observada en esa muestra?

b) Estimar con un intervalo de confianza del 95% el peso medio real de las alfombras producidas. Contiene el IC estimado el valor $\mu = 8$? Obtenga ahora un IC de nivel de confianza 0.99 y responda la misma pregunta.

Ej. 3 Con un sistema tradicional de enseñanza reprobaba alrededor del 60% del estudiantado al concluir los turnos de examen. Se ha implementado un nuevo sistema de enseñanza y se desea saber si se producen mejoras respecto del sistema anterior. Para verificar esta afirmación se chequeó una muestra de 1000 alumnos elegidos al azar, de los cuales 530 desaprobaron al completarse los turnos de examen.

a) ¿Qué hipótesis plantearía?

b) Calcular el valor-p asociado a la prueba de hipótesis. ¿Qué decisión toma a un nivel de significación $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$

c) Que probabilidad de error comete al decir que la tasa de desaprobación ahora ha bajado al 50% cuando en realidad ello es falso?

Ej. 4 Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con distribución geométrica de parámetro p, $0 < p < 1$, esto es

$$P(X_1 = x) = p(1-p)^x, x \in N \cup \{0\}.$$

Recuerde que $EX_1 = (1-p)/p$ y $V(X_1) = (1-p)/p^2$.

a) Encontrar el estimador de los momentos y el estimador de máxima verosimilitud para p.

b) Si $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ denota la media muestral, a partir del TCL sabemos que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (1-p)/p}{\sqrt{(1-p)/p^2}} \approx N(0,1) \qquad (1)$$

Mostrar la igualdad de eventos

$$\left[-z \le \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (1-p)/p}{\sqrt{(1-p)/p^2}} \le z\right] = \left[-z \le \sqrt{n}\frac{p(\bar{X}_n+1)-1}{\sqrt{1-p}} \le z\right] = \left[(p(\bar{X}_n+1)-1)^2 \le \frac{z^2}{n}(1-p)\right]$$

onde z es un número positivo.

) Deducir entonces que

$$\frac{\bar{X}_n + 1 - z^2/2n \pm \sqrt{\frac{z^4}{4n^2}}}{(\bar{X}_n+1)^2}$$

s un IC de nivel aproximado $1-\alpha$ para p si z cumple que $P(Z > z) = \alpha/2$.

) Use (1) para mostrar que un test de nivel aproximado α para el problema $H_0 : p = 1/3$ vs. $H_a : p < 1/3$ stá dado por "rechazar H_0 si $\bar{X}_n \le -z_\alpha\sqrt{\frac{6}{n}} + 2$".