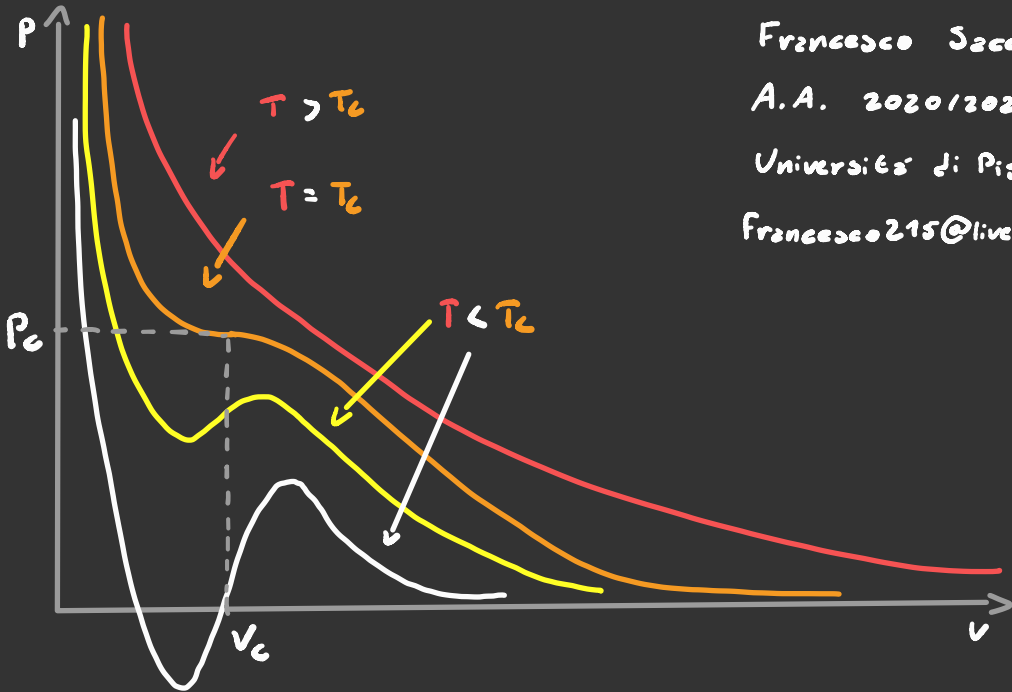
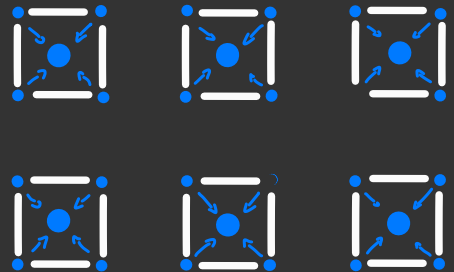
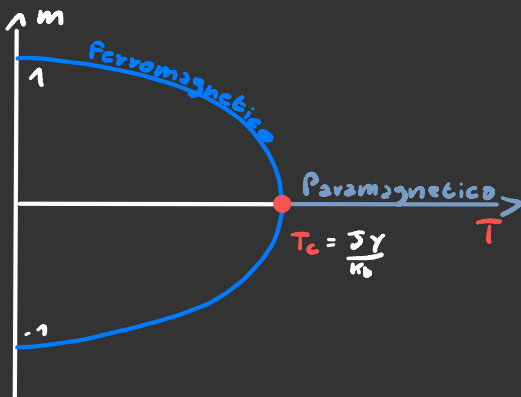


Fisica Statistica



Francesco Sacco
 A.A. 2020/2021
 Università di Pisa
 francesco215@live.it



Termodinamica

Visto che in questa materia lavoreremo con una massa di particelle cerchiamo di lavorare con delle variabili che descrivono lo stato macroscopico del sistema, ed esse possono essere

- Estensive (V, E, N, \dots)
- Intensive (T, p, μ, \dots)

È possibile passare da uno stato all'altro attraverso delle trasformazioni che possono essere

- Reversibili $\Delta S = 0$
- Inversibili N_2 scorreggia

È possibile esprimere delle variabili in termini di altre, ad esempio

$E = E(T, p, V)$. Esse sono definite come funzioni di stato.

Altre variabili come ad esempio il Lavoro W compiuto dipendono dal tipo di trasformazione fatta.

È però possibile esprimere la variazione del lavoro in termini di come variano le funzioni di stato, ad esempio $\delta W = p dV$

Affinché una variabile sia una funzione di stato è necessario che il suo differenziale sia un differenziale esatto

$$dE = -p dV + T dS + \mu dN + \dots$$

Questo perché $\int_A^B (dE, dI) = E(B) - E(A)$

Le 3+1 leggi della Termodinamica

Le 3 leggi della Termodinamica dicono che

- 0) L'equilibrio termodinamico è una proprietà transitiva
- I) Conservazione dell'energia
- II) Non è possibile estrarre il lavoro da una singola sorgente
- III) Se $T=0$ allora $S=0$ Le definizioni di T ed S vengono spiegate qui sotto

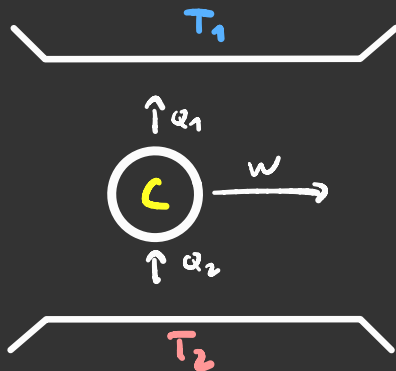
Il secondo postulato equivale a dire che non è possibile avere una macchina termica che abbia un'efficienza $\eta=1$

Supponendo di dover estrarre lavoro da due sorgenti termiche l'efficienza è definita come

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

La macchina di Carnot è definita come la macchina che ha l'efficienza massima. La variabile intensiva

da cui dipende l'efficienza della macchina di Carnot è definita **Temperatura**

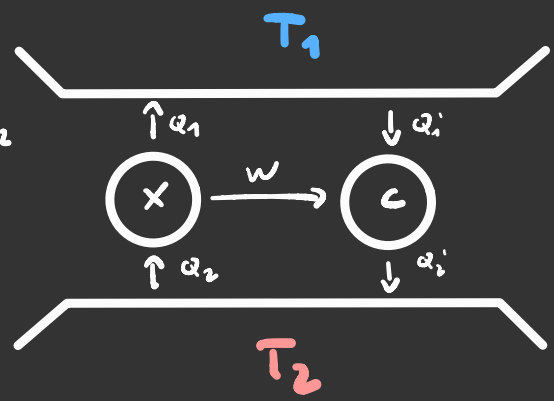


$$\eta_c = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Visto che la macchina di Carnot è quella con efficienza massima abbiamo che

$$\eta_x \leq \eta_c \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \leq \frac{T_1}{T_2}$$

Quindi: $\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2}$



Se le temperature fossero molto vicine tra di loro $T_1, T_2 \approx T$ allora anche l'efficienza $\eta \approx 0$ quindi $Q_1 = Q_2 - \delta Q$ e l'equazione di sopra si può scrivere come

$$\frac{Q_1}{T_2} \leq \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Questo è vero in un ciclo infinitesimo. Ancora dobbiamo vedere che succede in un ciclo vero e proprio

Quando avevamo scritto che $\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2}$ avevamo considerato che sia Q_1 che Q_2 siano positive. A dire il vero $Q_2 < 0$ e $Q_1 > 0$, quindi $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$. Se ci fossero ∞ e N sorgenti

In un ciclo chiuso $\rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$

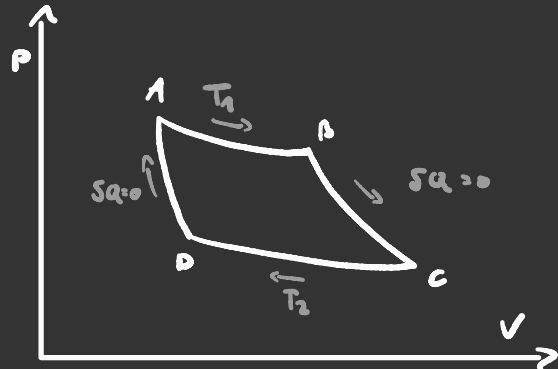
Con tanti scambi di calore infinitesimi

Entropia

Lezione II

Il ciclo di Carnot è fatto da due isoterme e due adiabatiche.

L'efficienza di una macchina di Carnot è $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$



Viso che all'interno di un ciclo di Carnot $\oint \frac{dq}{T} = 0$
possiamo dire che $\frac{dq}{T} \equiv dS$ è un differenziale esatto
e lo chiamiamo **Entropia**.

$$S(A) - S(B) = \Delta S \geq \int_B^A \frac{dq}{T}$$

Il che significa che l'entropia non può mai scendere in un
sistema termodinamico chiuso.

Aggiungere principio di Landauer

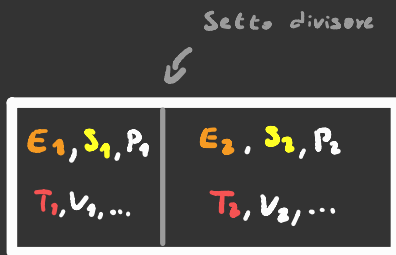
Equilibrio Termico

Adesso proviamo a fare un giochetto, risolviamo per dS

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} - \frac{q dV}{T}$$

Se mettiamo a contatto i nostri 2

sistemi mi aspetto che vadano all'equilibrio termico con delle trasformazioni irreversibili in modo da massimizzare l'entropia.



Supponiamo che il setto sia fisso e ermetico ma che non sia isolante, quindi abbiamo che

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{dE_1}{T_1} + \frac{dE_2}{T_2} = dE \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

All'equilibrio l'entropia sarà ad un massimo quindi:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

Allo stesso modo si può ottenere che la condizione di equilibrio se il setto è mobile ma isolante ed ermetico è che il volume non cambi:

$$dV = dV_1 - dV_2 = -\frac{dE_1}{P_1} + \frac{dE_2}{P_2} = dE \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1} \right) \rightarrow P_1 = P_2$$

E così via...

Energia e compresia bella

Forze generalizzate

$$dE(S, \{x_i\}, \{N_i\}) = T dS - \sum F_i dx_i + \sum \mu_i dN_i$$

Possiamo dire che $\lambda E(S, \{x_i\}, \{N_i\}) = E(\lambda S, \{\lambda x_i\}, \{\lambda N_i\})$

Quindi:

$$d\lambda E = T d\lambda S - \sum F_i d(\lambda x_i) + \sum \mu_i d(\lambda N_i)$$

questo è vero per ogni λ quindi:

$$E = TS - \sum F_i x_i + \sum \mu_i N_i$$

Ri-differenziamo questa equazione otteniamo che

$$SdT - \sum x_i dF_i + \sum N_i d\mu_i = 0$$

Mettilci le altre energie Termodinamiche

Ensemble Microcanonico

L'ensemble microcanonico ci serve per fare il salto dalla meccanica classica alla fisica statistica.

Supponiamo di avere un gas di N particelle, noi definiamo

- il **microstato** che è la posizione nello spazio delle fasi del nostro sistema $\{x_i, p_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$
- il **Macrostato** che è lo stato termodinamico del sistema

Una supposizione che si fa quando si lavora con la meccanica statistica è l'**ipotesi Ergodica**.

Ci sono diversi modi di formularla. Il modo in cui la formuliamo adesso è che:

Se prepariamo il nostro sistema in un determinato microstato $\{x_i, p_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ esso esplora tutti gli elementi dello spazio delle fasi che è in grado di esplorare

Supponiamo di avere una variabile di cui vogliamo calcolarci il valore medio

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(\{x_i(t), p_i(t)\}) dt = \\ &= \int A(\{x_i, p_i\}) p(\{x_i, p_i\}) d^{3N}x d^{3N}p \end{aligned}$$

Dove p è la densità di probabilità

Su ρ c'è il vincolo sull'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{dove } \vec{v} = \{\dot{x}_i, \dot{p}_i\}$$

↙ $F_2 = 0$ per le eq. di Ham.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \dot{x}_i + \rho \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} = \frac{d\rho}{dt}$$

Quindi: ρ non dipende dal tempo

A questo punto possiamo supporre che $\rho = \rho(E)$ che equivale a dire che tutti i microstati con la stessa energia sono equiprobabili. Inoltre ci aspettiamo che se il nostro microstato ha una certa energia $E \pm \Delta E$ allora ci resta, quindi: possiamo dire che $\rho(E') = 0$ se non sta in $(E - \Delta E, E + \Delta E)$

ri-Definisco l'entropia $S(E) = K_B \ln \Omega(E)$ dove

Volume dello spazio delle fasi con energia E

$$\Omega(E) = \int_{E \in (E - \Delta E, E + \Delta E)} dx dp$$

Per assicurarsi che questa definizione di entropia è equivalente a quella data prima bisogna assicurarsi che

• Sia estensiva

• $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N,V} = \frac{1}{T}$ Ricordati che il fatto che la Temperatura sia positiva implica il secondo principio della Termodinamica

Proprio se si comporta come un sistema, allora è un sistema

Cominciamo coll'estensività.

Se consideriamo un sistema
fatto da 2 sottosistemi
abbiamo che

$$\int_E dx dp = \int_{E_1} dx dp + \int_{E_2} dx dp$$

Quindi

$$\Omega(E) = \Omega(E_1)\Omega(E_2) \rightarrow S(E) = S(E_1) + S(E_2)$$

Adesso verificiamo che $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N,V} = \frac{1}{T}$

Chiaramente se deriviamo una funzione per una variabile ci esce
un'altra funzione, quindi basterebbe DEFINIRE $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$,
però dobbiamo assicurarci che $T > 0$.

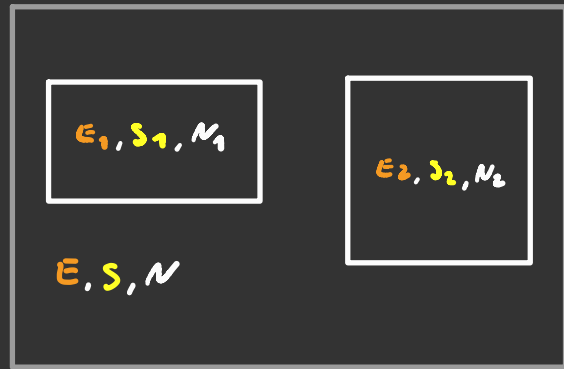
Mettiamo a contatto i due contenitori in modo che si possono
scambiare un $dE_1 = -dE_2$ di energia.

Visto che questo scambio avviene spontaneamente significa che
si è passato da uno stato meno probabile a uno più probabile.

Visto che la probabilità è proporzionale a Ω abbiamo che
l'entropia totale è aumentata

$$dS = dS_1 + dS_2 = dE_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} T_1 \geq T_2 & \text{se } dE_1 < 0 \\ T_1 \leq T_2 & \text{se } dE_1 > 0 \end{cases}$$

Questo ci dice che l'energia va da dove è più caldo a dove
è più freddo



Supponiamo che $T_1 > T_2$, e supponiamo per assurdo che

$T_1 > 0$ e $T_2 < 0$ allora.

$$dS = \overbrace{dE_1}^{<0} \left(\overbrace{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{|T_2|}}^{>0} \right) < 0 \quad \text{Assurdo}$$

Se invece sia T_1 che T_2 sono negative allora.

$$dS = \underbrace{dE_1}_{<0} \left(\underbrace{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}}_{<0} \right) > 0$$

Quindi le temperature possono essere o tutte positive o tutte negative, quindi ci basta trovare un singolo caso in cui la temperatura è positiva e abbiamo fatto.

Ad esempio si potrebbe prendere un gas perfetto e vedere che segno ha la temperatura.

Non fare i conti qui perché tanto dopo si faranno, ma comunque $T > 0$

GAS PERFETTO Lez IV

Un gas perfetto è un gas dove le particelle non interagiscono tra di loro. L'energia quindi è

$$E = \sum_i \frac{3N}{2m} p_i^2$$

Adesso per vedere quant'è l'entropia vediamo quant'è grosso il volume dello spazio delle fasi.

Quando siamo in tante dimensioni il volume dello spazio delle fasi sta tutto vicino alla superficie, quindi possiamo dire che

$$P(E) = V_S(2mE, 3N)$$

Dove $V_S(r, N)$ è il volume di una sfera con raggio r e in N dimensioni.

$$V_S(r, N) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2}+1)!} r^N$$

Nel caso $\frac{N}{2}+1$ non
sia intero si usa la
Gamma di Eulero

$$P(E) = \frac{\overbrace{2\pi^{\frac{3N}{2}}}}{\text{Volume nello spazio delle } p} \overbrace{(2mE)^{\frac{3N}{2}}}}{\text{Volume nello spazio delle } x} \frac{1}{(\frac{3N}{2}+1)!} V^{3N}$$

È possibile approssimare il fattoriale con la formula di Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^3} \mathcal{S}(E) \quad \ln P(E) &= \ln(2) + 3N \ln(2mE \sqrt{V\pi}) - \ln\left(\frac{3N}{2}+1\right)! \\ &= \ln(2) + \frac{3N}{2} \ln(2mE \sqrt{V\pi}) - \left(\frac{3N}{2}+1\right) \left[\ln\left(\frac{3N}{2}+1\right) - 1 \right] + \ln\left(\frac{3N\pi}{2}\right)^{\frac{3N}{2}} \\ &\approx \frac{3N}{2} \ln\left(V^2 \frac{9mE \sqrt{\pi}}{3N}\right) + \frac{3N}{2} \end{aligned}$$

Adesso possiamo ricavarci alcune relazioni del gas perfetto sfruttando le derivate parziali di dS

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \frac{3N}{2} \frac{k_b}{E} \rightarrow E = \frac{3N}{2} k_b T$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} = \frac{3Nk_b}{V} \rightarrow PV = 3Nk_b T$$

Paradosso di Gibbs

Supponiamo di avere all'equilibrio termico E_2 di loro, ma separate da un setto.

E_1, S_1, N_1	E_2, S_2, N_2
T, V_1, P, \dots	T, V_2, P, \dots

All'inizio l'entropia è

$$S_2 = S_1 + S_2 =$$

$$= 3N_1 \ln V_1 + 3N_2 \ln V_2 + \frac{3(N_1 + N_2)}{2} + \text{cost.}$$

Alla fine invece è

$$S_f = 3(N_1 + N_2) \ln(V_1 + V_2) + \frac{3}{2}(N_1 + N_2)$$

Quindi aprendo il setto l'entropia aumenta, in teoria questo non dovrebbe essere vero se i due gas sono uguali.

il problema qui è che noi consideriamo le particelle come se fossero distinguibili quando in realtà, in generale non lo sono. Per risolvere questo "problema" basta ridefinire

$$P(E) = \frac{1}{N!} V^N (2mE)^{3N}$$

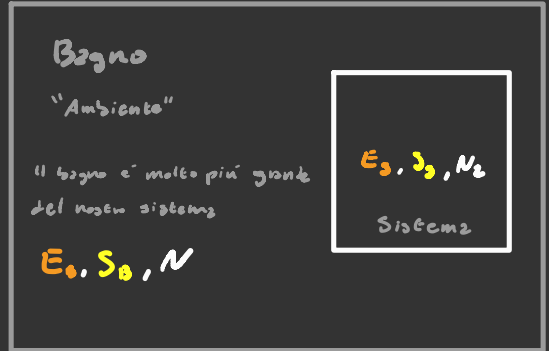
Non mi mette e fare i conti

Ensemble Canonico

Prima, quando avevamo usato l'ensemble microcanonico avevamo considerato il nostro sistema come se fosse isolato.

Se invece supponiamo che il nostro sistema sia all'equilibrio termico con un bagno a temperatura T .

Usare questa evoluzione ci permette di avere i conti più facili rispetto al microcanonico.



La prima cosa da calcolare è $P_S(\{x_i, p_i\})$

Supponiamo che "l'Universo" che è il Bagno + Sistema sia isolato.

L'entropia del bagno è

$$S_B(E - E_S) = S_B(E) - E_S \frac{\partial S_B(E_S)}{\partial E_B} = S_B(E) - \frac{E_S}{T}$$

Quindi

$$P_B(E_B) = e^{-\frac{S_B(E)}{k_B}} e^{-\frac{E_S}{k_B T}}$$

Avevamo visto prima che ogni stato è equiprobabile, quindi

La costante di proporzionalità $P_S \propto \frac{1}{\Omega_S} = \frac{P_B}{\Omega_B} \propto P_B \leftarrow \Omega_S \Omega_B = \Omega$
si ottiene normalizzando

quindi

$$P_S(E_S) \propto e^{-\frac{E_S}{k_B T}}$$

Funzione di partizione Lezione V

A noi adesso ci tocca normalizzare la densità di stati.

Intanto riscriviamola in forma un po' più carina

$$P(\{x_i, p_i\}) = \frac{e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})}}{\mathcal{Z}} \quad \beta \equiv 1/k_B T$$

La normalizzazione \mathcal{Z} è detta anche funzione di partizione e dopo vedremo che è estremamente importante.

$$\mathcal{Z} = \iint e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p}$$

Il valor medio di un operatore \hat{O}

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \iint O(\{x_i, p_i\}) e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p}$$

È possibile scrivere alcuni valor medi in termini di \mathcal{Z} , ad esempio

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \iint H(\{x_i, p_i\}) e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} =$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{Z}} \iint \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}$$

Adesso $\frac{\partial}{\partial \beta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{T} = -k_B T \frac{\partial}{\partial T}$, quindi

$$E = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \mathcal{Z} = T \frac{\partial}{\partial T} k_B T \ln \mathcal{Z} - k_B T \ln \mathcal{Z}$$

Adesso definisco $F \equiv -k_B T \ln \mathcal{Z}$ e ottengo che

$$E = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$$

Questo significa che E è la trasformata di Legendre rispetto alla Temperatura di F , ma allora F è l'energia libera di Helmholtz. ← Controlla

Questa è una cosa molto buona! Noi con l'energia libera possiamo calcolarci qualunque funzione termo dinamica!

Fluttuazioni

Non scordiamoci che stiamo lavorando con l'ensemble canonico, e che quindi il nostro sistema è a contatto con un bagno termico, quindi anche se sono all'equilibrio ci aspettiamo che i due si scambino piccole quantità di energia facendo fluttuare le variabili termodinamiche. Ora il punto è capire QUANTO. La Varianza di un operatore O non è altro che

$$(\Delta O)^2 = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2$$

Ad esempio

$$(\Delta E)^2 = k_B T^2 \frac{\partial U}{\partial T} = k_B T^2 C_V$$

↙ Capacità termica a volume costante

$C_V \propto N$, quindi le fluttuazioni crescono all'aumentare delle particelle, ma visto che $E \propto N$ $\Delta E/E \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$

Ensemble Grandcanonico

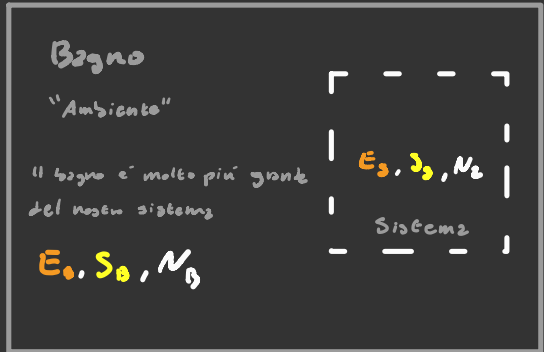
Lezione VI

L'ensemble grandcanonico è "l'estensione" dell'ensemble canonico.

Prima avevamo considerato che il nostro sistema poteva scambiare solo l'energia con il bagno. L'ensemble grandcanonico permette al sistema di scambiare sia l'energia che particelle.

Sotto un certo punto di vista il nostro sistema è soltanto un pezzo di spazio senza muri che sta dentro al bagno termico.

Per la trattazione Bagno + sistema uso la formulazione canonica



Per la trattazione Bagno + sistema uso la formulazione canonica

$$Z_{B+S}(\mu, T, N) = \frac{1}{N!} \int e^{-\beta H_{B+S}(x, p; \beta)} \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N dp_i$$

Questo termine rappresenta l'integrazione tra le particelle di B e di S e possiamo trascurarlo

dove $H_{B+S} \approx H_S(x, p; \beta, N_S) + H_B(x, p; \beta, N_B) + \dots$

Adesso però le Hamiltoniane non sono più simmetriche per ogni scambio di particelle, quindi non ci va $1/N!$

Però si possono tranquillamente scambiare le particelle di S tra di loro e quelle di B tra di loro, quindi ci va $\frac{1}{N_S! N_B!}$

$$Z_{S+B} = \left[\frac{1}{N_S!} \int e^{-\beta H_S(\{X_i, P_i, N_S\})} d^3N_S d^3P \right] \left[\frac{1}{N_B!} \int e^{-\beta H_B(\{X_i, P_i, N_B\})} d^3N_B d^3P \right]$$

Definiamo $Z_i = \frac{1}{N_i!} \int e^{-\beta H_i(\{X_i, P_i, N_i\})} d^3N_i d^3P$

Però qui ho trascurato il fatto che i due sistemi possono scambiarsi particelle, quindi devo sommare su tutti i possibili valori di N_S , quindi

$$Z_{S+B} = \sum_{N_S=0}^N Z_S Z_B$$

Visto che ci interessa descrivere soltanto il sistema per calcolarci la densità di stati bisogna sommare sui gradi di libertà del Bagno.

$$P_S(\{X_i, p_i, N_S\}) = \frac{1}{N_S!} e^{-\beta H_S(\{X_i, P_i, N_S\})} \frac{Z_B}{Z_{S+B}}$$

Quindi è già normalizzata ↙

Visto che $F = -k_B T \ln Z$, Allora

$$\frac{Z_B}{Z} = \exp\{\beta[F(V, T, N) - F_0(V_0, T, N_0)]\} = \exp[-\beta(PV_0 - \mu N_S)]$$

Facendo la sostituzione otteniamo che

$$P_S(\{X_i, p_i, N_S\}) = \frac{1}{N_S!} \exp[-\beta(H_S(\{X_i, P_i, N_S\}) + PV_S - \mu N_S)]$$

La normalizzazione di P_S è la Gran Funzione di Partizione

$$Z_S = \sum_{N_S=0}^N \frac{1}{N_S!} \int \int \exp[-\beta(H_S(\{X_i, P_i, N_S\}) + PV_S - \mu N_S)] d^3N_S d^3P$$

⤴
Da notare che il colore è leggermente diverso, così si può distinguere

Visto che la distribuzione di probabilità era già normalizzata abbiamo che $Z_S = 1$.

Spesso e volentieri consideriamo sistemi a Volume costante, in quel caso possiamo portare il termine $e^{-\beta pV}$ fuori dall'integrale e ridefinire la funzione di grandipartizione così:

$$Z_S = \sum_{N_S=0}^N \frac{1}{N_S!} \iint \exp[-\beta(H_S(\{x_i, p_i\}, N_S) - \mu N_S)] d^{3N_S}x d^{3N_S}p$$

In questo caso però $Z_S = e^{\beta pV}$

Adesso che abbiamo la funzione di Grandipartizione possiamo abbandonare l'indice S.

Definiamo

$$\Omega = -pV = -k_B T \ln Z$$

Prima avevamo visto che

$$E = TS - pV + \mu N$$

Ma allora Ω non è altro che la trasformata di Legendre dell'energia rispetto all'entropia e N , quindi possiamo ottenere tutte le variabili che vogliamo partendo da lì

Volendo si possono calcolare direttamente le variabili

termodinamiche in modo analogo a come avevamo fatto con la funzione di partizione, ad esempio

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \Big|_{T, V}$$

Esercizio: Calcola la magnetizzazione di un sistema di spin non interagenti in un campo magnetico

Sistemi



Interagenti:

Lezione VII

$$Z = \frac{1}{N!} \iint e^{-\beta H} d^3x d^3p$$

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

Integrare rispetto alle \vec{p}_i è semplice. La parte costa e integrare rispetto alle \vec{x}_i

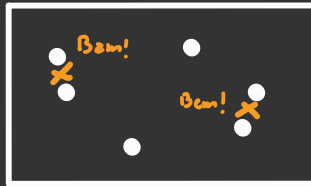
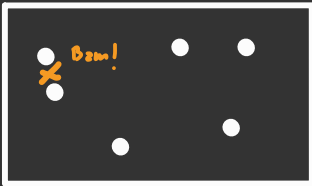
$$Z = \frac{1}{N!} \underbrace{\left[\int e^{-\beta \frac{p_i^2}{2m}} d^3p_i \right]^N}_{\text{Facile}} \underbrace{\int e^{-\beta V} d^3x}_{\text{Difficile} \equiv Z_N}$$

Quindi adesso limiti amici a calcolare questo integrale.

Supponiamo che

$$V(\{\vec{x}_i\}) = \sum_{i < j} v(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

Adesso approssimiamo: Supponiamo che le collisioni sono così rare che è improbabile che avvengano più di una collisione a 2 corpi o collisioni con più di 2 corpi



Partiamo scrivendo la funzione di partizione di $N+1$ particelle interagenti:

Particella "+1"

$$Z_{N+1} = \int \exp \left[-\beta \left(\sum_j v(\vec{x}_j - \vec{x}_1) + \sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right) \right] d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N =$$

$$= \frac{\int \exp \left[-\beta \left(\sum_j v(\vec{x}_j - \vec{x}_1) + \sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right) \right] d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N}{\int \exp \left[-\beta \sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right] d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N} \int \exp \left[-\beta \sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right] d\vec{x}_1 =$$

$$= \left\langle \int e^{-\beta \sum_j v(\vec{x}_j - \vec{x}_1)} d\vec{x}_1 \right\rangle Z_N$$

Adesso applichiamo l'approssimazione:

Supponiamo che solo la particella "+1" esima possa fare degli urti, quindi: $\sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \approx 0$, quindi:

$$\left\langle \int e^{-\beta \sum_j v(\vec{x}_j - \vec{x}_1)} d\vec{x}_1 \right\rangle \approx \frac{1}{V^N} \int e^{-\beta \sum_j v(\vec{x}_j - \vec{x}_1)} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N =$$

$$= \frac{V}{V^N} \int e^{-\beta \sum_j v(\vec{x}_j)} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N = V \left[\frac{1}{V} \int e^{-\beta v(\vec{x})} d\vec{x} \right]^N =$$

$$= V \left[1 - \frac{1}{V} \int 1 - e^{-\beta v(\vec{x})} d\vec{x} \right]^N = V \left[1 - \frac{1}{V} \int x^2 (1 - e^{-\beta v(x)}) dx \right]^N =$$

Definisco $z \equiv \frac{1}{V} \int x^2 (1 - e^{-\beta v(x)}) dx$ rappresenta il "volume" di una particella

$$Z_{N+1} = V \left(1 - \frac{z}{V} \right)^N Z_N = V^N \left(1 - \frac{z}{V} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} Z_1 \approx V^{N+1} e^{-\frac{Nz}{2V}}$$

Quindi la funzione di partizione complessiva viene

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\int e^{-\frac{p^2}{2m}} d^3p_i \right]^N \int e^{-\beta U} d^3x =$$

$$= \frac{1}{N!} \cdot \left[2\pi m k_B T \right]^{\frac{3N}{2}} \cdot V^N e^{-\frac{N^2}{2V} \alpha}$$

$$-\beta F = \ln Z = -N \ln N + \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right) + N \ln V - \frac{N^2}{2V} \alpha$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N}{V} + \left(\frac{N}{V} \right)^2 \alpha(T)$$

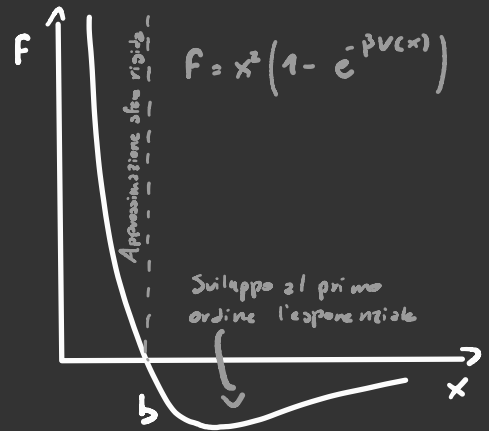
$$pV = N k_B T \left[1 + \frac{N}{V} \alpha(T) \right]$$

È possibile fare un'approssimazione su α tale che per $T \gg 1$

$$\alpha \approx V_b + \frac{D}{k_B T}$$

dove $D = - \pi \int_b^{+\infty} r^2 v(r) dr$ e

V_b è il volume di una sfera di $r=b$



Creando sti nuovi parametri:

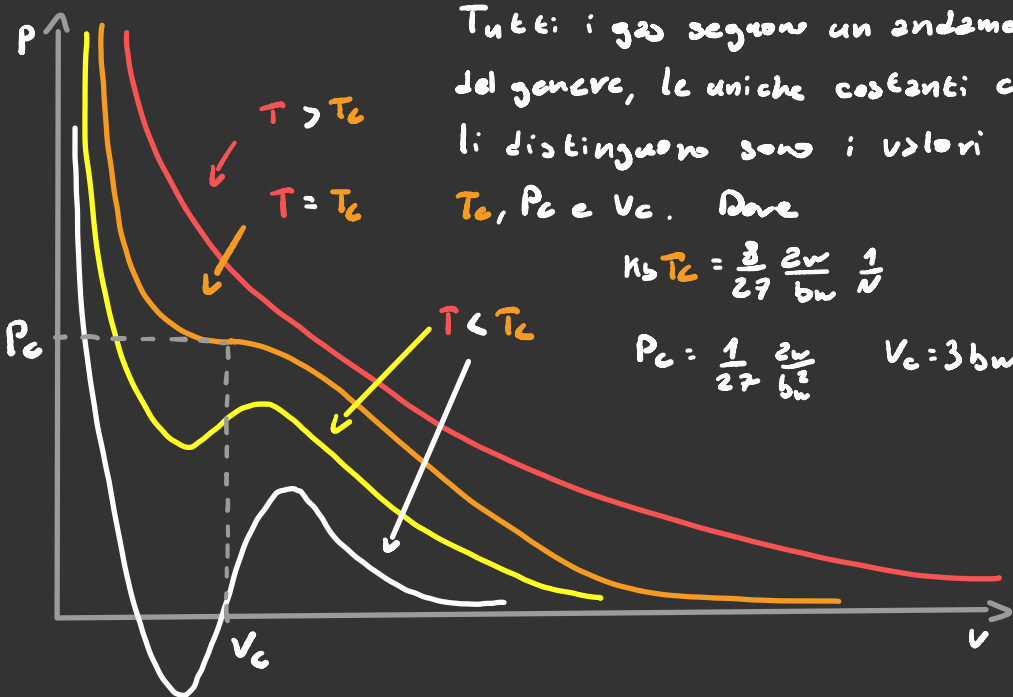
$$b_w = \frac{N}{2} V_b \quad a_w = \frac{N^2}{2} D$$

si ottiene l'equazione di Van der Waals

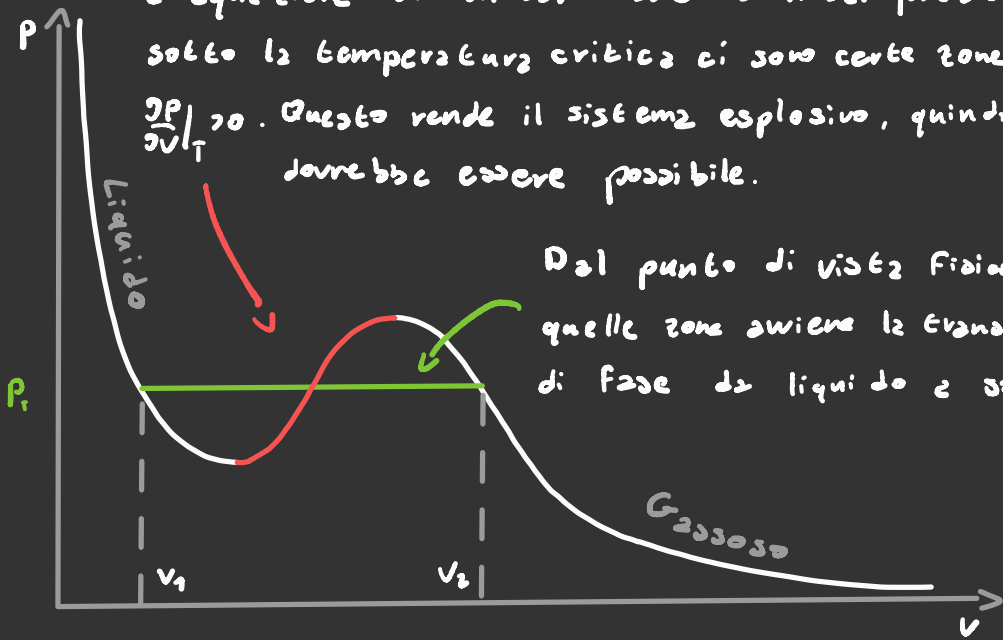
L'equazione di: Van der Waals

$$\left(p + \frac{aw}{v}\right)(v - bw) = Nk_B T$$

La rappresentazione grafica di questa equazione è qualcosa del genere.



L'equazione di Van der Waals ha un bel problema: sotto la temperatura critica ci sono certe zone dove $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$. Questo rende il sistema esplosivo, quindi non dovrebbe essere possibile.

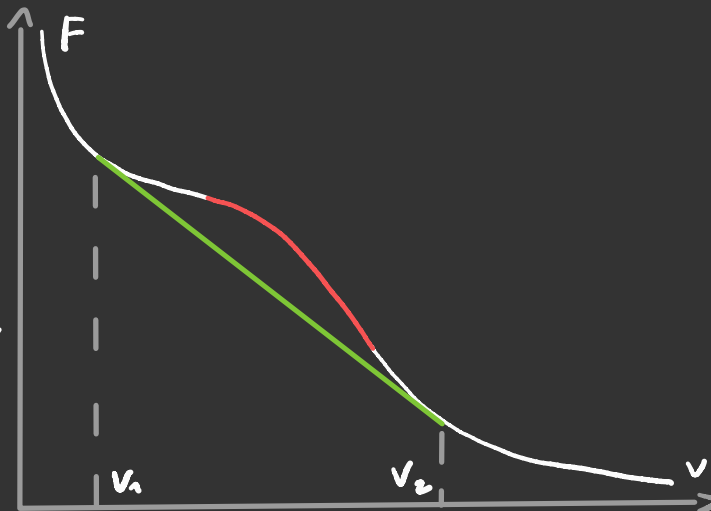


Durante la transizione di fase abbiamo le 2 fasi che coesistono. Entrambe le fasi devono essere all'equilibrio meccanico, quindi devono avere la stessa pressione.

L'altra cosa da tenere in considerazione è che l'energia libera $F = -\int P dV$ deve cambiare avendo la derivata prima rispetto al volume

continua visto che è la pressione e nella regione di transizione deve essere lineare visto che $\frac{dF}{dV} = P_T$ per $V_1 < V < V_2$.

Questo determina univocamente P_T



Espansione dei Cluster

Prima avevamo fatto l'approssimazione che il gas era diluito e sufficiente di modo che ci era al massimo una sola interazione tra le molecole del gas.

Adesso proviamo a aumentare la precisione. Sta volta usiamo la funzione di Granpartizione

$$Z = \sum_N \frac{\lambda^N}{N!} z_N \quad \text{dove} \quad \lambda = e^{-\beta \mu} \sqrt{2\pi m k_B T}$$

$$e \quad z_N = \int e^{-\beta V(\{\vec{x}_i\})} d^3x \quad \text{con} \quad V(\{\vec{x}_i\}) = \sum_{i < j} v(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$\text{quindi} \quad z_N = \int \prod_{i < j} e^{-\beta v_{ij}} d^3x$$

Se definisco $F_{ij} = e^{-\beta v_{ij}} - 1$ abbiamo che

$$z_N = \int \prod_{i < j} (1 + F_{ij}) d^3x$$

Se proviamo a calcolare la produttoria come questo

$$\prod_{i < j} (1 + F_{ij}) = 1 + \text{ordine } 0$$

$$+ F_{12} + F_{23} + F_{13} + F_{14} + \dots \quad \text{I ordine}$$

$$+ F_{12} F_{23} + F_{12} F_{13} + F_{13} F_{23} + \dots \quad \text{II ordine}$$

$$+ \text{ecc...}$$

I prodotti queste F_{ij} sono detti cluster

← Sarebbero i termini di questa sommatoria

Quello che bisogna fare e' classificare e calcolare gli integrali dei cluster.

Per simmetria $\int f_{12} d^3x = \int f_{35} d^3x$

Allo stesso modo $\int f_{12} f_{23} = \int f_{45} f_{56} \neq \int f_{12} f_{34}$

Si possono rappresentare e classificare graficamente così

$\int f_{ij} d\vec{x}_i d\vec{x}_j \equiv \begin{array}{c} i \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ j \end{array} \int f_{ij} f_{jk} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k = \begin{array}{c} j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ i \quad k \end{array}$

$\int f_{ij} f_{kl} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l = \begin{array}{c} j \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ i \end{array} \begin{array}{c} l \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ k \end{array} = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right)^2 \leftarrow \text{Lo spiego dopo}$

$\int f_{ij} f_{jk} f_{kl} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \quad \quad \quad l \end{array}$

Adesso ci tocca contare quanti cluster ci sono di ciascun tipo

$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} N(N-1) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} N \frac{(N-1)(N-2)}{2}$

Bisogna però stare attenti

$\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \frac{N}{(N-1)!} \frac{1}{3!}$

C'è comunque da considerare che per ogni i, j in F_{ij} la i deve essere minore della j . Un modo di assicurarsi che ciò avvenga è ordinare i vari indici i, j, k, \dots in ordine crescente ogni volta che li si incontra uno. Ma si capisce

Ad esempio

$$\int F_{23} F_{42} F_{51} F_{41} \rightarrow \int F_{5+1+1} F_{+2} F_{2+1} \rightarrow \text{Ordine} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int F_{12} F_{23} F_{2+3}$$

$\swarrow 1 \rightarrow 3$ $\swarrow 2 \rightarrow 4$
 $\nearrow 5 \rightarrow 1$ $\nearrow 4 \rightarrow 2$
 Quasi due
 un 4

Il primo numero che incontro è un 5, quindi faccio partire tutti i 5=1, il secondo è il 4, quindi 4-1 e così via 1-3, 2-4

Questo significa che la molteplicità di ogni cluster va diviso per 4!

Adesso "calcoliamo" il valore di ognuno di questi integrali:

$$| \cdot | = \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) d^3x = V^{N-2} \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) d\vec{x}_i d\vec{x}_j =$$

$$= V^{N-1} \int F_{ij}(|\vec{x}_i|) d\vec{x} \quad \text{Da aggiungere}$$

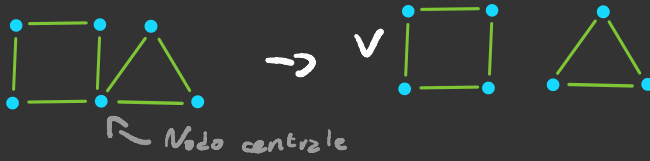
$$\begin{matrix} \bullet & & \bullet \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \\ & / & \diagdown \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} = V^{N-3} \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) F_{jk}(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|) d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k$$

$$= V^{N-2} \int F_{ij}(|\vec{x}_i|) F_{jk}(|\vec{x}_k|) d\vec{x}_i d\vec{x}_k \quad \left(\begin{matrix} | \cdot | \\ | \cdot | \end{matrix} \right)^2$$

$$\begin{matrix} & & \bullet \\ & \diagdown & / \\ \bullet & & \bullet \\ & / & \diagdown \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} = V^{N-4} \int F_{ij} F_{jk} F_{ji} F_{kl} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l =$$

$$= V^{N-3} \int F_{ij} F_{jk} F_{kl} F_{ji} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k \quad \left(\begin{matrix} | \cdot | \\ | \cdot | \\ | \cdot | \end{matrix} \right)$$

In generale se il cluster è formato da 2 pezzi uniti da un solo nodo allora si possono riparametrizzare tutte le altre variabili d'integrazione in termine del nodo centrale



Un cluster che non è possibile spaccare in 2 è detto irriducibile.

Adesso vediamo quanto ognuno di questi cluster contribuisce

$$Z_N = \int \prod_{i,j} (1 + F_{ij}) dX = \int 1 + F_{12} + F_{23} + F_{13} + F_{14} + \dots + F_{12} F_{23} + F_{12} F_{13} + F_{13} F_{23} + \dots$$

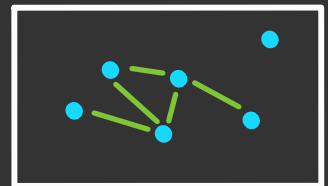
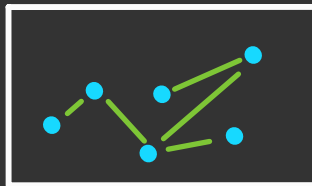
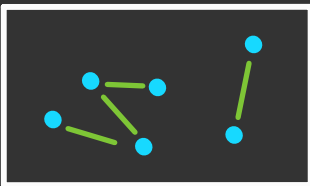
definisco b_c come la somma di tutte le contribuzioni che comprendono ℓ nodi.

↳ Anche quelli separati e non irriducibili:

$$b_c = \int \sum_{\substack{\text{clusters} \\ \ell \text{ nodi}}} dX$$

Ecco quali clusters stanno e non stanno in questa

somma toriz



Scriviamo i primi termini di b_ℓ

$$b_1 = \bullet = V$$

$$b_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \int f_{ij} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) d\vec{x}_i d\vec{x}_j$$

$$b_3 = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) =$$

$$= \int f_{ij} f_{jk} f_{ki} + f_{ij} f_{jn} + f_{ji} f_{ik} + f_{in} f_{nj} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_n$$

$$Z_N = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\ell!} \frac{N!}{(N-\ell)!} b_\ell V^{N-\ell} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} V^N \sum_{\ell=1}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell$$

↖ $\frac{N}{V}$ è la densità

Quindi è una serie di potenze in ρ .

A noi però ci interessa il logaritmo della funzione di partizione.

$$\ln \sum_{\ell=1}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell = \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell$$

$$\sum_{\ell=1}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell = \exp \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell =$$

$$= \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell + \left[\sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell \right]^2 + \dots$$

$$= 1 + B_0 + \left(\frac{N}{V}\right) (B_1 + 2 B_1 B_0) + \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{B_2}{2} + 2 \frac{B_2 B_0}{2} + B_1^2\right) + \dots$$

A questo punto basta eguagliare i termini delle due serie con lo stesso $\left(\frac{N}{V}\right)^\ell$. Questa è una procedura standard per le case perturbative

Quindi abbiamo che

$$\begin{cases} 0 = 1 + \beta_0 \\ b_1 = \beta_1 + 2\beta_1\beta_0 \\ \frac{b_2}{2} = \frac{\beta_2}{2} + \beta_2\beta_0 + \beta_1^2 \\ b_3 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = -1 \\ -\beta_1 = b_1 \\ -\beta_2 + 2b_1^2 = b_2 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = -1 \\ \beta_1 = -b_1 \\ \beta_2 = 2b_1^2 - b_2 \\ \beta_3 = \dots \end{cases}$$

Viene la
matr. di
come dante

$$\frac{p}{k_B T} = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \ln \frac{\lambda^N}{N!} Z_N = \frac{\partial}{\partial V} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{N}{V}\right)^{\ell} \frac{1}{\ell!} \beta_{\ell} =$$

$$\frac{pV}{k_B T} = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{N}{V}\right)^{\ell} \frac{1}{(\ell-1)!} \beta_{\ell} = \left[\frac{N}{V} \beta_1 - \left(\frac{N}{V}\right)^2 \beta_2 + \left(\frac{N}{V}\right)^3 \frac{\beta_3}{3} + \dots \right]$$

$$\ln Z \frac{\lambda^N}{N!} Z_N =$$

Chiarimento: calcolare questa serie è impossibile, però si può approssimare interrompendo la serie a un certo punto. Supponiamo di interromperla a $\ell=3$

Transizioni di Fase Lezione

Una transizione di fase è quello che succede quando

- Cambia lo stato di aggregazione del sistema Liquido, solido, ...
- Cambiano alcune proprietà termodinamiche Ferromagnetico - paramagnetico

Secondo Ehrenfest la transizione di fase di ordine n è definita se la derivata n -esima del potenziale termodinamico è discontinua.

Ad esempio l'Entropia è discontinua a 0°C nell'acqua, visto che $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ è discontinuo l'ebollizione è una transizione del 1° ordine

Oggi giorno questa classificazione non si usa più, in pratica ci sono le

- Transizioni del primo ordine Uguale ad Ehrenfest
- Transizioni continue Tutte le altre

Questo perché alcuni tipi di transizioni non erano classificabili

Noi ignoreremo le transizioni del primo ordine perché nel campo della chimica sono ben modellizzate.

Quindi concentriamoci sulle transizioni continue

Se abbiamo un numero piccolo di particelle e' impossibile parlare della loro Fase. Se ho 3 molecole d'acqua non sono né solide né liquide né gassose

Quindi le transizioni di fase sono un fenomeno puramente Termodinamico.

Noi però non siamo vincolati ad usare molte particelle. volendo possiamo prendere un numero finito N e poi portare $N \rightarrow \infty$.

La funzione di Granpartizione e'

$$Z = \sum_{N=0}^M \frac{z^N}{N!} Z_N = 1 + z Z_1 + z^2 Z_2 + \dots$$

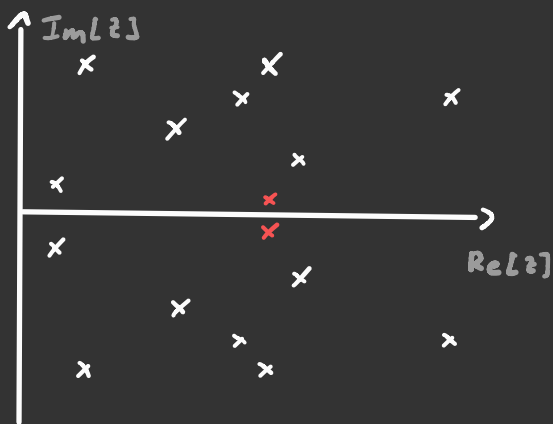
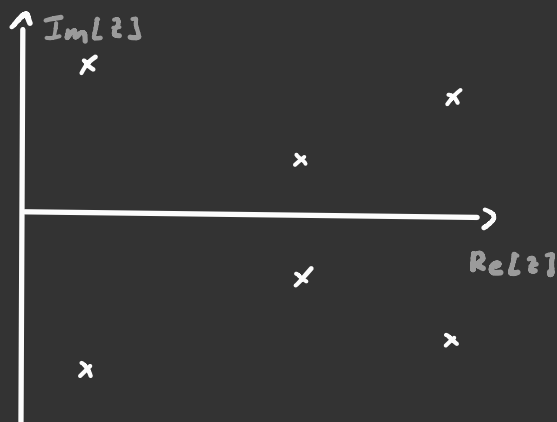
dove $z = e^{\beta \mu}$.

Quindi Z e' un polinomio di grado M e ha M soluzioni nel piano complesso \rightarrow

In teoria z può avere solo valori reali > 0 visto che

$$z = e^{\beta \mu}$$

Normalmente non ci sono radici sull'asse reale, però quando aumentiamo M le soluzioni tendono ad affollarsi e alcune si mettono vicino alla retta reale, quindi per $M \rightarrow \infty$ possiamo dire che ci sono degli zeri in \mathbb{R}^+



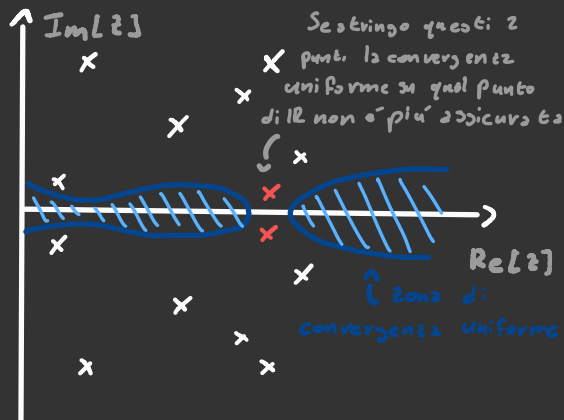
Pero' che cosa implica? Prendiamo la densità e facciamo il limite termodinamico. $(N, V \rightarrow \infty)$

$$p = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{z}{V} \frac{\partial}{\partial z} \ln Z$$

Noi vogliamo assicurarci che il limite e la derivata si possano scambiare, però questo è possibile solo dove $\ln Z(z)$ converge uniformemente.

Ma perché a noi interessa la convergenza uniforme?

L'idea è che se abbiamo delle funzioni continue $\{z^N, z_N\}$ e infinitamente differenziabili allora anche la loro serie lo è, quindi siamo sicuri che non ci sono transizioni di fase.



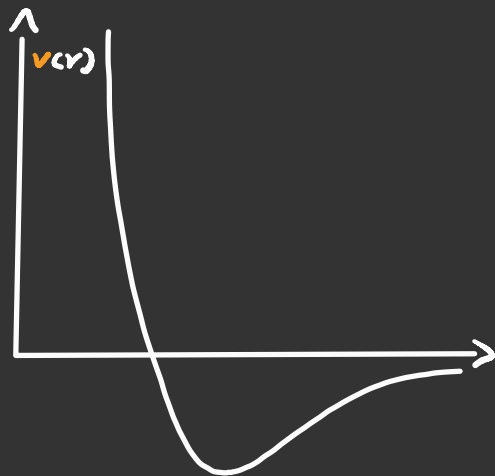
Dove ci sono gli zeri non c'è convergenza uniforme, quindi POTREBBE esserci una discontinuità della funzione o di una delle sue derivate.

Per meglio capire questo teorema proviamo ad applicarlo al modello di Ising

Idea: Aggiungere analogia con convergenza uniforme
Serie di Fourier

Teorema del Cerchio

Il teorema del cerchio dice che se se abbiamo un potenziale di interazione $v(r)$ come qui a destra, allora tutti gli zeri della funzione di partizione si trovano in un cerchio centrato all'origine di raggio 1, quindi posso scrivere $z = e^{i\theta}$



$$z = \prod_n (z - e^{i\theta_n}) \rightarrow \ln z = \sum_n \ln(z - e^{i\theta_n})$$

$$\text{Per } N \rightarrow \infty \quad \ln z = \int_0^{2\pi} \underbrace{g(\theta)}_{\text{Densità di zeri}} \ln(z - e^{i\theta}) d\theta$$

Visto che per ogni radice esiste la complessa coniugata abbiamo che $g(\theta) = g(-\theta)$

$$\ln z = \int_0^{\pi} g(\theta) \ln(z^2 - 2z \cos \theta + 1) d\theta$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{F}{V} = \frac{k_B T}{V} \ln z = \frac{k_B T}{V} \int_0^{\pi} g(\theta) \ln(z^2 - 2z \cos \theta + 1) d\theta$$

$$P = \frac{N}{V} = z \frac{\partial}{\partial z} \ln z = 2z \int_0^{\pi} g(\theta) \frac{z - \cos \theta}{z^2 + 1 - 2z \cos \theta} d\theta$$

Ora come ora noi non abbiamo idea di come è fatta $g(\theta)$ se $g(\theta) = 0$ allora sia P sono continue in $z=1$ altrimenti potrebbe non esserlo.

Equazione di Van der Waals vicino al punto critico

Per cercare di capire "bene" come funziona l'ebollizione e la condensazione bisogna andare a guardare l'equazione di Van der Waals vicino al punto critico.

Se scriviamo l'equazione di Van der Waals in termini delle variabili termodinamiche al punto critico esce questo

$$8\bar{T} = \left(\bar{P} + \frac{3}{\bar{V}}\right) (3\bar{V} - 1) \quad \text{dove} \quad \bar{P} = \frac{P}{P_c} \quad \bar{V} = \frac{V}{V_c} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_c}$$

Vicino al punto critico $\bar{P} = \bar{V} = \bar{T} = 1$, quindi posso provare a definire

$$\bar{P} = 1 + \pi \quad \bar{V} = 1 + \psi \quad \bar{T} = 1 + \tau$$

Facendo così l'eq. di Van der Waals diventa

Ancora qui non abbiamo approssimato

$$3\psi^3(1+\pi) + 8\psi^2(\pi-\epsilon) + \psi(7\pi-16\epsilon) + 2(\pi-4\epsilon) = 0$$

Ma vogliamo trovare le intersezioni di queste

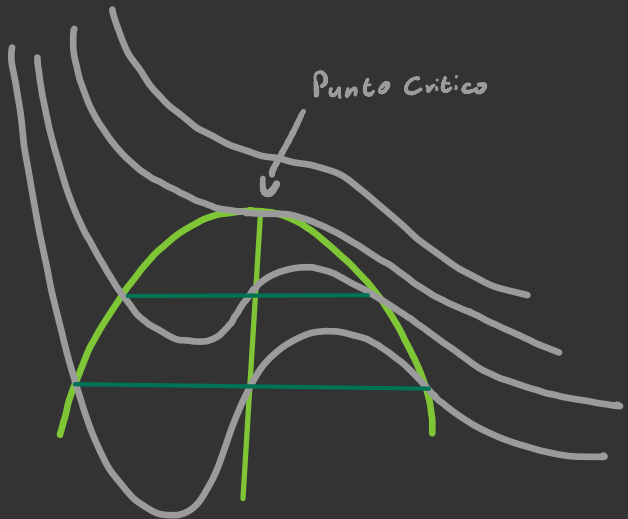
linee con le linee isobore.

Visto che una delle soluzioni

è sempre $\psi \approx 0$

allora $\pi \approx 4\epsilon$.

L'equazione diventa quindi



$$3\psi^3(1+\pi) + 8\psi^2(\pi-t) + \psi(7\pi-16t) + 2(\pi-t) = 0$$

$$3\psi^2 + 2 + \psi t + 12t = 0$$

$$\psi^2 + 8\psi t + 4t = 0$$

$$8\psi t \ll 4t$$

Controlla
normalità

Quindi alla fine

$$\psi_{1,2} = \pm 2\sqrt{|t|} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{|\pi|} \alpha |\pi|^\alpha \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Che è quella cosa che ci dà la forma a parabola della zona di coesistenza

Questo risultato è un po' approssimato, però si può usare per calcolare quanto sono discontinue le derivate termodinamiche.

Ad esempio la compressibilità isoterma

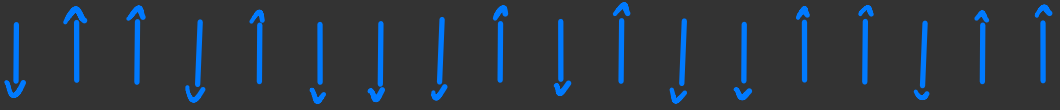
$$\kappa_T = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \pi}\right)_T = \frac{2}{7\pi + 9\psi^2 - 16t}$$

$\rightarrow \frac{1}{6t} \quad t=0^+, \psi=0$
 $\rightarrow \frac{1}{12|t|} \quad t=0^-, \psi^2=-t$

Il che significa che nelle isoterme appena al di sopra del punto critico $\kappa_T = 1/6t$ e in quelle appena al di sotto $\kappa_T = 1/12|t|$, quindi $\kappa_T \propto |t|^\gamma$ con $\gamma = -1$

α e γ sono detti **esponenti critici** perché caratterizzano il modo in cui variano le variabili termodinamiche vicino al punto critico

Modello di Ising



Il modello di Ising rappresenta un sistema di spin interagenti su un reticolo immerso in un campo magnetico.

Se si considerano solo le interazioni con gli spin confinanti, l'Hamiltoniana è:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

Somma solo gli spin confinanti \rightarrow J \leftarrow Proporzionale al campo Magnetico h

Dove $\sigma_i = \pm 1$

Studiare il modello di Ising all'inizio è un po' come studiare gli oscillatori armonici la prima volta: non si espone come mai i fisici ne siano così tanto ossessionati.

Il motivo è che

- Nonostante la sua "semplicità" esso è in grado di descrivere il ferromagnetismo e l'antiferromagnetismo, le transizioni gas-liquido, liquido-solido e tante altre cose
- Grazie alla sua semplicità è in grado di dare una descrizione teorica unificata di tutti questi fenomeni

La versione 1-dimensionale del problema ha soluzione

analitica nel senso che è possibile scrivere tranquillamente la funzione di partizione

La versione bidimensionale

ha sia soluzione analitica

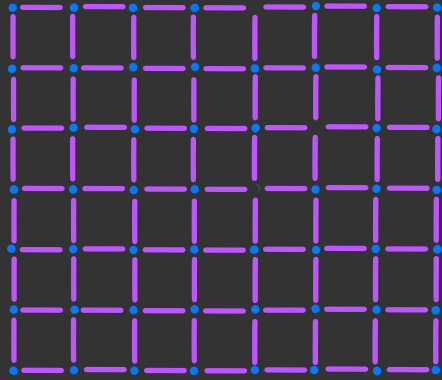
che transizioni di fase, solo

che la soluzione analitica è

brutta come la germania e

quindi non la tocchiamo neanche

con un bastone. Si chiama soluzione di Onsager



Per dimensioni 2,3 non esiste una soluzione analitica

Visto che non abbiamo intenzione di usare soluzioni esatte

facciamo un'approssimazione chiamata approssimazione di

campo medio.

$$S_j = m_j + \delta S_j$$

Che equivale a dire che gli spin si scostano poco dal loro valore medio m_j , in questo modo

$$S_i S_j = m_i m_j + m_i \delta S_j + m_j \delta S_i + \cancel{\delta S_i \delta S_j}$$

Supponendo che il sistema sia invariante sotto traslazioni

possiamo dire che $S_j = S_i$

$$S_i S_j = m^2 + 2m \delta S = m^2 + 2m(S - m) = 2mS - m^2$$

L'Hamiltoniana diventa

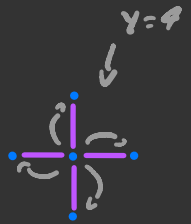
$$H = - \frac{J}{2} \sum_i \sum_j z m \sigma_i - m^2 - h \sum_i \sigma_i$$

← Sommo solo sulle j confinanti z i

Serve per evitare di contare 2 volte ogni contributo

$$= \frac{J\gamma}{2} m^2 N - (h + Jm\gamma) \sum_i \sigma_i$$

Dove z γ è il numero di particelle confinanti una particella, nel reticolo quadrangolare in 2D $\gamma=4$



Questa approssimazione diventa sempre più esatta all'aumentare di γ . In particolare da 4 dimensioni in su diventa parecchio buona.

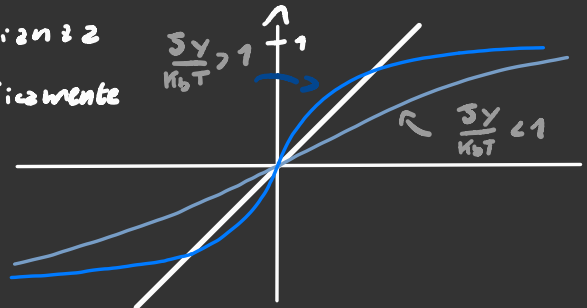
Adesso vediamo che succede a una funzione di partizione con questa Hamiltoniana

$$Z = C \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\frac{h + Jm\gamma}{k_B T} \sum_i \sigma_i} = C 2^N \left[\cosh\left(\frac{h + Jm\gamma}{k_B T}\right) \right]^N$$

Adesso che abbiamo la magnetizzazione $m = \langle \sigma_i \rangle$

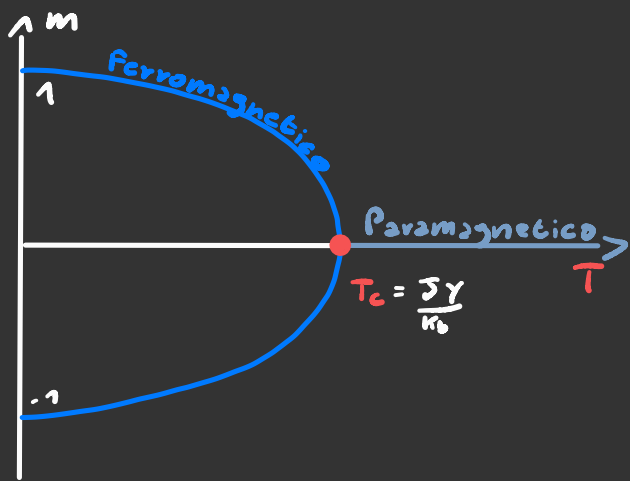
$$m = \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{N} k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z = \tanh\left(\frac{h + Jm\gamma}{k_B T}\right) \Big|_{h=0}$$

Le soluzioni di questa uguaglianza si possono rappresentare graficamente così.



Per $\frac{J\gamma}{k_B T} > 1$ ci sono 3 soluzioni, altrimenti ce n'è solo una

Se si plotano i vari valori che m può assumere al variare della temperatura si vede che per $T > T_c$ il comportamento è Paramagnetico, mentre per $T < T_c$ è Ferromagnetico.



Ricordiamoci che un materiale è Paramagnetico quando sono magnetizzati solo in presenza di un campo magnetico esterno.

Un materiale è invece ferromagnetico non è necessario un campo esterno per essere magnetizzato. Tipo una calamita.

Adesso analizziamo il comportamento vicino al punto critico.

$$m = \epsilon \tanh\left(m \frac{T_c}{T}\right) \approx m \frac{T_c}{T} + \frac{m^3}{3} \left(\frac{T_c}{T}\right)^3$$

$$m^2 = 3 \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \approx 3 \epsilon \quad \epsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

Simile alla roba che abbiamo fatto con Van der Waals

Una cosa curiosa da notare è che lo stato fondamentale è invariante sotto rotazione per $T > T_c$, ma non lo è per $T < T_c$. Ciò significa che durante la transizione di fase avviene una rottura spontanea di simmetria.

Suscettività Magnetica χ

La suscettività è definita

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{N}{V} \frac{\partial m}{\partial h}$$

↖ Magnetizzazione



Facciamo qualche calcolo

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{N} \frac{\sum_i \sum_{\{s_j\}} s_i e^{-\beta H}}{\sum_{\{s_j\}} e^{-\beta H}}$$

Hamiltoniana
senza campo
magnetico

≈ 0 (approx.)

$$-\beta H = -\beta(H_0 - h \sum_j s_j)$$

$$\approx \frac{1}{N} \frac{\sum_i \sum_{\{s_j\}} s_i (1 + \beta h \sum_j s_j) e^{-\beta H_0}}{\sum_{\{s_j\}} e^{-\beta H_0}} = \frac{1}{N} \frac{\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle_0}{1 + \beta h \sum_i \langle s_i \rangle_0}$$

$$\approx \frac{1}{N} \left(\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle_0 \right) \left(1 - \beta h \sum_i \langle s_i \rangle_0 \right) \approx$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_i \langle s_i \rangle_0 - \beta h \sum_{ij} \left(\langle s_i \rangle_0 \langle s_j \rangle_0 - \langle s_i s_j \rangle_0 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0 \right]$$

Quindi

$$\chi \approx \frac{\beta}{V} \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0$$

Da notare che questa
formula vale per ogni
 H_0

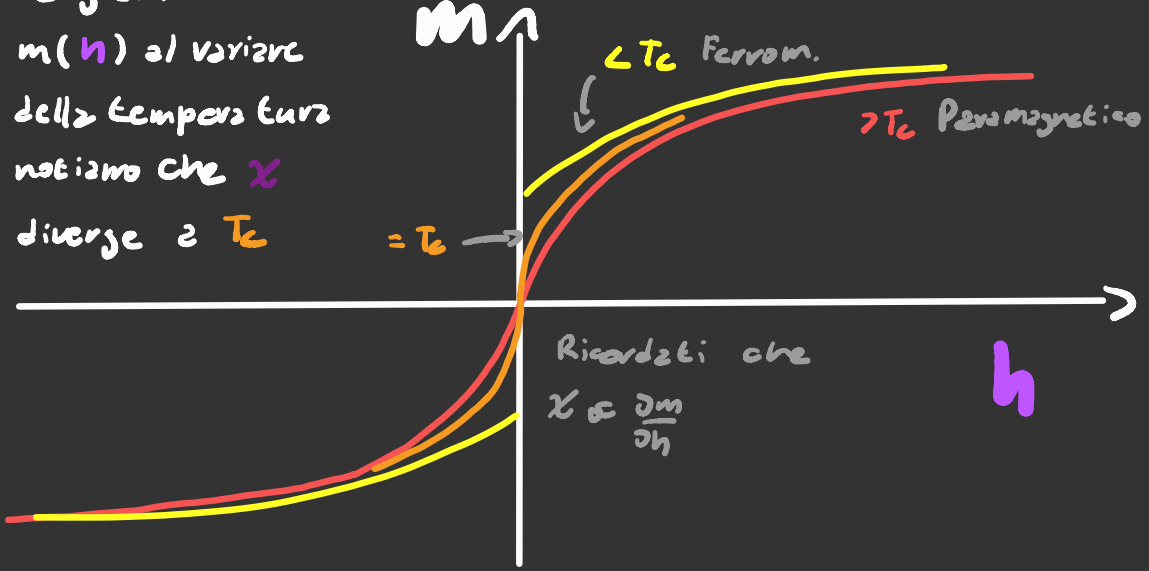
Questo significa che se χ è molto grande, gli spin sono molto correlati tra di loro. (Rileggilo che è importante)

Questo significa che gli spin interagiscono molto tra di loro e se ti sembra normale sappi che non lo è

Per capire cosa c'è di strano andiamo a studiare $m(h)$ a diverse temperature. Prima dobbiamo ricordarci che

$$m = \tanh\left(\frac{h + Jm}{k_B T}\right)$$

Se grafichiamo $m(h)$ al variare della temperatura notiamo che χ diverge a T_c



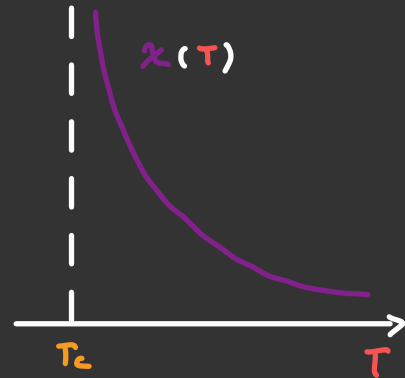
Adesso approssimiamo $T = T_c(1 + \epsilon)$ $h, m \rightarrow 0$

$$m = \tanh\left(\frac{h + Jm}{k_B T}\right) = \tanh\left(\frac{h}{k_B T_c} + m\right) \approx \frac{h}{k_B T_c} + m(1 - \epsilon)$$

$$m\epsilon = \frac{h}{k_B T_c} \quad m = \frac{h}{k_B T_c \epsilon}$$

$$\chi(h=0, T=T_c) = \frac{N}{V} \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{N}{V} \frac{1}{k_B T_c} \frac{1}{\epsilon}$$

Quindi abbiamo che χ diverge come $\epsilon^{-\gamma}$ dove γ è un esponente critico con $\gamma = -1$



Teoria di Ginzburg - Landau

Prima di procedere scriviamo la versione un po' generalizzata dell'hamiltoniana del modello di Ising in assenza di campo M.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij} J_{ij}^* G_j$$

La funzione di Partizione diventa

$$Z = \sum_{\{G_i\}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} G_i J_{ij} G_j\right) \quad J_{ij} = p J_{ij}^*$$

Questa è scrivibile in termini di integrali Gaussiani in questo modo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(J^{-1})}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} G_i J_{ij} G_j\right) &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(J^{-1})}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\sum_i G_i \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_i (J^{-1})_{ij} \psi_j\right] d\tilde{\psi} \end{aligned}$$

$$Z Z_0 = \sum_{\{G_i\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\sum_i G_i \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_i (J^{-1})_{ij} \psi_j\right] d\tilde{\psi}$$

Il vantaggio di rappresentarlo in questo modo è che le G spuntano solo al l'ordine

$$\sum_{\{6_i\}} \exp\left(\sum_i 6_i \psi_i\right) = \prod_i \cosh(\psi_i) = e^{\sum_i \ln(\cosh \psi_i)}$$

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp\left[\underbrace{\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i (J^{-1})_{ij} \psi_j}_{\equiv -F(\psi)}\right] d^N \psi$$

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int e^{-F(\psi)} d^N \psi \quad \text{Fa piazza di integrale dei cammini}$$

Adesso ci siamo levati gli spin dai piedi e abbiamo una sorta di azione con cui poter lavorare e il tutto senza fare approssimazioni! Ora però abbiamo i seguenti problemi:

- a) Che ci faccio con sta funzione di partizion scritta così?
- b) Cosa rappresenta ψ ?
- 2) Ora come ora niente. Questo perché se vogliamo ad esempio studiare la magnetizzazione bisogna mettere il termine $\sum h_i \sigma_i$

Facendo questo alla fine risulta che $\cosh \psi_i \rightarrow \cosh(\psi_i + h_i)$.
Se si manda $\psi_i \rightarrow \psi_i - h_i$ abbiamo che

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp\left[\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} (\psi_i - h_i) (J^{-1})_{ij} (\psi_j - h_j)\right] d^N \psi$$

Sfruttando sempre le solite equazioni con derivate parziali:

$$m_i = \left. \frac{\partial F}{\partial h_i} \right|_{\vec{h}=0} = -\frac{k_B T}{Z} \left. \frac{\partial Z}{\partial h_i} \right|_{\vec{h}=0} = \sum_j J_{ij}^{-1} \langle \psi_j \rangle$$

E siamo riusciti a scaricare anche questo compito alle ψ_i :

b) Sotto un certo punto di vista uno potrebbe usare l'equazione di sopra per dire che

$$\langle \vec{\psi} \rangle = J \vec{m} = J \langle \vec{S} \rangle$$

Quindi è come se le ψ indicassero la forza di interazione tra i vari spin e meno di qualche costante dipendente dalla temperatura

Spiegato Male e forse è più sbagliato

Integrale dei Cammini

Vogliamo riuscire a trovare un modo strano di calcolare l'operatore di evoluzione temporale $U(t', t)$

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t) |\psi(t)\rangle$$

La componente nel punto x' è

$$\psi(x', t') = \langle x' | \psi(t') \rangle = \langle x' | \hat{U}(t', t) |\psi(t)\rangle = \int U(x', t', x, t) \psi(x, t) dx$$

imponendo $|\psi(t)\rangle = |x\rangle$ otteniamo che

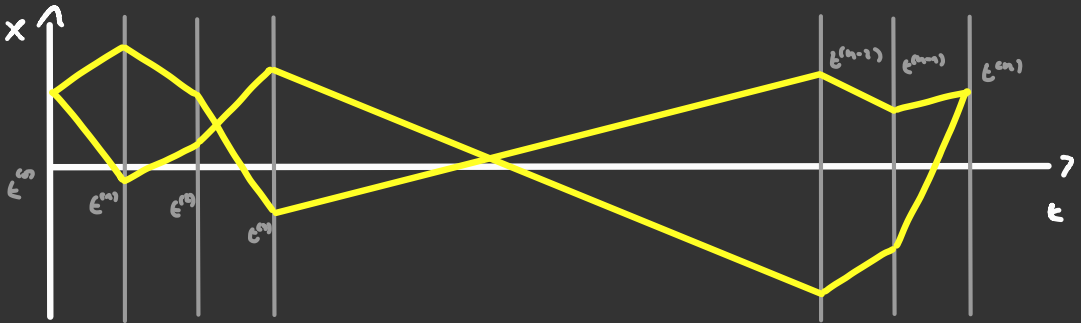
$$U(x', t', x, t) = \langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | x \rangle$$

Volendo possiamo spezzare l'evoluzione temporale in 2

$$U(x', t', x, t) = \int U(x'', t'', x', t') U(x', t', x, t) dx''$$

O in n

$$U(x^{(n)}, t^{(n)}, x, t) = \int U(x^{(n)}, t^{(n)}, x^{(n-1)}, t^{(n-1)}) \dots U(x', t', x, t) dx^{(n-1)} \dots dx'$$



Questo integrale equivale alla somma di tutte le ampiezze di probabilità di tutti i cammini

Questo integrale però ha il problema che dipende dall'operatore dagli impulsi:

$$\langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(\epsilon'-\epsilon)} | x \rangle \approx \langle x' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m}\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} V(x)\right] | x \rangle + \dots$$

$$\langle x' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m}\right] | x \rangle = \int \langle x' | p \rangle \langle p | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m}\right] | p \rangle \langle p | x \rangle dp$$

$$= \int \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2 \Delta t}{2m}\right] \frac{e^{+\frac{i}{\hbar} p(x'-x)}}{2\pi\hbar} dp =$$

$$\text{Quindi: } \langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(\epsilon'-\epsilon)} | x \rangle \approx$$

$$\int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left[H(p, x) - p \frac{(x'-x)}{(\epsilon'-\epsilon)} \right] (\epsilon'-\epsilon) \right\} dp$$

Per $n \rightarrow \infty$ e $\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(i-1)} \rightarrow 0$

$$U(x+n\Delta x, t+\Delta t, x, t) = \int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left[H(p, x) - p \dot{x} \right] \Delta t \right\} dp$$

Moltiplicandone tante assieme otteniamo questa eq. è diventa un valore continuo

$$U(x', \epsilon', x, \epsilon) = \int \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int H(p, x) - p \dot{x} dt\right] D X(t) D P(t)$$

Questo si può semplificare ulteriormente, infatti:

$$\int \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int \frac{p^2}{2m} - p \dot{x} dt\right] D P(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int m \frac{\dot{x}^2}{2} dt\right]$$

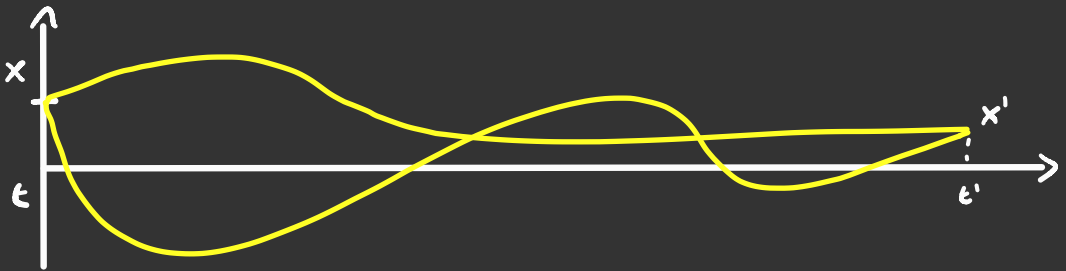
$$U(x', \epsilon', x, \epsilon) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) dt\right] D X(t) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int L(x, \dot{x}) dt} D X(t)$$

Adesso analizziamo bene l'equazione dell'integrale dei cammini

$$U(x', t', x, t) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt} \mathcal{D}x(t)$$

Quello che succede è questo:

- 1 Prendi una traiettoria $x(t)$
- 2 Calcola il contributo che dà all'ampiezza di transizione
- 3 Somma



Definisco l'azione $S[x(t)] = \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt$

Volendo posso svilupparlo in serie

$$S[x(t)] = S[x_0(t)] + \int \frac{\delta S}{\delta F(t)} [x(t) - x_0(t)] dt + \int \frac{\delta S}{\delta F(t)} \frac{\delta S}{\delta g(t')} (x(t) - x_0(t))(x(t') - x_0(t')) dt dt' + \dots$$

Se sviluppiamo in un punto di minimo abbiamo che

$$U \approx e^{iS[x_0(t)]} \int e^{iM(t, t') [x(t) - x_0(t)] [x(t') - x_0(t')]} dt dt' \quad M(t, t') = \frac{\delta S[x_0(t)]}{\delta F(t) \delta g(t')}$$

Questo ci fa vedere che se mandiamo $\hbar \rightarrow 0$ tutti i contributi che si spostano dal valore di minimo tendono a cancellarsi

Relazione tra **Integrale dei Cammini** e **Funzione di Partizione**

Se abbiamo un sistema termodinamico di un campo $\vec{m}(\vec{x})$ la sua funzione di partizione è

$$Z = \int e^{-\beta H(\vec{m}(\vec{x}))} D\vec{m}(\vec{x})$$

Che ricorda molto l'operatore d'evoluzione temporale

$$U = \int e^{\frac{1}{\hbar} S[x(t)]} Dx(t)$$

Quindi con le giuste sostituzioni è possibile usare tutte le tecniche che i teorici usano per calcolare U tra cui l'approssimazione punto di sella e i diagrammi di Feynman.

Ad esempio l'equazione di Landau-Ginzburg è scrivibile così

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp \left[\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i (J^{-1})_{ij} \psi_j \right] d\vec{\psi} \rightarrow$$

per $i \rightarrow +\infty$

$$\rightarrow \frac{1}{Z_0} \int \exp \left[\int \ln \cosh \psi(x) dx - \frac{1}{2} \int \psi(x) J^{-1}(x,y) \psi(y) dx dy \right] D\psi(x)$$

Torniamo all'equazione di London - Ginzburg e vediamo che possiamo fare

$$\frac{1}{2\pi} \int \exp \left[\int \ln \cosh \psi(x) dx - \frac{1}{2} \int \psi(x) \tilde{J}^{-1}(x,y) \psi(y) dx dy \right] \mathcal{D}\psi(x)$$

Adesso noi vogliamo sapere sotto quali condizioni il nostro sistema è ferromagnetico o paramagnetico.

Noi sappiamo che se è paramagnetico allora $\psi = 0$ è un minimo, altrimenti se è ferromagnetico è un punto di massimo

$$\ln \cosh \psi(x) \approx -\frac{1}{2} \psi^2(x) + \frac{1}{12} \psi^4(x)$$

$$FL43 \approx \int -\frac{1}{2} \psi^2(x) + \frac{1}{12} \psi^4(x) dx - \frac{1}{2} \int \psi(x) \tilde{J}^{-1}(x,y) \psi(y) dx dy$$

Prima di procedere è meglio scrivere in una forma più comoda \tilde{J}^{-1} .

$$\tilde{J}^{-1}(k, k') = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} e^{ik'y} \tilde{J}(x-y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(k-k')x} e^{ik'y} \tilde{J}(x) dx dy = \delta(k, k') \int e^{-ikx} \tilde{J}(x) dx = \delta(k, k') \tilde{J}^{-1}(k)$$

$$\tilde{J}^{-1}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\delta(k-k')}{\tilde{J}(k)} e^{ikx} e^{-ik'y} dk dk' = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{\tilde{J}(k)} dk$$

Visto che $\Delta \tilde{J} \Delta \tilde{J} = \frac{1}{2}$ e visto che $\Delta \tilde{J} \neq 0$, allora $\Delta \tilde{J}^{-1} = +\infty$, ma questo significa che $\Delta \tilde{J}^{-1} \neq 0$, quindi possiamo scrivere \tilde{J}^{-1} come una somma di operatori locali invariante sotto rotazioni.

$$\left(\tilde{J}^{-1} \right) \psi \psi^* = A(T) |\psi(x)|^2 + B(T) |\nabla \psi(x)|^2 + C(T) |\nabla^2 \psi(x)|^2 + \dots$$

Perché l'Hamiltoniano dipende da T?

Per calcolare $A(T)$ basta

imporre $x=y$, quindi:

$$A(T) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk}{\tilde{J}(k)}$$

$$F[\psi] = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{6} \psi^4(x) - [1 + A(T)] \psi^2(x) + \dots \right] dx$$

$1 + A(T) > 0 \rightarrow \psi = 0$ è un punto di massimo \rightarrow Ferromagnetico

$1 + A(T) < 0 \rightarrow \psi = 0$ è un punto di minimo \rightarrow Paramagnetico

Questo perché $1 + A(T)$ indica

la concavità della funzione

2 $\psi = 0$

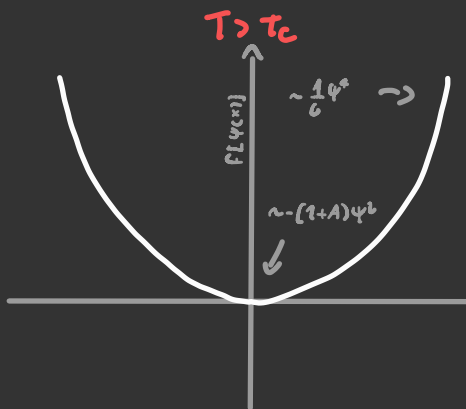
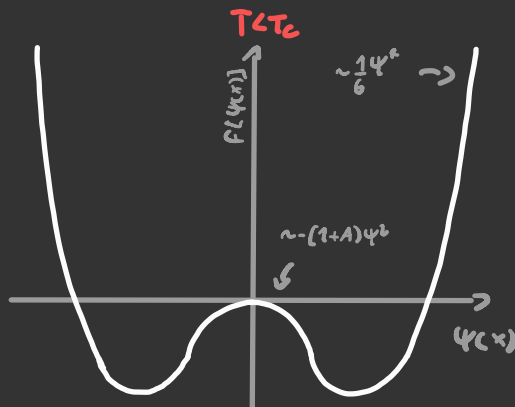
Nel modello di Ising nel quale ogni spin interagisce con quello confinante

$$A(T) = \frac{k_B T}{J\gamma}$$

È la temperatura critica

diventa

$$T_c = \frac{J\gamma}{k_B}$$



Argomento di Peierls

Supponiamo di avere un sistema di spin descritte dall'ham.

$$H = \sum_{i,j} \frac{J}{|i-j|^r} S_i S_j$$

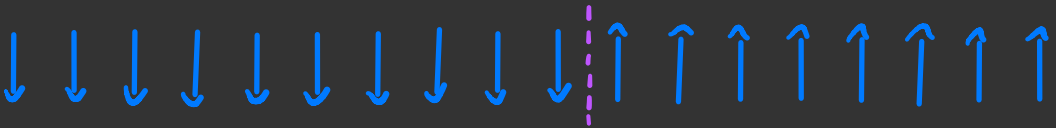
Se $r = \infty \rightarrow$ Modello di Ising "standard"

Se $r = 0 \rightarrow$ Interazioni a raggio infinito

Vogliamo studiare al variare di r quanto il nostro sistema è ferromagnetico, per fare ciò prendiamo un sistema fatto così:



E vogliamo vedere se vuole spontaneamente diventare così:

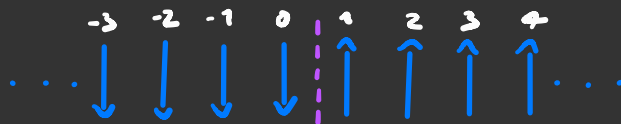


Cominciamo con $r = \infty$. In questo caso $\delta E = 2J$, visto che la "barriera" può capitare ovunque $\delta S = \ln N$, quindi

$$\delta F = \delta E - T \delta S < 0 \quad \text{Per } N \rightarrow \infty$$

Quindi questo sistema tenderà a formare barriere e ad essere paramagnetico a ogni temperatura

Per $\gamma < 100$



$$\delta E = 2J \sum_{n=-N/2}^0 \sum_{n=1}^{N/2} \frac{1}{|n-n'|} \gamma \approx 2J \int_{-N/2}^0 \int_0^{N/2} \frac{1}{|h-n|} \gamma \, dn' dh$$

Ho supposto $\gamma \neq 2$ perché senza spunta fuori il logaritmo

$$= 2J \int_{-N/2}^0 \frac{|n'-n|^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_0^{N/2} dn = \frac{2J}{1-\gamma} \int_{-N/2}^0 \left| \frac{N}{2} - n \right|^{1-\gamma} - \ln^{1-\gamma} dn$$

$$= \frac{2J}{1-\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \left[\left| \frac{N}{2} - n \right|^{2-\gamma} - \ln^{2-\gamma} \right]_{-N/2}^0 \approx \frac{2J}{1-\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \left[N^{2-\gamma} - 0^{2-\gamma} \right]$$

Quindi $\delta E \begin{cases} \gamma > 2 & \text{diverge } \rightarrow \infty \\ \gamma = 2 & \text{diverge } O(\ln N) \\ \gamma < 2 & = O(N^{2-\gamma}) \end{cases}$

$$\delta F = \delta E - T \delta S = \delta E - T \ln N$$

Quindi per $\begin{cases} \gamma > 2 \rightarrow \text{paramagnete} \\ \gamma < 2 \rightarrow \text{ferromagnete} \\ \gamma = 2 \rightarrow \text{dipende} \end{cases}$

Adesso vediamo il caso 2D

Non l'ho capito (Lezione 15 ultimi 30 min)

Correlazione

Un integrale utile in questo caso è questo

$$\int v_2 v_1 e^{-\langle v | S | v \rangle} d\vec{v} = \frac{S_{21}^{-1}}{2} \int e^{-\langle v | S | v \rangle} d\vec{v}$$

S è autoaggiunta e definita positiva

Questa è la dimostrazione

Faccio questo cambio di variabili $|\vec{v}\rangle = S^{\frac{1}{2}} |\vec{v}'\rangle$ $v_2 = S_{2c}^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_c$ $v_1 = S_{1d}^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_d$

$$\begin{aligned} \int v_2 v_1 e^{-\langle v | S | v \rangle} d\vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{\det(S)}} \int (S_{2c}^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_c) (S_{1d}^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_d) e^{-v^2} d\vec{v}' \\ &= \frac{S_{2c}^{\frac{1}{2}} S_{1d}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\det(S)}} \int \tilde{v}_c \tilde{v}_d e^{-v^2} d\vec{v}' = \frac{S_{2c}^{\frac{1}{2}} S_{1d}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\det(S)}} \delta_{cd} \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2} = \frac{S_{21}^{-1}}{2} \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det(S)}} = \frac{S_{21}^{-1}}{2} \int e^{-\langle v | S | v \rangle} d\vec{v} \end{aligned}$$

Questa uguaglianza vale anche per gli spazi di Hilbert

$$\int \psi(x) \psi(x') e^{-\langle \psi | S | \psi \rangle} D\psi = \frac{S^{-1}(x, x')}{2} \int e^{-\langle \psi | S | \psi \rangle} D\psi$$

Questo risultato ci permette calcolare la correlazione di variabili termodinamiche, ad esempio

$$\langle \psi(x) \psi(x') \rangle = \int \psi(x) \psi(x') e^{-F(\psi)} D\psi$$

Dove

$$F(\psi) = \int \frac{a}{2} \psi^2(x) + \frac{c}{2} |\nabla \psi(x)|^2 d\vec{x}$$

x sta in uno spazio d-dimensionale

In questo caso $S = \frac{1}{2} (a + c |\nabla|^2)$ Abuso di notazione

Se passiamo in trasformata di Fourier

$$F(\psi) = \int \frac{a}{2} \psi^2(k) + \frac{c k^2}{2} \psi^2(k) d\vec{k} = \int \frac{a + c k^2}{2} \psi^2(\vec{k}) d\vec{k}$$

Quindi: $\mathcal{F}[S] = \frac{2 + c k^2}{2} \delta(k-k')$ ← Perché la matrice è diagonale

Adesso invertiamo e entitrasformiamo

$$S^{-1}(x, x') = 2 \int \frac{\delta(k-k')}{2 + c k^2} e^{i k x'} e^{-i k x} d\vec{k} d\vec{k}' =$$

$$= 2 \int \frac{e^{i k(x'-x)}}{2 + c k^2} d\vec{k} \propto \frac{e^{-\frac{|x-x'|}{L}}}{|x-x'|^{d-2}}$$

Ho cercato il risultato su internet

Dove $L = \sqrt{\frac{2}{c}}$ e d è la dimensione dello spazio in cui sta \vec{x}

Provate a fare i conti per esteso

Se proviamo ad applicarlo ad un sistema magnetico si vede che

$$\chi(r) \equiv \text{Cov}(m(r_0), m(r_1)) \propto \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r^{d-2+\eta}}$$

dove $\eta = 0$, $L \propto |t|^\nu$
 Nuovo esp. critico \uparrow $e^{-\frac{r}{L}}$ $\nu = -1/2$
 che viene da modelli migliori e esperimenti

Quindi vicino alla temperatura critica, da distanza di correlazione L diverge a $+\infty$.

L'alta correlazione implica che ci sono dei modi collettivi molto grandi intorno al punto critico.

Visto che tutte queste particelle si muovono all'unisono diverse variabili termodinamiche divergono, e il modo in cui divergono è determinato dagli esponenti critici.

Aggiungere criterio di Ginzburg

Esponenti critici

Fin ora abbiamo incontrato fin troppi esponenti critici, però abbiamo appena visto che, in linea di principio, dovrebbero venire tutti dalla $\chi(r)$, quindi è logico pensare che non siano tutti indipendenti tra di loro.

Ad esempio $\chi(\eta=0, T=T_c) = \frac{N}{V} \frac{1}{k_B T_c} \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \chi \sim \epsilon^\gamma$

Ma c'è anche vero che

$$\chi \sim \frac{\beta}{V} \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0 = \beta \frac{N}{V} \int \chi(r) dx^d dr$$

$$\propto \int \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r^{d+\eta-2}} r^{d-1} dr = \int r^{1-\eta} e^{-\frac{r}{L}} dr = L^{\eta-2} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{1-\eta} e^{-x} dx}_{\text{cost}}$$

Visto che $L \sim \epsilon^{\nu}$ ($\nu = -\frac{1}{2}$) abbiamo che

$$\chi \propto \epsilon^{\nu(\eta-2)} \propto \epsilon^\gamma$$

quindi:

$$\boxed{\nu(\eta-2) = \gamma}$$

Questa è definita "Uguaglianza di Fisher"



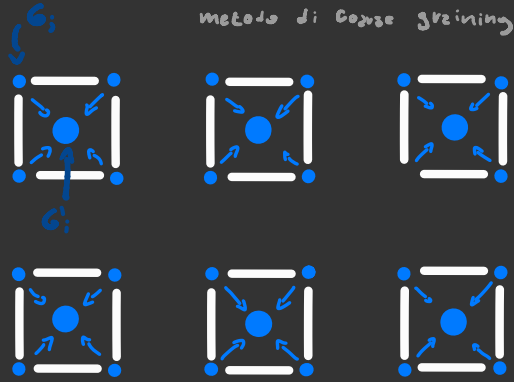
Quindi per scoprire le relazioni tra gli esponenti critici bisogna:

- Prendere l'esponente critico γ di una variabile Termodinamica.
- Calcolare la relazione che c'è tra la variabile Termodinamica e la lunghezza di correlazione L
- Uguagliare gli esponenti

Aggiungere un'altra
pesata per gli altri
esp. crit.

Rinormalizzazione

Prendiamo un reticolo di spin, se siamo vicino al punto critico la lunghezza di correl. è maggiore del passo reticolare, quindi possiamo trattare 4



spin adiacenti come un tutt'uno (vedi la figura), se stiamo in d -dimensioni, allora un blocco di spin comprende 2^d spin, la variabile di spin del blocco viene definita S_i (Sono quelli blu)

Il valore di S_i è determinato da un voto di maggioranza tra gli spin s_j attorno ad esso. In caso di pareggio gli s_j assegna il valore dello spin in base a sinistra, ma tanto gli spin sono correlati, quindi non succede mai

Se il nostro modello è formulato bene ci aspettiamo che la funzione di partizione è scrivibile così

$$Z = \sum_{\{s\}} \exp[-\beta H_w\{s\}] \rightarrow Z' = \sum_{\{S\}} \exp[-\beta H_w\{S\}]$$

e che il sistema descritto da Z' si comporti in un modo analogo a Z vicino al punto critico

Definisco F l'energia libera media per particella ed essa dipende da t e h . Visto che l'energia libera totale deve essere costante

$$N F(t, h) = N' F(t', h')$$

Il motivo per cui $t, h \rightarrow t', h'$ è che visto che la lunghezza di correlazione è costante, gli spin S_i sono più correlati tra di loro rispetto agli spin S_j , quindi è come se il sistema fosse più lontano dal punto critico.

Visto che t, h, t', h' sono piccoli possiamo supporre che

Ora come ora non sappiamo quanto valgono γ_t e γ_h

$$t' = |^{\gamma_t} t \quad h' = |^{\gamma_h} h$$

l rappresenta di quante volte la distanza tra gli spin aumenta quando si passa da S a S'

Mettendo tutto assieme abbiamo che l'equazione a inizio pagina diventa

$$F(t, h) = |^{-d} F(|^{\gamma_t} t, |^{\gamma_h} h)$$

↙ Non dipende da l

Se si guarda attentamente il primo termine non dipende da l , mentre il secondo apparentemente sì.

Si può dimostrare che questo significa che

$$F(t, h) = t^{-\frac{Kd}{\gamma_t}} h^{(K-1)\frac{d}{\gamma_h}} \tilde{F}(h \gamma^{-\frac{\gamma_h}{\gamma_t}})$$

K e \tilde{F} vanno determinate

Qua sotto c'è la dim.

Supponiamo di avere una funzione $F(t, h) = F(|^{\gamma_t} t, |^{\gamma_h} h) = F(|^{\frac{\gamma_t}{\gamma_h}} t, |^{\frac{\gamma_h}{\gamma_h}} h)$

l'unico modo per far sì che $F(|^{\frac{\gamma_t}{\gamma_h}} t, |^{\frac{\gamma_h}{\gamma_h}} h)$ non dipenda da l è che dipenda

dal rapporto degli argomenti: $F(|^{\frac{\gamma_t}{\gamma_h}} t, |^{\frac{\gamma_h}{\gamma_h}} h) = F(h^{\frac{\gamma_h}{\gamma_h}} / t^{\frac{\gamma_t}{\gamma_h}})$

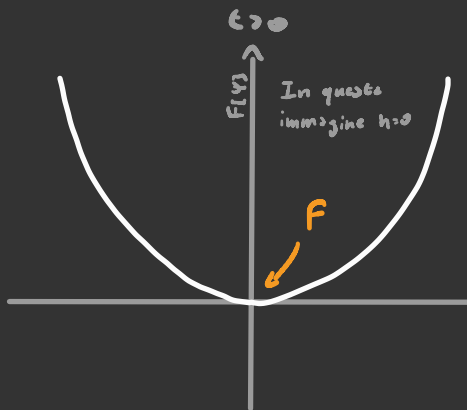
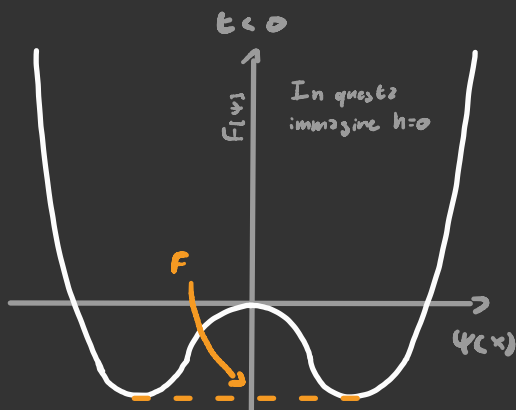
Se invece $F(t, h) = |^d F(|^{\gamma_t} t, |^{\gamma_h} h)$, allora $F(t, h) = t^{-\frac{d}{\gamma_t}} h^{-(d-1)\frac{d}{\gamma_h}} F(h t^{-\frac{\gamma_h}{\gamma_t}})$ $d \in \mathbb{R}$

A questo punto ci basta confrontare quest'ultima formula con come si comporta l'energia libera vicino al punto critico.

Sti conti non li ho fatti prima, ma tanto ci tornerò da analisi II

Noi sappiamo che

$$F(\epsilon, h) = \min_{\psi} \left[\frac{\epsilon}{2} \psi^2 + u \psi^3 - h \cdot \psi \right] = \begin{cases} -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^2}{4} & \text{per } h=0 \quad \epsilon < 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{4}} \left(\frac{h}{4} \right)^{3/2} & \text{per } h \neq 0 \quad \epsilon = 0 \end{cases}$$



con modelli più raffinati si ottiene che

$$F(\epsilon, h) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^{2-d}}{4} & \text{per } h=0 \quad \epsilon < 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{4}} \left(\frac{h}{4} \right)^{3/2} & \text{per } h \neq 0 \quad \epsilon = 0 \end{cases}$$

Eguagliandolo con $F(\epsilon, h) = \epsilon^{-\frac{K+d}{\gamma_c}} h^{\frac{(K-1)d}{\gamma_c}} \tilde{F}(h \epsilon^{-d})$

Usando la prima equazione del sistema scopriamo che le due formule possono essere equivalenti se $K=1$, $d/\gamma_c = 2-d$ e $\tilde{F}(0) = 1/4$.

con la seconda abbiamo che

$$t^{2-\Delta} \tilde{F}(t\omega) = -\frac{3}{\sqrt{4}} \left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \tilde{F}(t\omega) = -\frac{3}{\sqrt{4}} \left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\Delta-2}$$

Inoltre, visto che $\tilde{F}^2 = \tilde{F}^2 (h t^{-\Delta})$

$$(h t^{-\Delta})^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}} t^{\Delta-2} \rightarrow \frac{2}{3} \Delta = 2 - \Delta$$

Trattamento generale

Il gruppo di rinormalizzazione ci permette di trovare i punti critici di **qualsunque** sistema termodinamico.

Per fare ciò iniziamo con l'Hamiltoniana più generica che c'è

$$\beta H = \int \frac{t}{2} \psi^2 + u \psi^4 + v \psi^6 + \dots + \frac{K}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{L}{2} |\nabla^2 \psi|^2 + \dots d^d x$$

Un sistema del genere è specificato da due si trova nello spazio $S = (t, u, v, \dots, K, L, \dots)$

A questo punto si fa il coarse graining, che equivale a raggruppare le particelle vicine in un'unica particella.

Questo matematicamente si ottiene

- Riscalandolo $x' = lx$

- Coarse graining $\psi'(x') = \frac{1}{l^d} \int_{\text{celle di lunghezza l centrate in } x'} \psi(x) d^d x$

- Rinormalizzare $\psi'(x') \rightarrow \frac{1}{l} \psi'(x')$

Quest'ultimo passaggio serve affinché i range dei valori restino gli stessi, ad esempio in un sistema di spin vogliamo che dopo il coarse graining gli spin si abbiano valori ± 1

A questo punto l'Hamiltoniana riscalata è

$$\beta H' = \int \frac{t'}{2} \psi'^2 + u' \psi'^4 + v' \psi'^6 + \dots + \frac{K'}{2} |\nabla \psi'|^2 + \frac{L'}{2} |\nabla^2 \psi'|^2 + \dots d^d x'$$

Dove $t' = t(t, u, v, \dots, K, L, \dots)$ e così anche per gli altri parametri.
 ← Significa che dipende da l

Quindi $S' = R_1 S$ dove R_1 rappresenta come cambiano i parametri dell'Hamiltoniana quando viscolo di l e questi operatori formano un gruppo

$$R_{1,1} \circ R_1 = R_{1,1}$$

Il punto critico S^* sarà quel punto tale che

$$S^* = R_1 S^*$$

Visto che la lunghezza di correlazione viene ridotta di l volte vuol dire che al punto critico $L = +\infty$ oppure 0

$$L(S') = L(R_1 S) = l L(S) \rightarrow L(S^*) = l L(S^*)$$

Visto che studiare come si comporta $R_1 S$ per ogni S è un casino ci limiteremo a studiare la zona vicina al punto critico.

$$S_i^* + \delta S_i = S_i^* + (R_1)_{2,1} \delta S_j$$

\leftarrow Matrice che approssima R_1 vicino al punto critico

Ormai abbiamo capito che appena vediamo una matrice dobbiamo diagonalizzarla.

Siano $\{O_i\}$ gli autovettori, visto che R è un gruppo

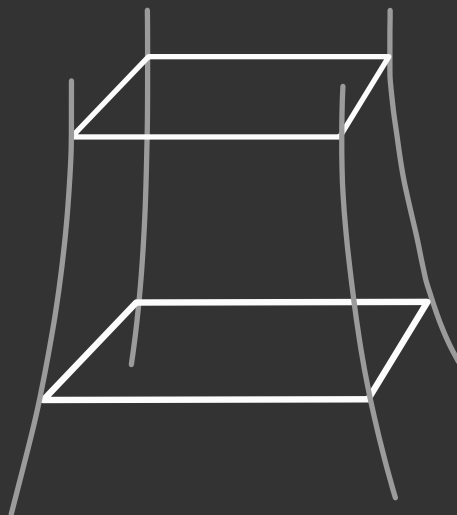
$$R_1 R_1 O_i = \lambda_i(1) \lambda_i(1') O_i = \lambda_i(1 \cdot 1') O_i$$

Inoltre visto che $\lambda_i(1) = 1$ abbiamo che

$$\lambda_i(1) = 1^{\gamma_i}$$

Dove γ_i è un esponente ancora da determinare

Dz complete
Kardar pag 65



Fisica Statistica Quantistica

Lezione XVIII



Al centro della fisica statistica quantistica c'è la
matrice di densità

$$\rho = \sum_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}| p_{\lambda}$$

↳ Probabilità di trovarsi
nello stato ψ_{λ}

L'evoluzione temporale di ρ è data da

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$$

È il valor medio di un operatore generico \hat{O} c'

$$O = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \langle \psi_{\lambda} | \hat{O} | \psi_{\lambda} \rangle = \text{Tr}[\rho O]$$

Nell'ensemble microcanonico la Funzione donda del nostro
sistema deve rispettare il postulato di equiprobabilità:

$$|\psi\rangle = \sum c_n |\phi_n\rangle \quad \begin{cases} \text{se } E < E_n < E + \Delta E & c_n = \text{cost} \\ \text{altrimenti:} & c_n = 0 \end{cases}$$

E le fasi devono essere scambiate tra di loro, quindi
la matrice di densità è

$$\rho = \frac{1}{\Gamma(E)} \sum_{E < E_n < E + \Delta E} |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

e l'entropia è $S = k_B \ln \Gamma(E)$

Per quanto riguarda l'ensemble canonico la matrice di densità è

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad Z = \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}]$$

E infine nell'ensemble grand canonico

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad Z = \text{Tr} [e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}] = \sum_n z_n e^{\beta \mu n}$$

Fin qui le differenze con la fisica statistica classica sono minime, ma in meccanica quantistica le particelle possono essere fermioni o bosoni.

Vediamo come si comportano queste particelle supponendo che non siano interagenti.

Per semplicità mettiamole dentro un cubo di lato L .

Le funzioni d'onda sono

$$|\vec{p}\rangle = L^{-\frac{3}{2}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad \text{dove} \quad \vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} \vec{n} \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

$$\text{Per } V \rightarrow +\infty \quad \sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3\vec{p}$$

L'energia e il numero totale di tutte queste particelle diventa

$$E = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \quad N = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}$$

$$n_{\vec{p}} \text{ può valere } \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{per bosoni} \\ 0, 1 & \text{per fermioni} \end{cases}$$

Ho tenuto tutti i discorsi sulla distribuzione di Boltzmann perché non c'è da scrupolo e niente altro

Adesso calcoliamoci la funzione di partizione

Degenerazione \rightarrow

$$z_{\eta} = \sum_{\{n_p\}} g(\{n_p\}) e^{-\frac{E(\{n_p\})}{k_B T}}$$

La degenerazione g rappresenta quanto ogni stato n_p è degenere, ad esempio se c'è da considerare spin o polarizzazione. Per adesso imponiamo che $g=1$ e buona notte.

Calcolare la funzione di partizione è difficile visto che dobbiamo assicurarci che $\sum n_p = n$. Però se ci calcoliamo la funzione di grandipartizione sto problema sparisce

$$Z = \sum_n z_{\eta} e^{\beta \mu n} = \sum_n \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta(E(\{n_p\}) - \mu n)} = \sum_n \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta \sum_p n_p (\epsilon_p - \mu)} = \prod_p \sum_{n_p} e^{-\beta n_p (\epsilon_p - \mu)}$$

Adesso dobbiamo distinguere tra il caso bosonico e quello fermionico.

Il ragionamento dietro a questa uguaglianza è lo stesso usato prima nel modello di Ising. Dopo forse scrivo la dimostrazione

$$\sum_{n_p} e^{-\beta n_p (\epsilon_p - \mu)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)}} & \text{Per i Bosoni: Serie Geometrica} \\ 1 + e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)} & \text{Per i Fermioni: Somma solo } n_p = 0, 1 \end{cases}$$

$$\ln Z = \begin{cases} -\sum_p \ln[1 - e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)}] & \text{Per i Bosoni} \\ \sum_p \ln[1 + e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)}] & \text{Per i Fermioni} \end{cases}$$

Adesso calcoliamoci il numero medio di particelle

$$N = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} N e^{-\beta(H - \mu N)} \quad \text{se definisco } z \equiv e^{\beta \mu}$$

$$N = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} N z^N e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} z \frac{\partial}{\partial z} z^N e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{\text{stati}} z^N e^{-\beta H} = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z$$

La differenza tra la termodinamica dei bosoni e fermioni diventa evidente quando si calcola il numero medio di particelle

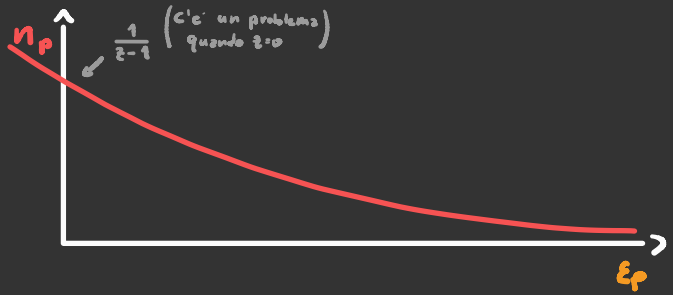
Distribuzione di Bose-Einstein

Se non ti ricordi il segno ricordati che la Fermi-Dirac è quello con +10

$$N = - \sum_{\vec{p}} z \frac{\partial}{\partial z} \ln[1 - z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}] = \sum_{\vec{p}} \frac{z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}}{1 - z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}$$

Da ciò possiamo dire che il numero medio di particelle all'impulso \vec{p} è

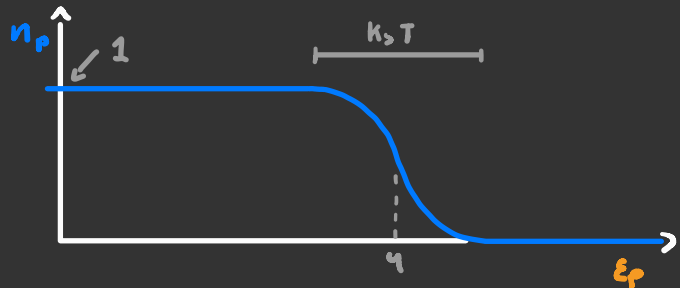
$$n_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}$$



Distribuzione di Fermi-Dirac

I conti sono identici, il risultato è che

$$n_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} + 1}$$



Potenziale Statistico

I fermioni avendo la funzione d'onda antisimmetrica non possono stare nello stesso stato $\psi(x)\psi(x) = -\psi(x)\psi(x) = 0$

Vogliamo vedere se sto fenomeno è rappresentabile tramite una sorta di potenziale statistico, e già che ci siamo vediamo che fanno i bosoni. È importante sottolineare che le particelle sono comunque non interagenti visto che nell'Hamiltoniana non c'è alcun termine di interazione.

Il modo in cui il potenziale statistico è collegato alla probabilità che due particelle si trovino accanto è

$$e^{-\beta V_S(r)} \propto \underbrace{V(r_1, r_2) P(r_1, r_2)}_{\substack{\text{Probabilità che ci sia una} \\ \text{particella in } r_1 \text{ e una in } r_2}}$$

$r = r_1, r_2$

Questo perché la probabilità di trovarsi in un certa posizione per Boltzmann è proporzionale a $\exp[-\beta V(x)]$.

Quindi quello che dobbiamo fare è calcolare la matrice di densità e da lì calcolarci V_S

Per iniziare il calcolo partiamo dalla base degli autostati dell'energia visto che

$$P = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

Definisco $\Psi_E(r_1, \dots, r_N)$ un autostato di energia E dell'intero sistema

$$E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_N^2)$$

Vettori d'onda di singola particella

Adesso vediamo che forma ha Ψ_E in termini dei vettori d'onda di singola particella $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

$$\Psi_E(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{P}} [\text{Parità della permutazione}] P \{ u_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1) u_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_2) \dots u_{\mathbf{k}_N}(\mathbf{r}_N) \}$$

Normalizzazione, solo che con i bosoni funziona male

Permutazione delle posizioni

Somma su tutte le permutazioni

La parità della permutazione per i bosoni vale sempre 1 e per i fermioni vale 1 se avviene un numero pari di permutazioni e invece -1 se il numero di permutazioni è dispari.

Gli stati posizione scritti in termini delle Ψ_E sono

$$|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\rangle = \sum_{\mathbf{E}} \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) |\Psi_{\mathbf{E}}\rangle$$

Quindi la matrice di densità calcolata rispetto a 2 stati posizione

$$\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \rho | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle = \sum_{\mathbf{E}} e^{-\beta E} \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N) =$$

la somma su tutte le possibili energie diventa una somma su tutti i possibili impulsi

$$\sum_{\mathbf{E}} e^{-\beta E} = \left(\sum_{\mathbf{k}_1} e^{-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_1^2}{2m}} \right) \left(\sum_{\mathbf{k}_2} e^{-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_2^2}{2m}} \right) \dots \left(\sum_{\mathbf{k}_N} e^{-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_N^2}{2m}} \right)$$

A questo punto basta prendere tutte le funzioni d'onda di singola particella con gli stessi impulsi, moltiplicarle tra di loro e poi sommare su tutte le possibili permutazioni degli indici

$$\frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{P}} \left\{ \sum_{\mathbf{k}_1} \exp \left[-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_1^2}{2m} + i \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{P} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \right] \dots \right.$$

$$\left. \sum_{\mathbf{k}_N} \exp \left[-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_N^2}{2m} + i \mathbf{k}_N \cdot (\mathbf{P} \mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_N) \right] \right\}$$

È possibile approssimare questi termini così

$$\sum_{\mathbf{k}} \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p}\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right] \simeq \frac{V}{(2\pi)^3} \int \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p}\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right] d^3\mathbf{k} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^3} F(\mathbf{p}\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{dove } F(\mathbf{x}) \equiv e^{-\frac{\hbar^2 \mathbf{x}^2}{2m}} \quad \text{e } \lambda \equiv \hbar \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}$$

Quindi:

$$\langle r_1, \dots, r_N | P | r'_1, \dots, r'_N \rangle = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \sum_P [P] \prod_i F(\mathbf{p}r_i - r'_i)$$

Se vogliamo calcolarlo rispetto alle stesse posizioni

$$\langle r_1, \dots, r_N | P | r_1, \dots, r_N \rangle = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \sum_P [P] \prod_i F(\mathbf{p}r_i - r_i)$$

Nelle sommatorie delle permutazioni il termine dominante è quello senza permutazioni, poi quello con una sola permutazione e così via...

$$\sum_P [P] \prod_i F(\mathbf{p}r_i - r_i) = 1 \pm \sum_{i < j} F_{ij} F_{ji} + \sum_{i < j < k} F_{ij} F_{jk} F_{ki} \pm \dots$$

Se facciamo il conto solo fino al primo ordine

$$\langle r_1, \dots, r_N | P | r_1, \dots, r_N \rangle \simeq \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \left[1 \pm \sum_{i < j} F^2(r_i - r_j) \right]$$

Quindi: nel caso di 2 particelle

$$\langle r_1, r_2 | P | r_1, r_2 \rangle = \frac{V^2}{2\lambda^6} \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi\beta V^2}{\lambda^4}} \right)$$

Non è normalizzata! ↪

Questa correlazione è quella che differenzia le statistiche quantistiche con quelle classiche.

In particolare nel caso classico $\langle v_1, v_2 | \rho | v_1, v_2 \rangle$ non dipende da v_1 e v_2 , quindi possiamo dire di essere nel limite classico quando

$$\frac{2\pi v^2}{\lambda^3} \gg 1 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda^3} \left(\frac{v}{N} \right)^2 \gg 1$$

Siccome che mi sono rotto le palle di fare conti ecco qui la matrice di densità normalizzata

$$\langle v_1, v_2 | \rho | v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{V} \left(V \pm \frac{\lambda^3}{2v^2} \right)^{-1} \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi v^2}{\lambda^3}} \right)$$

Questo significa che

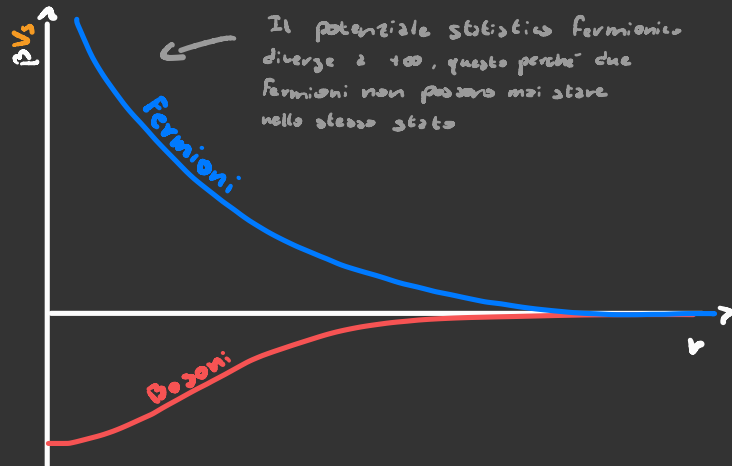
$$v_s = -k_B T \ln \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi v^2}{\lambda^3}} \right) + k_B T \ln \left[V \left(V \pm \frac{\lambda^3}{2v^2} \right) \right]$$

Costante, quindi non conta

Il grafico è una cosa del genere.

Dal grafico si nota che il principio di Pauli tende a far respingere tra di loro i Fermioni.

I Bosoni invece tendono ad attrarsi tra di loro. questo sarà utile per spiegare la condensazione di Bose-Einstein



Corpo Nero

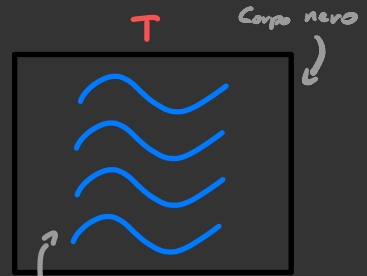
Lezione XX

Il corpo nero è la più semplice applicazione di statistica dei bosoni

Il numero medio di fotoni a un determinato \vec{k} è

$$n_{\vec{k}} = \frac{2}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

← dato dalla polarizzazione
← Bose-Einstein



← Campo E.M. all'equilibrio termico col corpo nero

Il potenziale chimico è nullo perché si all'equilibrio termico un fotone può essere assorbito dal muro e sputare altri 2 fotoni a diversa frequenza, quindi N cambia, ma E e S no.

Quindi $\mu = 0$

← Visto che siamo all'eq

$$E = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega n_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \hbar \omega n_{\vec{k}} d^3 k = \frac{V}{(2\pi c)^3} \int_0^{\infty} \frac{8\pi \hbar \omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

$$= \frac{V \hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad \text{visto che } \int \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad E = \frac{V \pi^2 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3}$$

← Spettro del corpo nero

Altri discorsi base sulla distribuzione di Bose-Einstein sono quelli sui fononi che stanno sul quaderno di fisica dello stato solido

Inserire grafico dello spettro di corpo nero

Equazioni di Stato

Prima avevamo scoperto che per il gas perfetto

$$PV = 3Nk_B T$$

Adesso vogliamo vedere che succede nel caso quantistico.

Noi sappiamo che

Energia libera
di Gibbs

+ per i fermioni
- per i bosoni

$$\ln Z = \beta \Omega = \pm \sum_p \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}]$$

Visto che $PV = -\Omega$

$$\frac{PV}{k_B T} = \mp \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}] d^3 p = \mp \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \ln [1 \pm z e^{-\frac{\epsilon}{2m}}] 4\pi p^2 dp =$$

$$= \mp \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{m}{p}\right)^{3/2} 4\sqrt{2}\pi \int_0^{+\infty} \ln [1 \pm z e^{-x}] \sqrt{x} dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{p^2}{2m} \\ dx = \frac{p dp}{m} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2V}{\lambda^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2} z e^{-x}}{1 \pm z e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Integrare} \\ \text{per parti} \end{array} \right. \quad \lambda = \hbar \sqrt{\frac{2\pi m}{k_B T}}$$

$$= \frac{2V}{\lambda^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{z^{-1} e^x \pm 1} dx \quad \text{Definire } F_m^\pm(z) = \frac{1}{m-1!} \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{z^{-1} e^x \pm 1} dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} F_{3/2}^\pm(z) \quad \text{Allo stesso modo } N = \frac{V}{\lambda^3} F_{1/2}^\pm(z)$$

è possibile calcolare

Lo sviluppo in serie di queste due funzioni attorno a $z=0$ è

$$F_{3/2}^\pm(z) = \frac{N}{V} \lambda^3 = z \mp \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} \mp \dots \quad F_{1/2}^\pm(z) = \frac{2}{3} \frac{P\lambda^3}{k_B T} = z \pm \frac{z^2}{2^{1/2}} + \frac{z^3}{3^{1/2}} \mp \dots$$

Adesso che abbiamo queste due equazioni possiamo usare la prima per calcolare z e fare il rapporto delle due per ottenere l'eq. di stato

$$PV = \frac{3}{2} Nk_B T \left[1 \mp \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{V}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^{3/2}}\right) \left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^2 \pm \dots \right]$$

Condensazione di Bose-Einstein

Prima zvezma visto che per il gas perfetto di Bosoni:

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{z}{\lambda^3} F_2^-(z) \quad N = \frac{V}{\lambda^3} F_1^-(z)$$

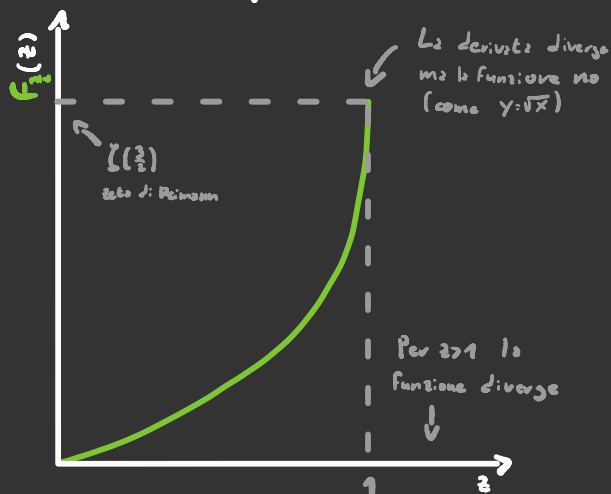
Da cui

$$F_2^-(z) = z + \frac{z^2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots \quad F_1^-(z) = z + \frac{z^2}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

Da ora in poi non metterò più il simbolo - sopra la F.

Se andiamo a vedere che forma ha $F_2(z)$ e qualcosa del genere

Ma allora che succede se io metto un numero di particelle per unità di volume maggiore di $\frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$?



Visto che sbalza tutto ci rendiamo conto che c'è una transizione di fase, che è la condensazione di Bose-Einstein.

Questo significa che

$$N = N_0 + N^* = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{m k_B T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} F_2(1)$$

↑
↑
↑

Numero Totale di particelle Particelle condensate Particelle rimanenti

Si può ottenere da questa equazione che la temperatura critica è

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V F_{3/2}(1)} \right)^{2/3}$$

Adesso però sorge il dubbio: dove stanno esattamente le particelle condensate?

Stanno tutte nello stato fondamentale, questo è dovuto al fatto che $\mu = 0$, quindi ogni particella che viene aggiunta deve stare nello stato a $E = 0$.

Però se guardiamo queste 2 equazioni sembra che tutte le variabili macroscopiche dipendano solo dalla fase non condensata

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} F_{5/2}(z)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} F_{3/2}(z)$$

Il motivo è che per calcolarle abbiamo fatto l'approssimazione

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int dp$$

Che è pessimo quando si lavora con i primi livelli energetici. Visto che ci importa solo il primo livello energetico possiamo dire che

$$\ln Z = - \sum_p \ln[1 - z e^{-\beta \epsilon_p}] \approx \underbrace{-\ln(1-z)}_{\text{Termine stato fond.}} - \underbrace{\frac{V}{h^3} \int \ln[1 - z e^{-\beta \epsilon_p}] dp}_{\text{Il termine di prima}}$$

A questo punto possiamo aggiungere alle equazioni di stato il contributo dello stato fondamentale

Equilibrio, non diverge

$$\frac{PV}{k_B T} = \ln(1-z) + \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} F_{5/2}(z)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{\lambda^3} F_{3/2}(z)$$

Adesso risolviamo queste equazioni di stato.

Per farlo dobbiamo considerare separatamente i casi $z=1$ e $z < 1$

Nel caso $z=1$
$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

Questo significa che $\frac{z}{1-z} = N_0$, che nel limite termodinamico diverge.

Questo perché $1-z$ e V nel limite termodinamico divergono allo stesso modo. Quindi se mettiamo $1-z$ nel logaritmo parte costante V

l'altra equazione dice che

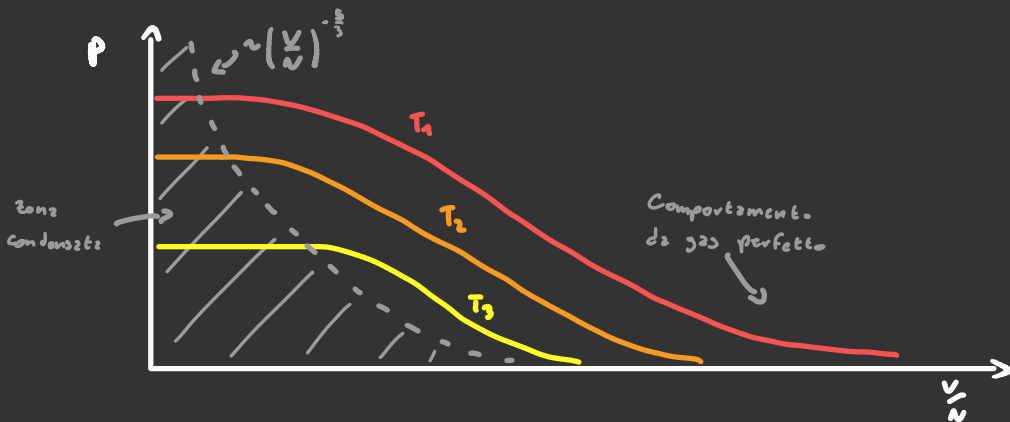
$$\frac{P}{k_B T} = \ln(1-z) + \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

Quindi a temperatura costante, quando siamo nella fase condensata la pressione è costante.

Per $z < 1$ possiamo ignorare i termini dovuti allo stato fondamentale e quindi possiamo riciclare l'equazione di stato ricavata nella sezione sulle equazioni di stato

$$PV = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{3/2}} \right) \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right)^2 + \dots \right]$$

Il grafico delle equazioni di stato nel piano PV è così



Ora vediamo che tipo di transizione di fase è la Condensazione di Bose-Einstein.

La prima peculiarità da considerare è che non capita mai che tutte le particelle sono condensate. Almeno che $T=0$

$$N = N_0 + N^*$$

\downarrow Particelle condensate
 \uparrow Particelle rimanenti
 Numero Totale di particelle

Di solito nell'acqua, ad esempio, se non siamo lungo una linea di transizione, la fase è una sola (solida, liquida, ...)

Per vedere se stiamo parlando di una transizione di fase vera e propria dobbiamo andare a vedere se ci sono discontinuità da qualche parte.

$$\frac{p^2}{2m} = \epsilon \quad d\epsilon = \frac{p}{m} dp \quad dp = \sqrt{m} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \quad p^2 dp = 2m^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$

$$E = \frac{V}{h^3} \int \frac{\epsilon d^3 p}{z^2 e^{\beta \epsilon} - 1} = 4\pi \frac{V}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{2m^{3/2} \epsilon^{3/2} d\epsilon}{z^2 e^{\beta \epsilon} - 1} = 8\pi \frac{V}{h^3} m^{3/2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} F_{5/2}(z)$$

Visto che c'è $F_{5/2}$ dobbiamo distinguere tra $z=1$ e $z < 1$

$$E = \begin{cases} 12\sqrt{\pi} \frac{V}{h^3} m^{3/2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) & \text{per } z=1 \\ 8V m^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{P_1^3}{h^3 k_B T} & \text{per } z < 1 \end{cases}$$

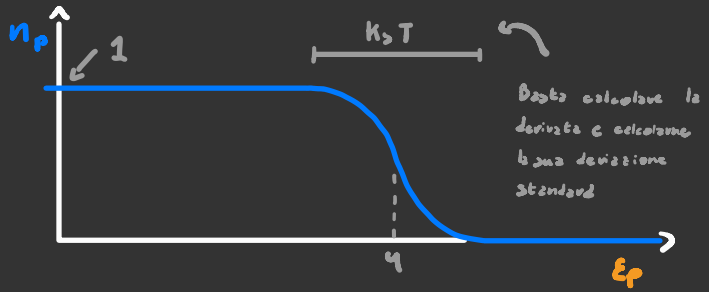
$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{N, V}$$

Completare discorso sulla capacità termica

Fermioni non Interagenti

Il numero medio di fermioni con impulso p

$$e^{-} \quad n_p = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1}$$



A basse temperature

questa funzione assume la forma a gradino, e la larghezza del gradino è $\sim k_B T$. Dopo lo dimostro

Iniziamo a trattare il caso a $T=0$ e poi effettuiamo delle correzioni per $T \neq 0$.

A $T=0$ il volume dello spazio delle fasi con $\epsilon_p < \mu$ è pieno, mentre al di fuori è vuoto. Il numero totale di particelle è

$$N = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{\vec{p}} \frac{g}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} = \frac{V}{h^3} \int_{\text{r.p.}} g d^3 p = \frac{3V}{h^3} \frac{\pi^2}{3} p_F^3 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Degenerazione} \\ \text{Impulso di Fermi} \end{array}$$

con $\frac{p_F^2}{2m} = \mu$ \leftarrow L'impulso di Fermi è l'impulso che c'è sulla superficie di Fermi

Molte quantità termodinamiche possono essere scritte

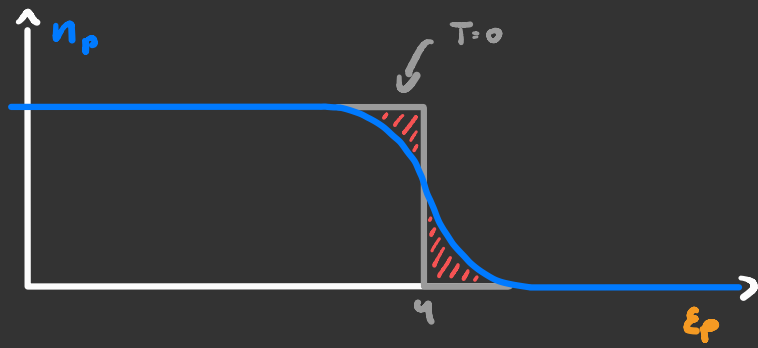
così

$$I = \frac{V}{h^3} \int \tilde{F}(\vec{p}) n_p(\epsilon_p) d^3 p = \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\epsilon) f(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon \equiv \int_0^{+\infty} F(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon$$

Come ad esempio l'energia

$$E = \frac{V}{h^3} \int \frac{\epsilon g d^3 p}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \frac{3}{5} N \mu \quad \leftarrow \text{Conti: noiosi}$$

Spesso e volentieri gli integrali in questa forma non sono calcolabili per $T \neq 0$



$$I = \int_0^{+\infty} F(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon$$

quindi cerchiamo di scriverlo sotto forma di serie attorno a

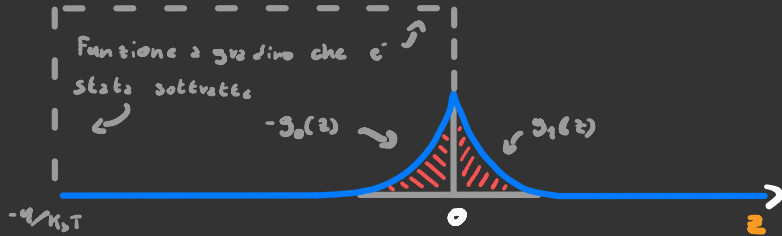
$$z \equiv \frac{\epsilon - \eta}{k_B T}$$

Supponiamo di voler calcolare

Calcolato a $T=0$

$$I = I_0 + \delta I$$

$$I_0 = \int_0^{\eta} F(\epsilon) d\epsilon$$



$$\delta I = k_B T \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta + k_B T z) [g_1(z) - g_0(z)] dz$$

Le funzioni g_0 e g_1 sono definite in questa immagine qui sopra

$$g_1(z) = -g_0(-z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

Adesso sviluppiamo F attorno a $z=0$. Visto che $g_1(z) - g_0(z)$ e' pari, abbiamo che solo i termini dispari sopravvivono

$$\delta I = 2k_B T \left[k_B T F'(\eta) \int_0^{+\infty} z g_1(z) dz + \frac{1}{3!} (k_B T)^3 F'''(\eta) \int_0^{+\infty} z^3 g_1(z) dz + \dots \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{6} F'(\eta) (k_B T)^2 + \frac{7\pi^4}{360} F'''(\eta) (k_B T)^4 + \dots$$

Questa cosa si chiama espansione di Sommerfeld

Aggiungere eq. di Stern

Proprietà Magnetiche dei Fermioni:

L'hamiltoniana di elettroni liberi non interagenti in campo magnetico è

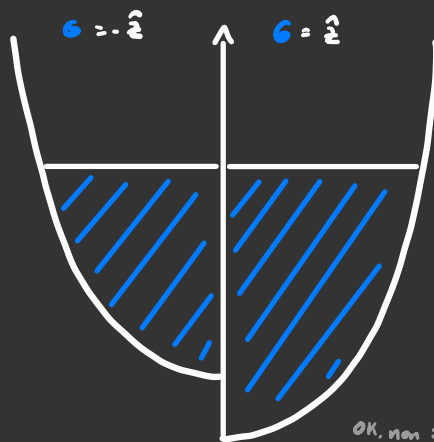
$$H = \sum_i^N \frac{1}{2m} (\vec{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A})^2 - 4.0 \vec{c}_i \cdot \vec{B}$$

Iniziamo ad analizzarlo levando il potenziale vettore \vec{A} .

$$H = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} - 4.0 \vec{c}_i \cdot \vec{B}$$

Se supponiamo che $\vec{B} = B \hat{z}$ abbiamo che la sfera di Fermi degli elettroni con spin \uparrow hanno un potenziale chimico più grande di $2\mu_B$ rispetto a quelli con spin \downarrow .

Questo perché il termine dovuto al campo magnetico crea un offset delle energie.



OK, non so bene come spiegarlo, guarda l'immagine

Se voglio misurare la magnetizzazione lungo l'asse \hat{z}

$$m = 4.0 \frac{N^{\uparrow} - N^{\downarrow}}{V}$$

Nel limite classico abbiamo che

$$\frac{N^{\uparrow}}{N^{\downarrow}} = e^{2\mu_B / k_B T}$$

Mentre in quello quantistico basta calcolare la differenza del volume delle due sfere di Fermi:

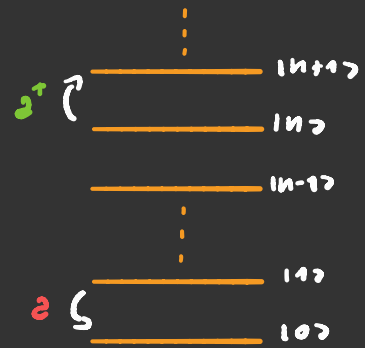
$$\frac{N^{\uparrow} - N^{\downarrow}}{V} = \frac{g\pi}{3h^3} \left\{ (2m\mu)^{\frac{3}{2}} - [2m(\mu - 2\mu_B)]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

In entrambi i casi all'aumentare del campo magnetico esterno aumenta la magnetizzazione. Questo fenomeno si chiama **paramagnetismo di Pauli**.

Se vogliamo analizzare l'Hamiltoniana senza il termine di Spin guarda il mio quaderno di Fisica dello stato solido, l'ne parlo

II Quantizzazione

Nella seconda quantizzazione le particelle sono eccitazioni dei campi, gli operatori a ed a^\dagger sono chiamati operatori di creazione e distruzione perché creano e distruggono particelle (eccitazioni).



Un campo ha tanti modi di eccitazione quindi bisogna specificare con un indice quale modo eccitiamo

$$a_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i+1} |n_1, n_2, \dots, n_i+1, \dots\rangle$$

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\rangle$$

Un generico stato è scrivibile così

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle$$

Stato vuoto

Visto che lavoriamo con particelle identiche

$$|1, 1\rangle \propto a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \propto a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle \rightarrow a_1^\dagger a_2^\dagger = \lambda a_2^\dagger a_1^\dagger$$

Se scambio a_1^\dagger con a_2^\dagger non deve cambiare niente, quindi $\lambda = \pm 1$ per i **bosoni** $\lambda = 1$, mentre per i **fermioni** $\lambda = -1$.

Se vogliamo scriverlo in termini di commutatori o anticommutatori

bosoni $\rightarrow [a_i, a_j] = 0 \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$

fermioni $\rightarrow \{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$

Da qui si ottiene che $(z^+)^2 = 0$ per i fermioni, quindi non si può avere mai più di un fermione per stato di occupazione, questo è detto principio di esclusione di Pauli.

Adesso proviamo a fare un cambiamento di Base. Siano $\{|\lambda\rangle\}$, $\{|\lambda'\rangle\}$ due basi, per fare il cambio basta questo

$$|\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} |\lambda'\rangle \langle \lambda' | \lambda \rangle \quad \text{visto che } |\lambda\rangle = z_{\lambda}^+ |0\rangle$$

faccio l'aggiunta

$$z_{\lambda}^+ = \sum_{\lambda'} z_{\lambda'}^+ \langle \lambda' | \lambda \rangle \quad \rightarrow \quad z_{\lambda} = \sum_{\lambda'} z_{\lambda'} \langle \lambda | \lambda' \rangle$$

Adesso che abbiamo impostato e rappresentato le funzioni d'onda come operatori vediamo e cosa moltiplicare gli operatori stessi.

Un esempio di operatore di singolo corpo è questo

$$\langle n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots | \hat{O}_{\lambda_1} | n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots \rangle = o_{\lambda_1} n_{\lambda_1} \langle \dots | \dots \rangle$$

In pratica agisce solo su una componente

Se cambio base allora esso sarà una combinazione lineare di tanti operatori come quello di sopra.

Il numero uno significa singolo corpo \rightarrow

$$\hat{O}_1 = \sum_i o_{\lambda_i} n_{\lambda_i} = \sum_{\lambda} \langle \lambda | \hat{O} | \lambda \rangle z_{\lambda}^+ z_{\lambda}$$

Da qui si ottiene che il caso più generico di operatore a singolo corpo è

$$\hat{O}_1 = \sum_{\mu\nu} z_{\mu}^+ \langle \mu | \hat{O} | \nu \rangle z_{\nu}$$

Questo vale per qualunque base

Se ci mettiamo nella base delle posizioni possiamo esprimere l'Hamiltoniana così

$$\hat{H} = \int \hat{a}^\dagger(r) \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \hat{a}(r) dr$$

Per quanto riguarda gli operatori a 2 corpi il procedimento è simile.

$$\hat{V} |r_1, r_2, \dots\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} V(r_n, r_m) |r_1, r_2, \dots\rangle$$

Confrontandolo con l'operatore di singolo corpo si potrebbe supporre

che c'è il modo di dimostrarlo ma è così simile alla dimostrazione per operatori di singolo corpo che mi sacca scriverlo

$$\hat{V} = \iint \hat{a}^\dagger(r) \hat{a}^\dagger(r') V(r, r') \hat{a}(r) \hat{a}(r') dr dr'$$

In pratica in generale ti basta prendere la forma integrale del valore medio di un operatore in prima quantizzazione tipo così

Rappresentazione per bambini che non sanno lavorare coi campi

$$\langle V \rangle = \iint \psi^*(r) \psi^*(r') V(r, r') \psi(r) \psi(r') dr dr'$$

Sostituisci così

Rappresentazione per veri uomini

$$\hat{V} = \iint \hat{a}^\dagger(r) \hat{a}^\dagger(r') V(r, r') \hat{a}(r) \hat{a}(r') dr dr'$$

Fai queste sostituzioni qua e c'hai magicamente il tuo operatore di campo

Correlazione bis

È possibile definire la matrice

di densità di singolo corpo così

Inoltre combacia con la definizione

di coerenza che s'era data prima. Se siamo in uno stato puro, allora la matrice di densità assume questa forma

$$n(r, r') = \langle \psi^\dagger(r) \psi(r') \rangle$$

A dire il vero non è proprio una matrice di densità perché $\text{Tr}(n) = \langle N \rangle$

$$n_n(r, r') = N \int \psi_n^\dagger(r, r_2, r_3, \dots) \psi_n(r', r_2, r_3, \dots) dr_2 dr_3 \dots$$

Nel caso di uno stato non puro si ha che

$$n(r, r') = \sum_n \int P_n \overset{\text{probabilità di trovarsi nello stato } n}{\psi_n^\dagger(r, r_2, r_3, \dots)} \psi_n(r', r_2, r_3, \dots) dr_2 dr_3 \dots = \sum_n P_n n_n(r, r')$$

Nel caso dell'ensemble canonico

$$n(r, r') = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} n_n(r, r')$$

Quando abbiamo analizzato la Bose-Einstein stavamo scoperto che un numero N_0 di atomi finivano nello stato fondamentale, visto che lo stato fond. ha $\vec{p}=0$ possiamo dire che

$$n(p) = N_0 \delta(p) + \hat{n}(p) \quad \leftarrow \text{parte non condensata}$$

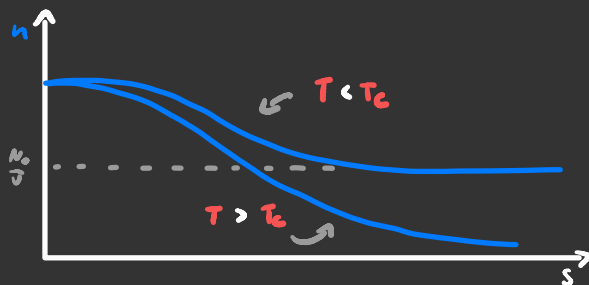
Faccendo la Trasformata con $s = r \cdot v$

$$n(s) = \frac{1}{V} \int n(p) e^{-ip \cdot s / \hbar} dp = \frac{N_0}{V} \int \delta(p) e^{-ip \cdot s / \hbar} + \frac{1}{V} \int \hat{n}(p) e^{-ip \cdot s / \hbar} dp = \frac{N_0}{V} + \hat{n}(s)$$

Qua si nota una cosa strana
cioè se mandiamo $\beta \rightarrow \infty$
correlazione non sparisce.

$$n(s) = \frac{N_0}{V} + \hat{n}(s) \rightarrow \frac{N_0}{V}$$

Adesso cerchiamo di capire
meglio le proprietà fisiche
di questo condensato.



Quando lo stato fondamentale è occupato da un numero
molto grande di particelle N_0 non è che ci cambi molto se
sono N_0 o $N_0 - 1$ o $N_0 + 1$. Quando faccio questo

Facendo queste
operazioni a_0
e a_0^\dagger non sono
più operatori
quantisitici

$$2. |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle \approx \sqrt{N_0} |N_0\rangle$$

$$2'. |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle \approx \sqrt{N_0} |N_0\rangle$$

Nel limite termodinamico
questo diventa un uguaglianza

Quindi in questa approssimazione, che si chiama approssimazione
di Bogoliubov gli operatori di creazione e distruzione applicati
allo stato fondamentale sono uguali a $\sqrt{N_0}$, ma che conseguenze
ha? Definisco l'operatore di distruzione $\hat{\psi}(v)$ in funzione di
quelli scritti nella base delle energie.

$$\hat{\psi}(v) = \sum_i \langle v | \psi_i \rangle a_i = \sum_i \psi_i(v) a_i = \psi_0(v) \sqrt{N_0} + \sum_{i \neq 0} \psi_i(v) a_i$$

Questo termine non

è quantistico

$$\text{Quindi: } \hat{\psi}(v) = \psi_0(v) + \delta \hat{\psi}(v) \leftarrow \text{Fluttuazioni quantistiche}$$

Il termine del condensato $\psi_0(v)$ è possibile esprimerlo così

$$|\psi_0(v)\rangle = |i_0(v)\rangle$$

Gas di Bose $\equiv \bullet \star \bullet \equiv$ poco Interagenti

L'Hamiltoniana per un campo interagente è

$$H = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

↖ Qui la matrice è diagonale rispetto alle posizioni

Se lo scriviamo nello spazio degli impulsi:

↗ Mentre rispetto agli impulsi no

$$H = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{\psi}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} + \frac{1}{2V} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}-\mathbf{q}) V(\mathbf{q}) \hat{\psi}(\mathbf{p}) \hat{\psi}(\mathbf{p}') d\mathbf{p} d\mathbf{p}' d\mathbf{q}$$

Fin qui non abbiamo fatto approssimazioni, ma ora rivediamo subito. Supponiamo che:

- Il gas sia molto diluito quindi: $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = V_0 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$
 $V(\mathbf{q}) = g \delta(\mathbf{q})$
- $T \geq 0$, quindi possiamo ignorare tutti i termini con $p, p' \neq 0$ ($\hat{\psi}(\mathbf{p}) \approx 0$ per $p \neq 0$)
- Ci mettiamo anche l'approssimazione di Bogoliubov

Mettendo tutto assieme si ottiene che

$$E_0 = \frac{N^2 g}{2V}$$

Eh va beh abbiamo scoperto l'acqua calda, ma adesso vediamo che succede se includo gli operatori $\hat{\psi}(\mathbf{p})$ al primo ordine

Niente.

Questo perché l'impulso totale degli operatori di creazione deve essere uguale a quello degli operatori di distruzione, quindi proviamo al secondo ordine

$$H = E_0 + \int \frac{p^2}{2m} a^\dagger(p) a(p) dp + \frac{\partial}{2V} \int 4 a^\dagger(p) a_0^\dagger a(p) a_0 + a^\dagger(p) a^\dagger(-p) a_0 a_0 + a_0^\dagger a_0^\dagger a(p) a(-p) dp$$

È possibile fare tramite giochetti che non ci è dato sapere Controlla!

$$H = E_0 + \frac{1}{2} \int \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\partial N}{V} \right) [a^\dagger(p) a(p) + a^\dagger(-p) a(-p)] + \frac{\partial N}{V} [a^\dagger(p) a^\dagger(-p) + a(p) a(-p)]$$

Questa Hamiltoniana non è diagonale, per diagonalizzarla bisogna fare questo cambiamento di base

$$\begin{cases} a(p) = u(p) b(p) + v(p) b^\dagger(-p) \\ a^\dagger(p) = u(p) b^\dagger(p) + v(p) b(p) \end{cases}$$

Se vogliamo assicurarci che le particelle create da $b(p)$ e $b^\dagger(q)$ siano bosoni bisogna imporre che $[b(p), b^\dagger(q)] = \delta(p-q)$, e facendo dei conti si scopre che $u^2(p) - v^2(p) = 1$.

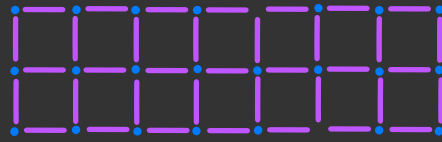
Sostituendo le case del sistema di equazioni, e imponendo che $u^2(p) - v^2(p) = 1$ si ottiene che

$$H = E_0 + \int \epsilon(\vec{p}) b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}) d\vec{p} \quad \epsilon(\vec{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{\partial N}{mV} p^2}$$

In sto modello di Ising non lo supporto più

Modello di Ising

Quantistico



$J, g > 0$

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - g \sum_i \hat{\sigma}_i^x \quad \leftarrow \text{le } \sigma \text{ sono tutte matrici}$$

Prima di entrare dal punto di vista termodinamico studiamo lo stato fond.

Iniziamo a vedere che succede in un campo magnetico forte $g \gg J$, quindi mi aspetto che la funzione d'onda del sistema sia

$$|\psi\rangle = |\uparrow, \uparrow, \dots\rangle = \prod_i |\uparrow\rangle_i \quad \text{dove} \quad |\uparrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Abbiamo che $\langle \psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \psi \rangle = \delta_{ij}$

Se $g \gg J$ ma non $\rightarrow \infty$ $\langle \psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \psi \rangle = e^{-|x_i - x_j|/4}$

Se $g=0$ abbiamo che lo stato fondamentale è degenerato

$|\psi\rangle \in \text{span}\{|\uparrow, \uparrow, \dots\rangle, |\downarrow, \downarrow, \dots\rangle\}$ $\langle \psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \psi \rangle = 1$

Se invece $g \ll J$ la funzione d'onda non è più degenerata, ma comunque $\langle \psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \psi \rangle \approx 1$

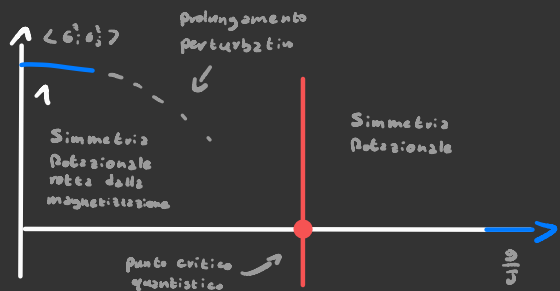
In entrambi i casi è possibile

migliorare la precisione di

$\langle \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z \rangle$ perturbativamente,

ma solo fino al punto

critico quantistico



Per risolvere in modo analitico il problema di Ising in 1D occorre fare un po' di conti.

$$H = - \sum_i J \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + D \sigma_i^z$$

Vogliamo cercare di descrivere l'Hamiltoniana come se fosse un'Hamiltoniana di campo.

Quello che faremo è associare a uno spin un fermione come qui a destra.

$$|\uparrow\rangle = |0\rangle$$

Il fermione non c'è

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle$$

Il fermione c'è

Gli operatori di creazione e distruzione sono in questo caso

$$c_i^+ = \frac{\sigma_i^x + i \sigma_i^y}{2} \quad c_i^- = \frac{\sigma_i^x - i \sigma_i^y}{2}$$

Questo però funziona solo per un sito, questo perché gli operatori di spin commutano tra un sito e l'altro, ma gli operatori di creazione e distruzione dovrebbero anticommutare.

Per fortuna Jordan e Wigner riuscirono a risolvere il problema definendo

$$a_i^+ = c_i^- \prod_{j < i} \sigma_j^z \quad a_i^- = c_i^+ \prod_{j < i} \sigma_j^z$$

Questo implica che $\{a_i^-, a_j^-\} = 0$ $\{a_i^-, a_j^+\} = \delta_{ij}$ $\{a_i^+, a_j^+\} = 0$

Se vogliamo scrivere gli operatori di spin in termini di a e a^\dagger

$$c_i^+ = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j^-) a_i^- \quad c_i^- = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j^-) a_i^+$$

$$\sigma_i^x = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j^-) (a_i^- + a_i^+)$$

Se sostituiamo otteniamo che

$$H = \sum_i J (a_i^\dagger a_{i-1} + a_{i+1}^\dagger a_i + 2 a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger + a_{i+1} a_i) - g (1 - 2 a_i^\dagger a_i)$$

Visto che è invariante sotto traslazioni facciamo la Trasformata

$$H = \sum_k 2 a_k^\dagger a_k [g - J \cos(kz)] + J i \sin(kz) (a_k^\dagger a_k^\dagger + a_k a_k) - g$$

E adesso si fa la trasformazione di Bogoliubov

$$b_k = u_k a_k - i v_k a_{-k}^\dagger \quad \text{con } u_k^2 + v_k^2 = 1$$

$$\text{Faccendo così } \{b_k, b_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'} \quad \{b_k, b_{k'}\} = \{b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger\} = 0$$

Inserendo il tutto nell'Hamiltoniana si ha che

$$H = \sum_k \epsilon_k (b_k^\dagger b_k - \frac{1}{2}) \quad \epsilon_k = 2J \sqrt{1 + g^2 - 2g \cos(kz)}$$

$$Z_N = \int e^{-\beta V(x)} dx = \int e^{-\sum_{i,j} \beta v_{ij}} d^3 N_{x_i} =$$

$$\int e^{\sum_i v_{i0}} d^3 x_N e^{\sum_{i,j} v_{ij}} dx = V \langle e^{\beta V(x)} \rangle Z_N$$

$$= V^{N-1} \left[\int e^{-\beta V(x)} dx \right]^N Z_N$$

Campi Fermionici Interagenti:

Visto che il 99% delle volte che si parla di fermioni che fanno
case essi sono elettroni in un



DAVIDE ROSSINI












Registri a.a. 2020/2021

DATI REGISTRO

insegnamento	FISICA STATISTICA (cod. 207BB)
corso di studi	WFI-LM - FISICA
periodo	Primo semestre
responsabile	DAVIDE ROSSINI
docenti	DAVIDE ROSSINI
totale ore	56

[Calendario lezioni](#) [Dettaglio ore](#)

LEZIONI

-  1. [Mar 22/09/2020 14:00-15:00 \(1:0 h\)](#) lezione: Presentazione del corso, argomenti trattati, libri di testo, modalità d'esame. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  2. [Mar 22/09/2020 15:00-16:00 \(1:0 h\)](#) lezione: Richiami di termodinamica: concetti di base, trasformazioni termodinamiche, leggi della termodinamica. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  3. [Mer 23/09/2020 11:00-13:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Richiami di termodinamica (continua): diavoleto di Maxwell, principio di Landauer; potenziali termodinamici, stabilità degli stati, principio di Le Chatelier (enunciato). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  4. [Ven 25/09/2020 16:00-18:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Postulati della meccanica statistica classica, media temporale e media di Gibbs, teorema di Liouville. Insieme microcanonico. Definizione di entropia e consistenza con la termodinamica. Condizioni di equilibrio. Teorema di equipartizione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  5. [Mar 29/09/2020 14:00-16:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Teorema di equipartizione (continua) e teorema del viriale. Gas perfetto classico risolto col formalismo microcanonico, paradosso di Gibbs. Costruzione dell'insieme canonico. Definizione di temperatura. Funzione di partizione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  6. [Mer 30/09/2020 11:00-13:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Definizione di energia libera di Helmholtz nell'ensemble canonico e consistenza con la termodinamica. Fluttuazioni dell'energia, equivalenza del formalismo canonico con quello microcanonico. Gas perfetto classico risolto col formalismo canonico, distribuzione di Maxwell-Boltzmann. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  7. [Ven 02/10/2020 16:00-18:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Ensemble grancanonico. Funzione di granpartizione. Gran potenziale e consistenza con la termodinamica. Fluttuazioni del numero di particelle e compressibilità isoterma. Equivalenza tra gli ensemble. Gas perfetto nel formalismo grancanonico. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  8. [Mar 06/10/2020 14:00-16:00 \(2:0 h\)](#) lezione: **Spin non interagenti e comportamento paramagnetico (descrizione nei tre ensemble)**. Derivazione dell'equazione di van Der Waals partendo dal formalismo dell'ensemble canonico per sistemi con interazioni a due corpi, nell'ipotesi di gas diluito e ad alta temperatura. Volume escluso e pressione interna. Punto critico e legge degli stati corrispondenti. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  9. [Mer 07/10/2020 11:00-13:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Regione di instabilità nel gas di van der Waals e costruzione di Maxwell. Sviluppo perturbativo della funzione di granpartizione per gas diluiti, espansione in cumulanti. Funzioni di Mayer, grafi connessi e non connessi. Espansione del virale e coefficienti del viriale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  10. [Ven 09/10/2020 16:00-18:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Interpretazione dell'espansione in cumulanti come sviluppo delle funzioni di Mayer sui grafi connessi. Importanza dei grafi completamente connessi. Esempio: gas di sfere rigide in varie dimensioni. Densità locale e funzioni di correlazione della densità. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
-  11. [Mar 13/10/2020 14:00-16:00 \(2:0 h\)](#) lezione: **Derivazione della termodinamica di un gas interagente a partire dalla funzione di correlazione densità-densità. Equazioni di Born-Green. Gerarchia BBGKY (cenni) e approssimazione di Kirkwood. Transizioni di fase in termodinamica: considerazioni generali ed evidenze sperimentali. Classificazione di Ehrenfest e classificazione moderna. Transizioni del primo ordine vs. continue.** [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

ROSSINI) *De Approfondire*

- ✓ 12. Mer 14/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Singolarità nella funzione di partizione al limite termodinamico e connessione con le transizioni di fase. Teoremi di Lee-Yang (enunciati e loro conseguenze). Concetto di esponenti critici per una transizione di fase continua. Calcolo degli esponenti critici per un sistema descritto dall'equazione di van der Waals. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 13. Ven 16/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Modello di Ising per spin classici interagenti su reticolo: definizione. Campo molecolare e soluzione di Weiss. Descrizione della transizione di fase del secondo ordine paramagnete/ferromagnete in approssimazione di campo medio. Temperatura critica. Calcolo della magnetizzazione spontanea, calore specifico, suscettività magnetica e esponenti critici di campo medio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 14. Mar 20/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: **Trasformazione di Hubbard-Stratonovich**. Metodo di punto sella e connessioni con il campo medio. Mapping del modello di Ising in una teoria di campo continuo. Teoria di Ginzburg-Landau: funzionale energia libera, ricerca dei minimi e rottura spontanea di simmetria (esempio esplicito per il modello di Ising in campo medio, con rottura di simmetria Z_2). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 15. Mer 21/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: **Generalizzazioni $O(n)$** del modello di Ising e loro descrizione nel formalismo di Ginzburg-Landau (cenni). Funzione di correlazione e suscettività per il modello di Ising in approssimazione di campo medio. Forma di Ornstein-Zernike. Esponenti critici. **Criterio di Ginzburg e** dimensione critica superiore per il campo medio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 16. Ven 23/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Modello di Ising oltre l'approssimazione di campo medio. **Argomento di Peierls per il caso con interazioni a lungo raggio e per il caso bidimensionale su reticolo quadrato**. Soluzione esatta del caso unidimensionale mediante il metodo della matrice di trasferimento. Calcolo della magnetizzazione (assenza di magnetizzazione spontanea) e delle funzioni di correlazione (decadimento esponenziale). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 17. Mar 27/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Relazioni che coinvolgono gli esponenti critici e leggi di scala. Ipotesi di scaling e invarianza di scala al punto critico; argomento di Widom. Introduzione al Gruppo di Rinormalizzazione: raggruppamento degli spin "alla Kadanoff" - coarse graining. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 18. Mer 28/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Gruppo di Rinormalizzazione: punti fissi e campi di scaling. **Concetto di campi di scaling rilevanti, irrilevanti e marginali**. Esempio di applicazione RG per la catena di Ising: flusso di rinormalizzazione, caratterizzazione dei punti fissi, espansione lineare del flusso RG attorno al punto fisso a temperatura $T=0$ e consistenza con la soluzione esatta. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 19. Mar 03/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Meccanica statistica quantistica: principi di base. Stati puri e stati misti, matrice densità, equazione di Liouville-von Neumann. Postulato di equiprobabilità a priori e postulato delle fasi random. Ensembles di equilibrio: microcanonico, canonico, grancanonico. Terza legge della termodinamica. Distinzione tra gas di bosoni, di fermioni, e di Boltzmann. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 20. Mer 04/11/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: I tre tipi di gas di particelle non interagenti (Boltzmann, Bose, Fermi) descritti col formalismo dell'ensemble grancanonico. Statistiche di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac. Limite classico delle statistiche quantistiche (descrizione mediante il formalismo di prima quantizzazione); correzione quantistica al primo ordine, pseudo-potenziale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 21. Ven 06/11/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Sistemi quantistici interagenti in prima quantizzazione (cenni, sviluppi in cluster). Gas di fotoni e termodinamica del corpo nero. Fononi nei solidi: modello classico di oscillatori armonici accoppiati, dispersione lineare dei modi normali a basse energie; modello quantistico di Debye. Calore specifico nei solidi: limiti di basse e di alte temperature. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 22. Mar 10/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Condensazione di Bose Einstein (BEC) per bosoni liberi. Temperatura critica e volume critico. Assenza di BEC in due dimensioni e in una dimensione. Interpretazione della BEC come una sorta di transizione di fase del primo ordine. Funzioni termodinamiche per un gas di Bose ideale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 23. Mer 11/11/2020 11:15-13:00 (2:0 h) lezione: Equazione di stato per fermioni liberi. Limite per piccole fugacità (**regime classico: alte temperature, basse densità**) e interpretazione in termini di **espansione del viriale**, pseudo-potenziale repulsivo. Limite per grandi fugacità (regime quantistico: basse temperature, alte densità) ed espansione di Sommerfeld. Funzioni termodinamiche, energia di Fermi e pressione di degenerazione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 24. Ven 13/11/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Proprietà magnetiche di un gas di fermioni liberi. Paramagnetismo di Pauli. Particella carica in un campo magnetico e Livelli di Landau. Diamagnetismo di Landau (prima parte). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 25. Mar 17/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Diamagnetismo di Landau (seconda parte). Effetto di de Haas-van Alphen. Formalismo di seconda quantizzazione: rappresentazione dei numeri di occupazione, spazio e stati di Fock, operatori di creazione/distruzione, regole di commutazione e di anticommutazione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 26. Mer 18/11/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Cambio di base per gli operatori di creazione e

distruzione. Operatori a uno e a due corpi. Forma generale dell'Hamiltoniana quantistica in seconda quantizzazione per un sistema di particelle interagenti con potenziale centrale a due corpi. Introduzione al gas di Bose debolmente interagente. Matrice densità one-body; densità in spazio reale e in spazio dei momenti; ordinamento a lungo raggio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)



27. [Ven 20/11/2020 16:00-18:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Approssimazione di Bogoliubov per un gas di Bose diluito e a basse temperature. Fluttuazioni quantistiche. Trasformazione di Bogoliubov e concetto di quasi-particella. Stato fondamentale interpretabile come stato di vuoto della teoria efficace libera di Bogoliubov. **Spettro delle quasi-particelle e termodinamica del sistema; healing length.** [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)



28. [Mar 24/11/2020 14:00-16:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Modello di Ising quantistico in campo trasverso. Limiti di strong coupling e di weak coupling: stato fondamentale nei due limiti. Cenni sulla rottura della simmetria di parità Z_2 e transizione di fase quantistica. Trasformazione di Jordan-Wigner e mapping del caso 1D su una catena fermionica quadratica. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

29. [Mer 25/11/2020 11:00-13:00 \(2:0 h\)](#) lezione: Diagonalizzazione della catena fermionica quadratica mediante rotazione di Bogoliubov in spazio degli impulsi. Spettro delle quasi-particelle; gap tra ground state e primo stato eccitato al variare del campo trasverso. Introduzione ai sistemi fermionici in seconda quantizzazione: modello di tight-binding, conduttori e isolanti di banda; modello di Hubbard, isolante di Mott (cenni). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

[Calendario lezioni](#) [Dettaglio ore](#)