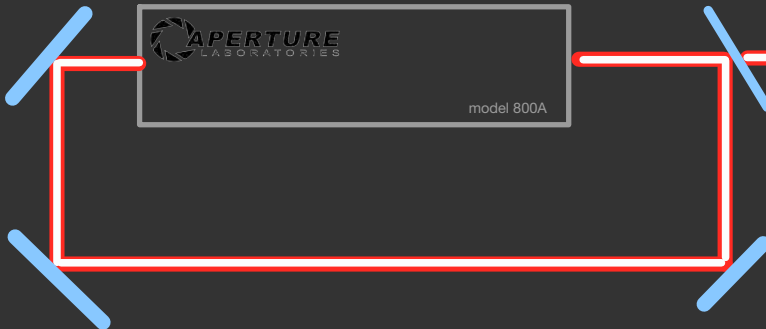
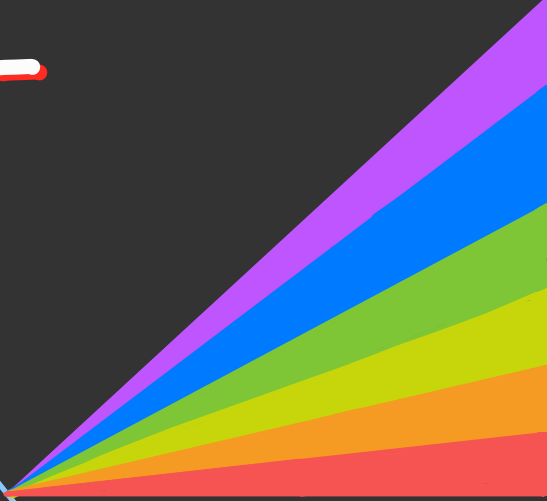


# Fondamenti di Interazione Radiazione - Materia

A.A. 2013/20 Unipi  
Francesco Sacco

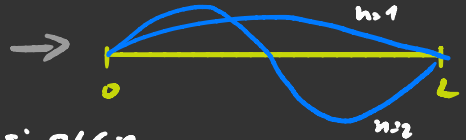


# Campo Elettro-Magnetico in una Cavità

$V(\vec{r}) = 0$  se  $\vec{r}$  si trova fuori un quadrato di lato  $L$  con uno spigolo centrato nell'origine

$$V(\vec{r}) \propto \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Ogni componente permette di annullare il potenziale agli estremi e forma comunque una base



Derivando rispetto a  $z$  si ottiene

$$E_{\vec{n}}^*(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \cos\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right)$$

Normalizzazione

L'energia di un fotone in funzione di  $\vec{n}$  è

$$E_{\vec{n}} = \hbar \omega = c \hbar \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c \hbar \frac{\pi}{L} |\vec{n}|$$

Normalmente la radiazione interagisce in un qualche modo misterioso col proprio contenitore, quindi dopo un po' di tempo radiazione e contenitore vanno all'equilibrio termico.

La probabilità di trovarsi in uno stato con energia  $E$

è così

$$P(E) \propto e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

il potenziale chimico non spunta perché è nullo, infatti dalla Terza dinamica si ha che  $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$  dove  $N$  è il numero di fotoni.

Questo perché è possibile che un atomo assorba un fotone e ne emetta 2 talché  $\omega_2 = \omega_1 \omega_2$ , quindi  $N$  è calcolato ma  $E=0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial N} = 0 \Rightarrow \mu = 0$

Visto che i fotoni sono particelle non interagenti, possiamo concentrarci sulla probabilità che esistano  $n_{\mathbf{k}}$  fotoni a un singolo vettore d'onda  $\vec{k}$

$$P(E(n_{\mathbf{k}}, \vec{k})) = \frac{e^{-\beta E}}{\sum_{n_{\mathbf{k}}} e^{-\frac{\epsilon n_{\mathbf{k}}}{k_B T}}}$$

definisco  $\epsilon$  il quanto di energia  $\epsilon = \hbar \omega = \hbar c k$

$$\sum_{n_{\mathbf{k}}} e^{-\frac{\epsilon n_{\mathbf{k}}}{k_B T}} = \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1}$$

$$P(E) = e^{-\frac{\epsilon n_{\mathbf{k}}}{k_B T}} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)$$

il numero medio di fotoni è

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{n_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}} P(E) = \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \sum_{n_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}} e^{-\frac{\epsilon n_{\mathbf{k}}}{k_B T}} =$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \cdot \left(-k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon}\right) \sum_{n_{\mathbf{k}}} e^{-\frac{\epsilon n_{\mathbf{k}}}{k_B T}} =$$

$$= -k_B T \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1} =$$

$$= k_B T \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{k_B T} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} \quad \leftarrow \text{Questo rappresenta il numero medio di fotoni con energia } \epsilon = \hbar \omega$$

ho sfruttato che  $P d \frac{1}{P} = d \frac{F}{P} - \frac{1}{P} dF$

La densità di stati:  $D(\omega) d\omega = 2.9 \pi n^2 d\omega = 8 \pi \left(\frac{L}{\pi c}\right)^3 \omega^2 d\omega$   
 $= \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{L}{c}\right)^3 \omega^2 d\omega$  ← Nel libro di testo manca  $L^3$  perché per loro è la densità di stati per un'unità di volume.

La distribuzione di energia è quindi

$$W(\omega) = \bar{n} \hbar \omega D(\omega) d\omega = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{\hbar}{\pi^2} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} + 1} = \left| x \equiv \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right.$$

$$= \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{\hbar}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \left(\frac{2L}{\hbar c}\right)^3 \frac{(k_B T)^3}{\pi^2} \frac{x^3 dx}{e^x + 1}$$

Se voglio l'energia media totale mi basta integrare.

Gli integrali del tipo  $\int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{e^x + 1} = \Gamma(n+1) \zeta(n+1) \equiv I_n$   
 ↗ Zeta di Reimann

nel caso  $n=3$   $I_3 = 6.93 \dots$

$$\bar{E}(T) = \left(\frac{2L}{\hbar c}\right)^3 (k_B T)^3 \frac{6.93}{\pi^2}$$

## Fluttuazione $\langle n \rangle$

I fotoni possono essere assorbiti e riemessi dai bordi quindi il loro numero può fluttuare

$$\Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2; \quad \bar{n}^2 = \frac{1}{N} \sum_n n^2 e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} = -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{n} =$$

$$= \frac{k_B T}{k_B T} \frac{e^{\epsilon/k_B T}}{(e^{\epsilon/k_B T} - 1)^2} = \bar{n}^2 e^{\epsilon/k_B T}$$

$$\Delta n^2 = \bar{n}^2 (e^{\epsilon/k_B T} - 1) = \bar{n}$$

$$\Delta n^2 = \bar{n}$$

Questo dice quanto fluttuano i fotoni a  $\omega$  fisso.

# Sistemi radiazione - materia a 2 livelli

Supponiamo di avere un sistema quantistico a 2 livelli: energie  $E_1$  e  $E_2$  con degenerazione  $g_1$  e  $g_2$  e con  $N_1$  e  $N_2$  particelle l'uno.



Il sistema è immerso in una radiazione elettromagnetica

$$N = N_1 + N_2 \quad \frac{dN}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 g_1 A_{21} + N_2 g_1 B_{21} W(\omega) - N_1 g_2 B_{12} W(\omega)$$

Quante particelle ci sono nello stato 2

Quanti stati 1 ci sono

Probabilità  $E_2 \rightarrow E_1$  per unità di tempo (Rate) che una particella nello stato 2 finisca in uno stato 1

All'equilibrio  $\dot{N}_1 = 0$ , quindi

$$N_2 g_1 [A_{21} + B_{21} W(\omega)] = N_1 g_2 B_{12} W(\omega)$$

$$\frac{N_2 g_1}{N_1 g_2} = \frac{B_{12} W(\omega)}{A_{21} + B_{21} W(\omega)}$$

$W$  in generale è composto da due termini  $W(\omega) = W_T(\omega) + W_E(\omega)$

- $W_T$  è il contributo termico (vedi pagine di prima)
- $W_E$  è un contributo esterno (tipo un raggio laser)

↳ Questo contributo può dipendere dallo spazio

Adesso supponiamo che  $W(\omega) = W_T(\omega) = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$

Risolviendo l'equazione di prima per  $W(\omega)$

$$N_2 g_1 [A_{21} + B_{21} W(\omega)] = N_1 g_2 B_{12} W(\omega)$$

$$W(\omega) = \frac{N_2 g_1 A_{21}}{N_1 g_2 B_{12} - N_2 g_1 B_{21}} = \frac{A_{21}}{\frac{N_1 g_1}{N_2 g_2} B_{12} - B_{21}}$$

Visto che siamo all'equilibrio termico  $N_1/N_2 = e^{\frac{h\omega}{kT}}$

$$W(\omega) = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} B_{12} e^{\frac{h\omega}{kT}} - B_{21}} = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$$

si ottiene che  $\frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21}$  e che  $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} \omega^3 = W_S$

Per far sì che il denominatore sia proporzionale a  $e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1$

Per uguagliare il resto

Visto che i coefficienti NON dipendono dalla radiazione queste due equazioni qui sopra valgono sempre.

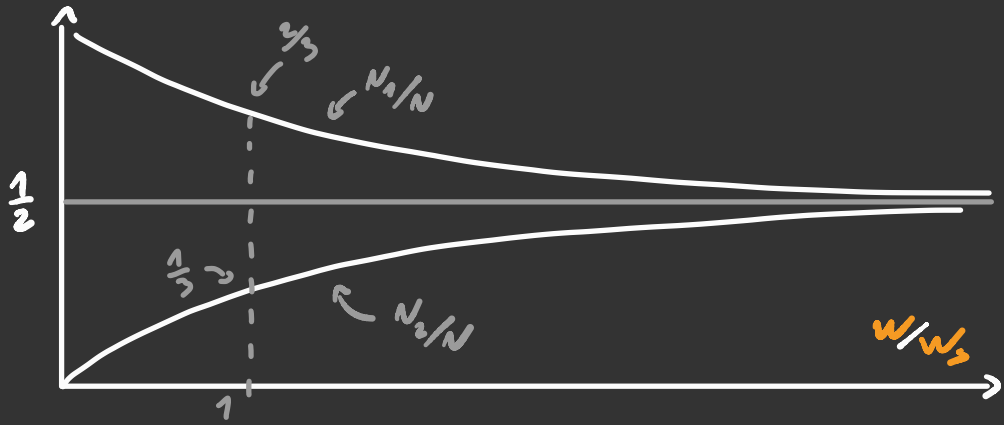
Supponiamo che il nostro sistema venga tenuto all'equilibrio da una radiazione stazionaria  $W \neq W_T$ . Vogliamo vedere come si distribuiscono  $N_1$  e  $N_2$

$$N_2 g_1 A_{21} + N_2 g_1 W B_{21} - N_1 g_2 W B_{12} = 0$$

$$N_2 W_S + (N_2 - N_1) W = 0 \quad N(W_S + W) = N_1(W_S + 2W)$$

$$N_1 = N \frac{W_S + W}{W_S + 2W} \quad N_2 = N \frac{W}{W_S + 2W}$$

Ecco qua una rappresentazione grafica delle ultime 2 equazioni:



Adesso sarebbe carino vedere cosa succede al rate dei vari tipi di emissione al variare di  $W/W_s$

Assorbimento stimolato  $h\nu g_2 B_{12} N_1 W$

Emissione stimolata  $h\nu g_1 B_{21} N_2 W$

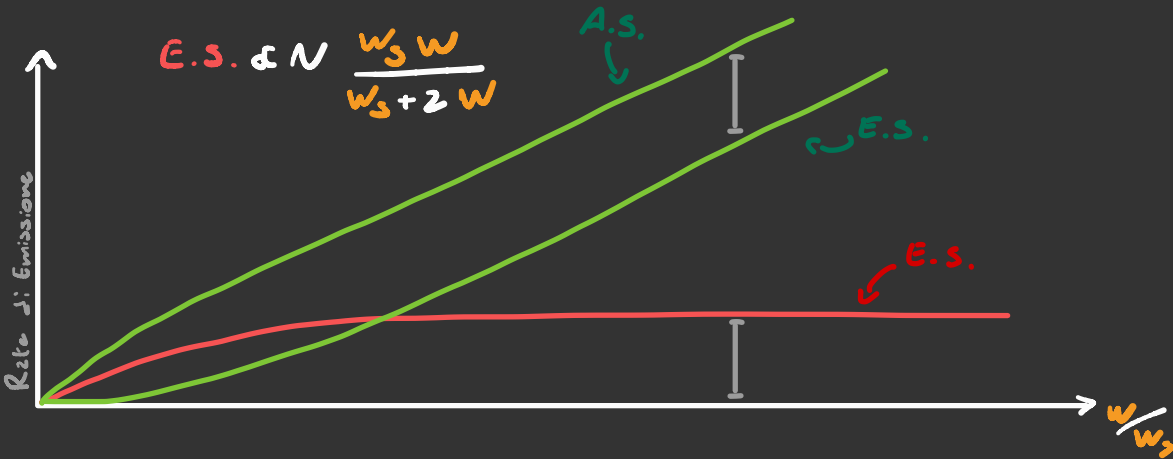
Emissione spontanea  $h\nu g_1 A_{21} N_2$

Se divido tutto per  $h\nu g_1 B_{21}$  ottengo che

A.S.  $\& N_1 W = N W \frac{W_s + W}{W_s + 2W}$

E.S.  $\& N \frac{W^2}{W_s + 2W}$

E.S.  $\& N \frac{W_s W}{W_s + 2W}$



# Attenuazione

Supponiamo di avere un'onda elettromagnetica incidente sul nostro sistema a 2 livelli. Il sistema quando assorbe l'onda e fa una emissione stimolata



riemette il fotone nella stessa direzione dell'onda incidente. Quando invece fa emissione spontanea la direzione del fotone uscente è casuale.

L'energia dissipata per unità di tempo è quindi uguale a

$$\dot{W} = -g_1 h\nu A_{21} N_2 = -g_1 h\nu A_{21} N \frac{W}{W_0 + 2W}$$

↖ Si può risolvere esattamente, ma come Fregazzano

Adesso facciamo la supposizione - Approssimazione che  $W_0 \gg W$

$$W(t) = W(0) \exp[-g_1 h\nu B_{21} N t]$$

↗ Equivale a dire che la luce che stiamo vedendo quanto decade velocemente è molto più forte di quella di corpo nero nelle stesse frequenze.

Se consideriamo un mezzo fatto da tanti di questi ci aspettiamo che

Questo ipotesi è vera nella maggior parte dei casi, ad esempio se vogliamo vedere quanto velocemente si attenua la luce del laser dobbiamo ricordarci che la luce rossa del laser sia molto più forte della luce rossa proveniente dalla radiazione di corpo nero dell'ambiente circostante

$$I(x) = I(x=0) e^{-Kx}$$



Inoltre  $I = cW$  e

$$\frac{dI}{dx} = \frac{dW}{dt} \quad \uparrow \quad \text{quindi: } I(x) = I(0) \exp[-g_1 h\nu B_{21} N \frac{x}{c}]$$

↖ Il modo "corretto" di farlo sarebbe sostituire queste equazioni nella prima equazione di questa pagina



# Indice di diffrazione

Classicamente, il modo in cui i fotoni interagiscono con la luce è descritto dalla costante dielettrica  $\epsilon(\omega)$ .

Essa è collegata a quanto dissipativo è un mezzo.

Supponiamo di avere un'onda E.M. descritta da questa equazione

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \exp[ikx - i\omega t]$$

Se siamo in un mezzo abbiamo che

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

↖ Indice di diffrazione

Alcuni mezzi tendono ad attenuare l'onda E.M., quindi

$E(x,t)$  ha un andamento esponenziale decrescente.

Questo succede quando l'indice di diffrazione ha delle componenti immaginarie

$$E(x,t) = E_0 \exp[ik'x - i\omega t] e^{-k''x}$$

$$I(x) = \frac{\epsilon_0}{2} |E(x)|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |E(x=0)|^2 e^{-2k''x} = I(x=0) e^{-2k''x}$$

Possiamo scrivere  $k''$  in termini di  $n(\omega)$   $k'' = \frac{\omega}{c} n''(\omega)$

che a sua volta può essere collegata con la costante dielettrica e la suscettività  $\chi'$

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$$

Una proprietà di  $\chi$  che è più interessante di quel che sembra è che deve essere analitica per  $\text{Im}(w) > 0$ . Se così non fosse si violerebbe la relazione di causalità  $E(t) \rightarrow P(t)$

## Dimostrazione

$$P(w) = \chi(w)E(w) \rightarrow P(t) = \int \chi(t-t')E(t')dt'$$

Se ad esempio  $E(t') = \delta(t')$   $P(t) = \chi(t-t')$ , chiaramente ciò non deve avere nessun effetto nel passato, quindi:

$$\chi(t-t') = 0 \text{ se } t < t', \text{ o alternativamente } \chi(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$\text{Visto che } \chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(w) e^{-iwt} dw = \frac{i}{2\pi} \int \text{Residui}$$

Per  $t > 0$  si somma sui residui dove  $\text{Im} w < 0$ , altrimenti:

si somma sui residui per  $\text{Im} w > 0$ . Se  $\chi(w) \neq 0$  per  $\text{Im} w > 0$

è analitica, abbiamo che non ci sono residui, quindi  $\chi(t) = 0$

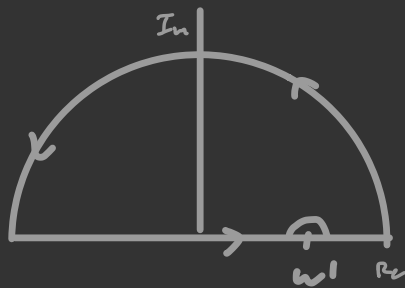
per  $t < 0$ . A dire il vero c'è una dimostrazione che dimostra che l'analiticità è necessaria e non solo sufficiente, ma è più lunga

Inoltre se conosciamo la parte immaginaria di  $\chi(w)$  è possibile ricavarsi quella reale grazie alle relazioni di Kramers-Koenig, infatti: visto che  $\chi(w)$  è analitica

$$\chi(w) = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - w} dw'$$

Quindi:

$$\chi'(w) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(w')}{w' - w} dw'$$



Questo significa che conoscendo i livelli energetici e i coefficienti di Einstein è possibile calcolarsi le proprietà ottiche di un materiale (e vice versa).

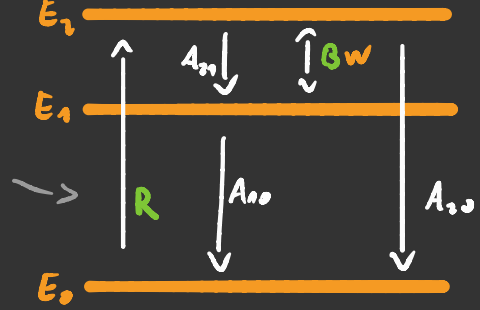
# LASER

Come visto prima in un sistema a 2 livelli la luce che passa viene attenuata. Questo perché  $N_2 < N_1$ .

È possibile in un sistema a 3 livelli: rendere  $N_2 > N_1$  pompando dal livello 0 particelle al livello 2.

$R$  è un valore che può essere modificato a piacere, gli elettroni possono essere pompati anche senza dover incidere della luce a frequenza  $\omega$ .

Per semplicità si suppone che i livelli non siano degeneri.



Adesso facciamo i conti

$$\begin{cases} N_0 + N_1 + N_2 = N \\ \frac{dN_0}{dt} = -N_0 R + N_1 A_{10} + N_2 A_{20} \\ \frac{dN_2}{dt} = N_0 R - N_2 (A_{21} + A_{20}) - BW(\omega) (N_2 - N_1) \\ \frac{dN_1}{dt} = N_2 A_{21} - N_1 A_{10} + BW(\omega) (N_2 - N_1) \end{cases}$$

A dire il vero una di queste 4 equazioni è ridondante, però scriverle non fa male a nessuno.

Visto che siamo in un regime stazionario tutte le derivate temporali fanno zero.

Visto che vogliamo far sì che  $N_2 > N_1$  basta risolvere per  $N_2 - N_1$  e vedere che segno ha.

$$\begin{cases} N_0 R = N_1 A_{10} + N_2 A_{20} \\ N_0 + N_1 + N_2 = N \\ N_1(A_{10} + B W(\omega)) = N_2(A_{20} + B W(\omega)) \end{cases}$$

Da qui si vede che  $N_0 > N_1$  se  $A_{20} > A_{10}$

$$\begin{cases} N_1 A_{10} + N_2 A_{20} = N_0 R \\ N_1(A_{10} + B W(\omega)) - N_2(A_{20} + B W(\omega)) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= N_1 + N_2 & \rightarrow & N_1 = \frac{x+y}{2} \\ y &= N_1 - N_2 & & N_2 = \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}(A_{10} + A_{20}) + \frac{y}{2}(A_{20} - A_{10}) = N_0 R \\ \frac{x}{2}(A_{10} - A_{20}) + \frac{y}{2}(A_{20} + A_{20} + 2B W(\omega)) = 0 \end{cases} \quad \frac{y}{2} \left[ (A_{20} - A_{10}) - (A_{10} + A_{20} + 2B W(\omega)) \frac{(A_{10} + A_{20})}{A_{10} - A_{20}} \right] = N_0 R$$

$$\frac{y}{2} \left[ (A_{10} - A_{20})(A_{10} - A_{20}) - (A_{10} + A_{20} + 2B W(\omega))(A_{10} + A_{20}) \right] = N_0 R (A_{10} - A_{20})$$

$$\frac{y}{2} \left[ A_{10}^2 - A_{10} A_{20} - A_{20} A_{10} + A_{20} A_{20} - A_{10}^2 - A_{10} A_{20} - A_{20} A_{10} - A_{20} A_{20} - 2B W(\omega)(A_{10} + A_{20}) \right]$$

$$\frac{y}{2} \left[ -2A_{10} A_{20} - 2A_{20} A_{10} - 2B W(\omega)(A_{10} + A_{20}) \right] = -y \left[ B W(\omega)(A_{10} + A_{20}) + A_{10}(A_{20} + A_{10}) \right]$$

$$N_2 - N_1 = \frac{N_0 R (A_{10} - A_{20})}{(A_{10} + A_{20}) B W(\omega) + A_{10}(A_{20} + A_{10})}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (\text{Emissione} - \text{Assorbimento}) \text{ stimolo } t_0 :$$

$$= h\nu (N_2 - N_1) B W(\omega) =$$

$$= \frac{h\nu B W(\omega) N_0 R (A_{10} - A_{20})}{(A_{10} + A_{20}) B W(\omega) + A_{10}(A_{20} + A_{10})}$$

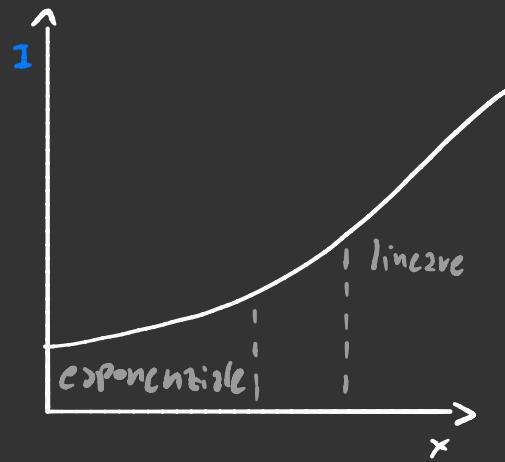
Fondamentalmente questa equazione differenziale è identica a quella ottenuta per il sistema a due livelli

Adesso vediamo come  $I(x, \omega)$  si propaga dentro un mezzo fatto così

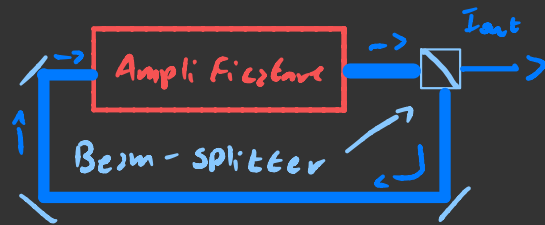
$N_0 \approx N$  Suppongo che la maggior parte delle particelle si trovino nello stato fondamentale

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{h\nu B I N R (A_{10} - A_{20})}{(A_{10} + A_{20}) B I + c A_{10}(A_{20} + A_{10})}$$

Senza stare a risolvere esattamente l'equazione differenziale si può notare che quando  $I$  è piccolo la crescita è esponenziale, poi può diventare lineare

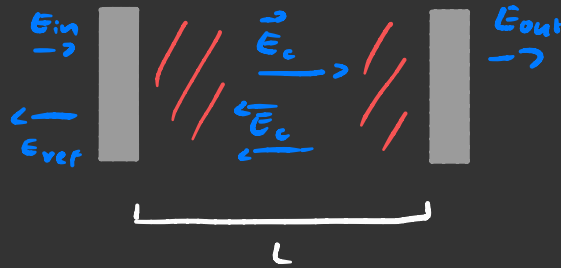


Ora che abbiamo un sistema che amplifica la luce ci basta metterlo a feedback per avere qualcosa di stabile.



A dire il vero non è fatto proprio così un laser.

Esso ha una camera di risonanza dove all'interno la radiazione viene amplificata e un po' può uscire fuori.



Sappiamo che i coefficienti di riflessione e trasmissione  $R$  e  $T$  siano uguali per entrambe le barriere, e che al momento non ci sia amplificazione.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_c e^{-ikL} = R \vec{E}_c e^{ikL} \quad \leftarrow \text{nella barriera a sinistra} \\ \vec{E}_c = T E_{in} + R \vec{E}_c \quad \leftarrow \text{nella barriera a sinistra} \\ E_{out} = T \vec{E}_c e^{ikL} \quad \leftarrow \text{nella barriera a destra} \end{array} \right.$$

Adesso vogliamo  $\vec{E}_{out}$  in funzione di  $E_{in}$

$$\vec{E}_c = T E_{in} + R^2 \vec{E}_c e^{2iKL} \quad \vec{E}_c = \frac{T E_{in}}{1 - (R e^{iKL})^2} \quad E_{out} = \frac{T^2 E_{in} e^{iKL}}{1 - (R e^{iKL})^2}$$

$$I_{out} = \left| \frac{T^2 e^{iKL}}{1 - (R e^{iKL})^2} \right|^2 I_{in} = \frac{|T|^4 I_{in}}{|T|^4 + 4|R|^2 \sin^2(KL)}$$

Orz come orz tutte le equazioni in questa pagina sono state fatte supponendo che non ci sia amplificazione

Se vogliamo introdurre l'amplificazione basta aggiungere al fattore di fase una parte reale

$$e^{iKL} \rightarrow e^{iKL + \gamma L/2}$$

inoltre se il campo oscilla alla frequenza di risonanza

$$e^{iKL} = \pm 1 \quad \text{e se } \gamma \text{ è piccolo, } e^{\gamma L/2} = 1 + \gamma L/2$$

$$E_{out} = \pm \frac{T^2 E_{in}}{1 - R^2 \left(1 + \frac{\gamma L}{2}\right)^2} = \pm \frac{T^2 E_{in}}{|T|^4 - |R|^2 \gamma L} \quad \leftarrow \text{Suppongo che } R \text{ sia reale}$$

Orz per bisogno capire quanto vale  $\gamma$ , facendo questa approssimazione

$$I_c(x) - I_c(0) = \frac{\partial I_c}{\partial x} \Big|_{x=0} x$$

possiamo dire che

$$I_c(x) = \left[ 1 + \frac{\hbar \omega B N R (A_{10} - A_{20}) x}{(A_{10} + A_{20}) B I_c(0) + C A_{10} (A_{20} + A_{30})} \right] I_c(0)$$

$\gamma x$  rappresenta l'amplificazione

Adesso semplifichiamo un po' la notazione

$$\frac{h\nu BNR(A_{21} - A_{23})}{(A_{21} + A_{23})B\mathcal{I}_c + CA_{21}(A_{22} + A_{32})} \equiv \frac{G(\omega)}{1 + \mathcal{I}_c/\mathcal{I}_s} = \frac{G(\omega)}{1 + |E_c|^2/|E_s|^2} =$$

$$|E_c|^2 = |\vec{E}_c|^2 + |\hat{E}_c|^2 = \frac{|E_{out}|^2}{|T|^2} + \frac{|R|^2}{|T|^2} |E_{out}|^2 = \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} |E_{out}|^2$$

$$G(\omega) \left( 1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} \equiv \mathcal{G}$$

E ora abbiamo  $E_{in}$  in funzione di  $E_{out}$

$$\frac{1}{|T|^2} E_{in} = \pm E_{out} \left[ |T|^2 - |R|^2 \mathcal{L} G \left( 1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} \right]$$

Se vuoi che il laser si autosostenga  $E_{in} = 0$ , quindi:

$$|T|^2 - |R|^2 \mathcal{L} G \left( 1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} = 0$$

Inoltre i laser hanno di solito  $|R|^2 \approx 0,95$  e  $|T|^2 \approx 0,05$

Quindi possiamo far diventare  $|R|^2 \approx 1$

$$\frac{\mathcal{L}G}{|T|^2} = 1 + \frac{2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2}$$

$$|E_{out}|^2 = \frac{|E_s|^2}{2} (\mathcal{L}G - |T|^2)$$

# Potenziali periodici nel tempo

Fin ora abbiamo semplicemente supposto che esista un'interazione tra gli atomi e la radiazione elettromagnetica che in un modo o nell'altro ci fa saltare fuori i coefficienti di Einstein. Ora ci andiamo a verificare che tutto ciò è vero e otterremo delle formule che ci dicono quanto valgono i coefficienti di Einstein.

Lavoreremo con sistemi a 2 livelli energetici:

$$H(t) = H_0 + H_I(t) \quad H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle \quad i \in \{1, 2\}$$

$$| \psi \rangle = c_1(t) | 1 \rangle + c_2(t) | 2 \rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$H | \psi \rangle = i \hbar \frac{\partial | \psi \rangle}{\partial t} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} [c_1(t) | 1 \rangle] + i \hbar \frac{\partial}{\partial t} [c_2(t) | 2 \rangle] =$$

$c_i(t) \rightarrow \dot{c}_i(t) e^{-i \frac{E_i}{\hbar} t}$  Questo serve a far sì che se  $\dot{c}_i$  non dipende dal tempo perché  $H=0$ , allora si separa la parte dipendente da quella indipendente dal tempo della funzione d'onda

$$= [i \hbar \dot{c}_1(t) + c_1(t) E_1] e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} | 1 \rangle + [i \hbar \dot{c}_2(t) + c_2(t) E_2] e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} | 2 \rangle$$

$$= i \hbar \dot{c}_1 e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} | 1 \rangle + i \hbar \dot{c}_2 e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} | 2 \rangle + H_0 | \psi \rangle$$

$$H_I | \psi \rangle = i \hbar \dot{c}_1 e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} | 1 \rangle + i \hbar \dot{c}_2 e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} | 2 \rangle$$

$$\langle i | H_I | \psi \rangle = i \hbar \dot{c}_i e^{-i \frac{E_i}{\hbar} t} \quad \text{fin qui non c'è niente di approssimato}$$



Senza scendere troppo nei dettagli di come si ricavi

l'Hamiltoniana di interazione essa risulta essere

$$H_I = -\hat{D} \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

Dove  $\hat{D}$  è l'operatore di dipolo dell'atomo.  $i \pm$  sono scorrelati  
Eva di loro.

Se mendo  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  gli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle \rightarrow \pm |1\rangle, \pm |2\rangle$

$$\langle i | \hat{D} | j \rangle = \langle i | \Pi^\dagger \hat{D} | \Pi | j \rangle = \langle i | \Pi^\dagger D | \Pi | j \rangle = \langle i | (\Pi^\dagger D \Pi) | j \rangle = -\langle i | \hat{D} | j \rangle$$

Quindi  $D_{ij} = 0$

$$\langle 1 | H_I | 2 \rangle = \langle 2 | H_I | 1 \rangle^* \quad i\hbar \dot{z}_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} = -\vec{D}_{12} \cdot \vec{E}_0 z_2 \cos(\omega t) e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$$

$$i\hbar \dot{z}_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} = -\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0 z_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \frac{1}{2}$$

$$\dot{z}_2 = \vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0 \left[ e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right] \frac{i}{2\hbar} z_1$$

supponiamo che all'inizio stiamo allo stato fondamentale,

quindi,  $z_1 = 1$  e  $z_2 = 0$  e definisco  $\frac{\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0}{\hbar} \equiv V$ , quindi

$$\dot{z}_2 = \frac{iV}{2} \left[ e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right] \text{ per avere una approssimazione migliore basta mettere questo eq. in quest'altro e risolvere perturbativamente. } \leftarrow$$

$$z_2 = \frac{V}{2} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega - \omega_0)t}}{\omega - \omega_0} - \frac{1 - e^{-i(\omega + \omega_0)t}}{\omega + \omega_0} \right] \text{ Comunque più avanti si farà un Eva elemento più esatto } \leftarrow$$

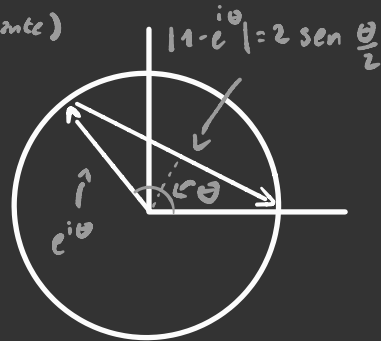
Se  $\omega \approx \omega_0$  il termine 2 sinist. è molto più grande di quello

2 dest. (Questo si chiama approssimazione di onde rotanti)

Per vedere qual'è la prob. che una

particella si trovi in  $|2\rangle$  bisogna prendere

$$|z_2|^2 = \frac{V^2}{4} \frac{|1 - e^{i(\omega - \omega_0)t}|^2}{(\omega - \omega_0)^2} = \frac{V^2 \sin^2 \left[ \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t \right]}{(\omega - \omega_0)^2}$$



Ricapitolando abbiamo ottenuto che un sistema a 2 livelli soggetto a un campo elettrico  $\vec{E}_0 \cos(\omega t)$  che parte con  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 0$  fa evolvere  $|a_2|^2$  così

$$|a_2|^2 = \frac{V^2 \sin^2[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t]}{(\omega - \omega_0)^2} \quad \text{con} \quad V = \langle 21 | \hat{D} | 1 \rangle \cdot \frac{\vec{E}_0}{\hbar}$$

Ma che succede se  $\vec{E}$  non è monocromatico?

$$i\hbar \dot{a}_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} = -\vec{D}_{21} \cdot \vec{E} a_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}$$

Visto che  $a_1 \approx 1$

$$\dot{a}_2 = \frac{i}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \vec{E} e^{i\omega_0 t}, \quad \text{quindi:} \quad a_2 = \frac{i}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega_0 t} dt$$

$$a_2 = \frac{i}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \hat{E}(\omega_0)$$

↑  
Trasformata di Fourier

$$|a_2|^2 = \frac{|\vec{D}_{21} \cdot \hat{E}(\omega_0)|^2}{\hbar^2}$$

Per verificare che funziona volendo possiamo metterci il campo elettrico che abbiamo

usato all'inizio  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ , noi però abbiamo considerato un intervallo di tempo limitato, quindi è come se fosse che  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \varphi(t)$

dove  $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0 \cos(\omega t') \varphi(t') e^{i\omega_0 t'} dt' = \vec{E}_0 \int_0^t (e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_0 t'} dt' = \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{2(\omega_0 - \omega)} \vec{E}_0$$

↑  
Se ne va via con l'onda rotante

Se faccio la norma e moltiplico  $\frac{|D_{21}|^2}{\hbar^2}$  ottengo che

$$|c_2|^2(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0|^2 \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t\right]}{(\omega_0 - \omega)^2} = \nu^2 \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t\right]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

## Determinazione coefficienti A e B di Einstein

Il coefficiente di Einstein  $B_{12}$  era quel numero che moltiplicato per la potenza alla frequenza di emissione  $\omega(\omega_0)$  dà il rate di emissione dallo stato 1 a quello 2.

Supponiamo che applichiamo al sistema un campo elettrico  $E(t)$  per un tempo finito  $T$ , quindi  $E(t) = E_0(t) \varphi(T)$ .

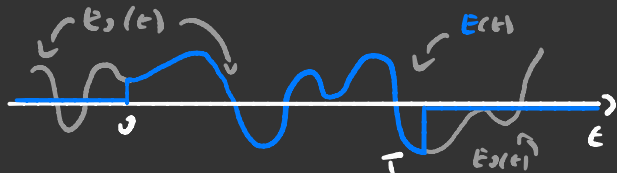
Se  $\omega t \gg N_1 = N$  e  $N_2 \approx 0$ ,

allora per piccolissimi  $T$

$$B_{12} \omega(\omega_0) = |c_2(T)|^2 / T$$

$$\omega(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\hat{E}_0(\omega_0)|^2$$

La Trasformata del prodotto è la convoluzione delle Trasformate



$$|c_2(T)|^2 = \left| \frac{D_{21}}{\hbar^2} \cdot \mathcal{F}[E(t)] \right|^2 = \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \cdot \hat{E}_0(\omega_0) * \tilde{\varphi}(\omega_0) \right|^2$$

$$= \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_0(\omega) \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)T\right]}{(\omega - \omega_0)} d\omega \right|^2$$

Supponiamo che  $E_0(t)$  sia molto simile a un esponenziale complesso con frequenza  $\omega_0$ , e che la sua trasformata abbia una deviazione standard  $\Delta\omega$ , quindi

$$\hat{E}_0(\omega) \approx \begin{cases} \tilde{E}_0 & \text{per } |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{per } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases}$$

si approssima così

$$|C_2(\tau)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |D_{21} \cdot \vec{E}_0|^2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \tau \right]}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{|V|^2} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{= I(\tau)}$

Il termine  $|D_{21} \cdot \vec{E}_0|^2$  è mediato su tutti gli angoli, se vuoi puoi fare i conti, il risultato comunque è che

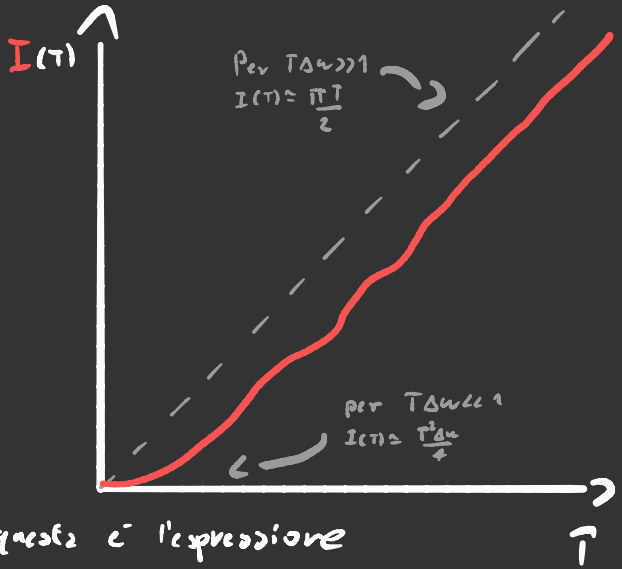
$$|D_{21} \cdot \vec{E}_0|^2 = \frac{1}{3} |D_{21}|^2 |E_0|^2$$

Adesso concentriamoci nel caso in cui  $T \Delta\omega \gg 1$

$$|C_2(\tau)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |D_{21} \cdot \vec{E}_0|^2 \frac{\pi T}{2}$$

$$B_{12} W(\omega_0) = B_{12} \frac{\epsilon_0 |E_0|^2}{2} =$$

$$= \frac{|D_{21}|^2 |E_0|^2 \pi T}{3 \hbar^2} \frac{1}{T}$$



$$B_{12} = \frac{\pi |D_{21}|^2}{3 \hbar^2 \epsilon_0}$$

È questa l'espressione analitica del coefficiente  $B$  di Einstein

La relazione tra questo coefficiente e gli altri due è già stata vista all'inizio

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{\hbar \omega_0^3}{\pi^2}$$

$\Rightarrow$

$$A_{21} = \frac{|D_{21}|^2}{3 \pi \hbar \epsilon_0} \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \omega_0^3$$

Suppongo che gli stati siano non degeneri

# Regola d'oro di Fermi

Spesso e volentieri quando si fa teoria delle perturbazioni: dipendenti dal tempo molti passaggi sono identici, ad esempio se vogliamo calcolare il Rate di transizione da uno stato iniziale  $|i\rangle$  a degli stati finali  $\{|f\rangle\}$  con un Hamiltoniana del tipo

$$H = H_0 + V \cos(\omega t)$$

Si arriva sempre al risultato che

Dopo poche delle approssimazioni che sono incluse con questa formula

Probabilità di passare dallo stato iniziale  $|i\rangle$  a quello finale  $|f\rangle$

$$\frac{P_{i \rightarrow f}(\tau)}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_f |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

Rate di Transizione

Per dimostrarlo sfruttiamo quello che si è imparato con i potenziali dipendenti dal tempo

$$i\hbar \dot{z}_f e^{-i\omega_f t} = \langle f|V|i\rangle \cos(\omega t) z_i e^{-i\omega_i t}$$

Approssimo  $z_i(t) = 1$

$$z_f \approx -\frac{i}{\hbar} \langle f|V|i\rangle \int_0^\tau e^{i(\omega_0 - \omega_f)t} dt = -\frac{i}{\hbar} \langle f|V|i\rangle \frac{e^{i(\omega_0 - \omega_f)\tau} - 1}{i(\omega_0 - \omega_f)}$$

$$|z_f|^2 = \frac{\tau^2}{\hbar^2} |\langle f|V|i\rangle|^2 \frac{\text{sen}^2\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)\tau\right]}{(\omega - \omega_0)^2}$$

$\approx \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle f|V|i\rangle|^2 \tau \delta(\omega - \omega_0)$  Sommando su tutti i possibili stati finali e dividendo per  $\tau$ , si ottiene la seconda formula di questa pagina

# Fenomeni di Allargamento

Finora abbiamo visto che il nostro sistema a 2 livelli assorbe **ESATTAMENTE** alla frequenza  $\Delta E/h$ .

Nella realtà, però può capitare che alcuni fenomeni tendano ad **allargare** l'intervallo di frequenze che è possibile assorbire.

Il primo fenomeno che F2 cioè è l'emissione spontanea.

Possiamo scrivere  $\dot{z}_2$  così

$$\frac{1}{h} \vec{D}_{21} \cdot \vec{E}(t) e^{i\omega_0 t} z_1 - i\gamma z_2 = i \frac{d z_2}{dt}$$

Se F2 cioè è messo qui perché se  $E=0$  allora  $\dot{z}_2$  ha un decadimento esponenziale

Se  $E=0$   $z_2(t) = e^{-\gamma t} \rightarrow N_2(t) = e^{-2\gamma t}$ , quindi  $2\gamma = A_{21}$

Ovvero qui sono un po' di conti saltando tra la Trasformata

Si è supposto di nuovo che  $z_1 \approx 1$

$$-\frac{D_{21} \cdot E(t) e^{i\omega_0 t}}{h} = i \left( \gamma + \frac{d}{dt} \right) z_2 \quad - \frac{D_{21}}{h} \tilde{E}(\omega + \omega_0) = i(\gamma + i\omega) \tilde{z}_2(\omega)$$

$$z_2(t) = -\frac{D_{21}}{h} \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\tilde{E}(\omega + \omega_0)}{i\gamma + i\omega} \right] = -\frac{D_{21}}{h} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{E}(\omega + \omega_0)}{i\gamma + i\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{D_{21}}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{E}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t}}{i\gamma + i\omega - i\omega_0} d\omega \leftarrow \text{Nel lim } \gamma \rightarrow 0 \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)t}}{2\pi(i\gamma + i\omega - i\omega_0)} \rightarrow i\delta(\omega - \omega_0)$$

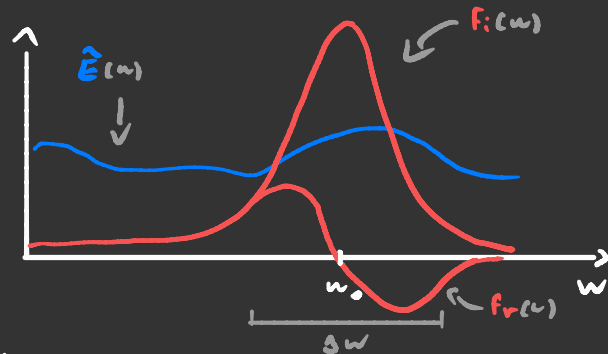
quindi si trova il caso di prima

$\frac{1}{i\gamma + i\omega - i\omega_0}$  è una funzione che è centrata in  $\omega = \omega_0$ , ma non ha varianza nulla, quindi si finisce per essere assorbite anche le frequenze vicine a  $\omega_0$

Se definiamo  $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{i\gamma - \omega} \equiv F_r + iF_i$  allora

$$z_2(t) = -\frac{D_{21}}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) F(\omega_0 - \omega) d\omega = -\frac{D_{21}}{h} \tilde{E}(\omega) + F(\omega)$$

Per valutare meglio questo integrale conviene tenere in considerazione che intorno a  $\omega_0$   $F_i \Rightarrow F_r$  visto che  $F_r$  è antisimmetrica in  $\omega_0$ , mentre  $F_i$  è simmetrica. Quindi in  $\omega \approx \omega_0$



$$F(\omega, -\omega) \approx i F_i(\omega, -\omega) \approx \frac{i}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad \leftarrow e^{-i(\omega - \omega_0)t} \approx 1$$

$$\text{Quindi: } \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) F(\omega_0 - \omega) d\omega \approx i \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \tilde{E}(\omega) F_i(\omega_0 - \omega) d\omega$$

Visto che  $F_i$  è centrata in  $(\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2)$  uso questi estremi d'integrazione (è equivalente a fare l'approssimazione dondolo rotante)

All'interno di  $(\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2)$  mi aspetto che la fase di  $\tilde{E}(\omega)$  vari poco, questo mi permette di dire che

$$\begin{aligned} |z_2(t)|^2 &\approx \left| \frac{D_{21}}{h} \right|^2 \left| \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \tilde{E}(\omega) F_i(\omega_0 - \omega) d\omega \right|^2 \\ &\approx \left| \frac{D_{21}}{h} \right|^2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} |\tilde{E}(\omega)|^2 |F_i(\omega_0 - \omega)|^2 d\omega \\ &\approx |\tilde{V}(\omega)|^2 |F_i(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Questo procedimento può essere generalizzato avendo questo pseudo-teorema:

$$|f * g|^2 \approx |f|^2 |g|^2 \text{ se } f, g \text{ è una funzione "stretta"}$$

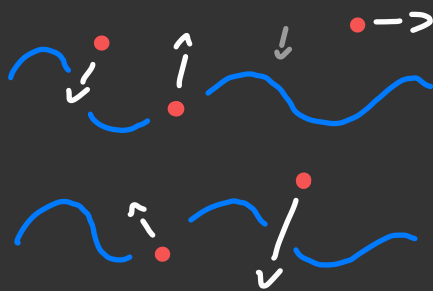
# Un'altro Fenomeno d'allargamento è L'Allargamento Doppler.

Supponiamo che il nostro sistema è 2 livelli e uno di tanti atomi che assieme formano un gas all'equilibrio termodinamico.

Visto che gli atomi si muovono, rispetto al loro sistema di riferimento la frequenza della radiazione risulta alterata.

Supponiamo che un fotone a frequenza  $\omega$  venga assorbito da un atomo a velocità iniziale  $\vec{v}_1$

Radiazione E.M. monocromatica



$$\begin{cases} M\vec{v}_1 + \hbar\vec{k} = M\vec{v}_2 \\ E_1 + \frac{1}{2} Mv_1^2 + \hbar\omega = E_2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 \end{cases}$$

$$\hbar\omega_0 \equiv E_2 - E_1$$

$$\begin{cases} M\vec{v}_1 + \hbar\vec{k} = M\vec{v}_2 \\ E_1 + \frac{1}{2} Mv_1^2 + \hbar\omega = E_2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 \end{cases}$$

$$\frac{M}{2} v_2^2 = \frac{M}{2} v_1^2 + \frac{\hbar^2}{M} k^2 + \hbar \vec{v}_1 \cdot \vec{k} \quad \hbar\omega_0 = \hbar\omega - \hbar \vec{v}_1 \cdot \vec{k} - \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

2° ordine  
↓

$$\text{Se } \vec{k} = k \hat{x} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{k} = v_x k = v_x \frac{\omega}{c}$$

$$\text{Quindi: } \omega_0 = \omega \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \quad \text{e} \quad \omega = \omega_0 \frac{1}{1 - v_x/c} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$$

Quindi: la frequenza  $\omega$  che deve avere la radiazione per fare effettuare la transizione all'atomo in moto differisce di un fattore  $(1 + \frac{v_x}{c})$  dalla frequenza nel caso statico ovvero  $\omega_0$ .



Ovvero dobbiamo vedere com'è la distribuzione delle frequenze assorbite di un sistema termodinamico

$$P(v_x) dv_x = \underbrace{P(v_x(\omega)) \frac{dv_x}{d\omega}}_{F_0(\omega)} d\omega \propto e^{-\frac{m v_x^2(\omega)}{k_B T}} d\omega$$

visto che  $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$   $v_x^2 = c^2 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}$

$$F_0(\omega) = \frac{c}{\omega_0} \sqrt{\frac{m}{2k_B T \pi}} e^{-\frac{m c^2 (\omega - \omega_0)^2}{2k_B T \omega_0^2}}$$

Indice come si allarga lo spettro di assorbimento

↑  
Normalizzazione

↑  
Gaussiane

(Probabilità e integrali)

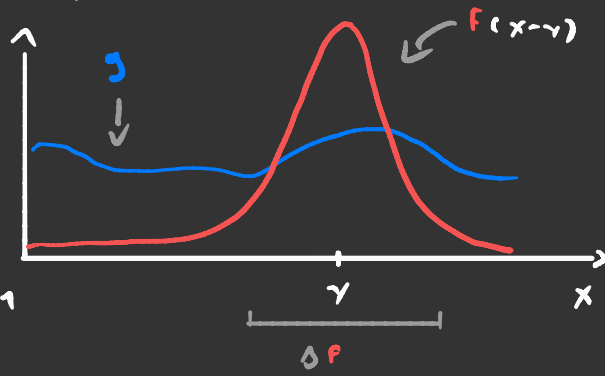
# Teorema:

$$\text{se } \frac{d^n g}{dx^n}(\Delta F) < 1 \quad \forall x, \forall n \geq 1$$

Equivalente a dire che  $F$  è molto stretta rispetto a  $g$

$$\text{e } F(x) = F(-x) \in \mathbb{R}, \int F(x) dx = 1$$

$$\text{allora } |g * F|^2 \approx |g|^2 * F$$



# Dimostrazione:

$$|g * F|^2 = \left| \int F(x) g(y-x) dx \right|^2 = \left[ \int F(x) g(y-x) dx \right] \cdot \left[ \int F(x) g^*(y-x) dx \right]$$

$$= \int F(x) F(x') g(y-x) g^*(y-x') dx dx' = \text{serie di Taylor in } \pi \circ$$

$$= \left[ \int F(x) F(x') dx dx' \right] |g(y)|^2 + \left[ \int F(x) F(x') x^2 x'^2 dx dx' \right] |g''(y)|^2 + \dots +$$

$$+ \left[ \int F(x) F(x') x^{2n} x'^{2n} dx dx' \right] |g^{(2n)}(y)|^2 + \dots =$$

$$= \sum_n^{\infty} |g^{(2n)}(y)|^2 \left| \int x^{2n} F(x) dx \right|^2 = |g(y)|^2 + |g''(y)|^2 |\Delta F|^4 + \dots = |g * F|^2$$

$$|g|^2 * F = \int F(x) |g(y-x)|^2 dx = \int F(x) \left| \sum_n x^n g^{(n)}(y) \right|^2 dx$$

$$\int F(x) \left| \sum_n x^n g^{(n)}(y) \right|^2 dx = \int F(x) \sum_{n,m} x^{n+m} g^{(n)} g^{(m)} dx =$$

$$= \sum_{n,m} g^{(n)}(y) g^{(m)}(y) \int x^{n+m} F(x) dx =$$

$$= |g(y)|^2 + [g'(y)g + 2g'g' + g g''] |\Delta F|^2 = |g|^2 * F$$

$$|g(y)|^2 + [g'(y)g + 2g'g' + g g''] |\Delta F|^2 \neq |g(y)|^2 + |g''(y)|^2 |\Delta F|^4$$

L'uguaglianza è esatta solo all'ordine zero

# Equazioni di Bloch ottiche

Finora abbiamo trattato un sistema a 2 livelli per piccoli  $V = \frac{1}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \vec{E}$ , però, grazie all'uso della matrice di densità  $\rho = \sum P_i |i\rangle\langle i|$  è possibile risolvere esattamente l'evoluzione temporale di un sistema a 2 livelli sotto un potenziale periodico. A dire il vero useremo l'appross. d'onda Rabiata

Supponiamo che il sistema si trovi in uno stato puro, cioè che  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  dove  $|\psi\rangle$  è una certa funzione d'onda, adesso scriviamo  $\rho$  rispetto alla base a 2 livelli:  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  se chiamo  $c_i \equiv \langle i|\psi\rangle$  abbiamo che

$$\rho_{ij} = \begin{vmatrix} |c_1|^2 & c_2^* c_1 \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{vmatrix}$$

I  $c_1$  e  $c_2$  sono gli stessi che sono stati definiti all'inizio del capitolo sui potenziali periodici nel tempo

$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{vmatrix} 2\text{Re}[c_1^* \dot{c}_1] & \dot{c}_2^* c_1 + c_2^* \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 c_1^* + c_2 \dot{c}_1^* & 2\text{Re}[c_2^* \dot{c}_2] \end{vmatrix}$$

Per rendere i conti più comodi però è meglio usare le  $a_i$  e definire

$$G_{ij} = \begin{vmatrix} |a_1|^2 & a_2^* a_1 \\ a_2 a_1^* & |a_2|^2 \end{vmatrix}$$

Essa non è la matrice di densità del sistema, ma a noi non ci interessa. A noi interessa trovare  $\langle \hat{L} \rangle$ .

Sapendo che

$$\langle \hat{L} | H_2 | \psi \rangle = i \hbar \dot{z}_i e^{-i \frac{E_i}{\hbar} t}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -i V \cos(\omega t) e^{i \omega_0 t} z_2 \\ \dot{z}_2 = -i V \cos(\omega t) e^{-i \omega_0 t} z_1 \end{cases}$$

Con ciò possiamo calcolare:  $\frac{d}{dt}$

$$\frac{dG_{11}}{dt} = 2 \operatorname{Re} \langle \dot{z}_1^*, z_1 \rangle = 2 \operatorname{Re} [-i V \cos \omega t e^{i \omega_0 t} z_1^* z_2]$$

$$= i V \cos \omega t [z_1^* z_2 e^{i \omega_0 t} - z_1 z_2^* e^{-i \omega_0 t}]$$

$$= i V \cos(\omega t) [G_{12} e^{i \omega_0 t} - G_{21} e^{-i \omega_0 t}] = - \frac{dG_{22}}{dt}$$

La Traccia deve rimanere costante.

Facendo un po' di conti esce fuori che

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} = -\dot{G}_{22} = i V \cos(\omega t) [G_{12} e^{i \omega_0 t} - G_{21} e^{-i \omega_0 t}] \\ \dot{G}_{12} = \dot{G}_{21}^* = i V \cos(\omega t) e^{-i \omega_0 t} (G_{11} - G_{22}) \end{cases}$$

Adesso usiamo l'approssimazione d'onda rotante

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} = -\dot{G}_{22} = i V [G_{12} e^{i(\omega_0 - \omega)t} - G_{21} e^{-i(\omega_0 - \omega)t}] \\ \dot{G}_{12} = \dot{G}_{21}^* = i V e^{-i(\omega_0 - \omega)t} (G_{11} - G_{22}) \end{cases}$$

Se definisco

$$\tilde{G}_{12} = G_{12} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \quad \tilde{G}_{21} = G_{21} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \quad \tilde{G}_{11} = G_{11} \quad \tilde{G}_{22} = G_{22}$$

Si ottiene che

$$\frac{d\tilde{G}_{11}}{dt} = -\frac{d\tilde{G}_{22}}{dt} = iV(\tilde{G}_{12} - \tilde{G}_{21})$$

$$\frac{d\tilde{G}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{G}_{21}}{dt} = iV(\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22}) + i(\omega_0 - \omega)\tilde{G}_{12}$$

Provo a cercare una soluzione del tipo  $\tilde{G}_{ij}(t) = \tilde{G}_{ij}(0) e^{i\Omega t}$

$$i\Omega \begin{vmatrix} \tilde{G}_{11} \\ \tilde{G}_{22} \\ \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} \end{vmatrix} = \frac{iV}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{2\Delta\omega}{V} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{2\Delta\omega}{V} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{G}_{11} \\ \tilde{G}_{22} \\ \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} \end{vmatrix} \quad \Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$$

E adesso vanno trovati autovalori e autovettori.

Senza stare a fare calcoli essi sono

$$\Omega = \pm \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + V^2} \quad \text{e} \quad \Omega = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{Degenerazione} \\ = 2 \end{matrix}$$

Gli autovettori sono un po' più lunghi da scrivere, quindi se ti servono vatteli a calcolare con Wolfram Alpha

# Equazioni di Bloch ottiche con emissione spontanea

I calcoli che abbiamo fatto poco fa non tengono conto che le particelle nello stato  $|2\rangle$  possono decadere nello stato  $|1\rangle$  spontaneamente per far ciò basta introdurre un termine  $\rightarrow P_{21}$

$$\frac{d\tilde{C}_{11}}{dt} = -\frac{d\tilde{C}_{22}}{dt} = -\underbrace{\frac{iV}{2}(\tilde{C}_{12} - \tilde{C}_{21})}_{\text{termine che c'è già prima}} - \underbrace{2\gamma_{sp}\tilde{C}_{22}}_{\text{Emissione spontanea}}$$

Ricordiamoci però che  $\tilde{C}_{11} = |z_1|^2$  e  $\tilde{C}_{22} = |z_2|^2$ , quindi anche  $\tilde{C}_{12} = \tilde{C}_{21}^* = z_1^* z_2 e^{-i(\omega_0 - \omega)t}$  cambiano, facendo i conti esce fuori che

$$\frac{d\tilde{C}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{C}_{21}^*}{dt} = \frac{iV}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{22}) + [i(\omega_0 - \omega) - \gamma_{sp}]\tilde{C}_{12}$$

Una volta introdotta l'emissione spontanea il sistema può andare all'equilibrio termico. Per vedere com'è messo basta porre tutte le derivate uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{iV}{2}(1 - 2\tilde{C}_{22}) + [i(\omega_0 - \omega) - \gamma_{sp}]\tilde{C}_{12} = 0 \\ \frac{V}{2}\text{Im}(\tilde{C}_{12}) - 2\gamma_{sp}\tilde{C}_{22} = 0 \\ \text{Re}^2[\tilde{C}_{12}] + \text{Im}^2[\tilde{C}_{12}] = (1 - \tilde{C}_{22})\tilde{C}_{12} \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema a 3 equazioni e 3 incognite esce fuori questa equazione qua

$$\tilde{C}_{22}(t \rightarrow +\infty) = \frac{V^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_{sp}^2 + V^2/2}$$

# Collisioni

Gli atomi se non stanno allo zero assoluto tendono a scontrarsi tra di loro, che effetto ha sulle equazioni di Bloch ottiche? Intanto bisogna chiedersi quanto spesso avvengono queste collisioni.

Il tempo medio di volo  $\tau_0$  è:

- Inversamente proporzionale alla sezione d'urto del processo  $\sigma$
- Inversamente proporzionale alla velocità media  $\langle v \rangle$
- Inversamente proporzionale alla densità di atomi  $N/V$
- E basta

$$\text{Quindi } \tau_0 = \frac{V}{\sigma \langle v \rangle N}$$

Se i nostri atomi li consideriamo come palline di diametro  $d$ ,  $\sigma = d^2 \pi$ .

È possibile scrivere la velocità media in funzione della temperatura così

$$\langle v \rangle = \frac{\int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v d^3 p d^3 x}{\int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} d^3 p d^3 x}$$

$$\begin{aligned} \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v d^3 p &= m^3 \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v d^3 v & m^3 \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v d^3 v &= m^3 4\pi \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^3 dv = \\ &= m^3 2\pi \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^2 dv^2 &= m \frac{8\pi}{\beta} \int e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} \frac{\beta m v^2}{2} d\left(\frac{\beta m v^2}{2}\right) &= m \frac{8\pi}{\beta^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x dx = \frac{8\pi}{\beta^2 m} \end{aligned}$$

$$\text{opp } \int e^{-\frac{p^2}{2m}} p^3 dp = 4\pi (2m)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{p^2}{2m}} p^3 dp = -8\pi m \frac{2}{\partial \beta} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = -4\pi m \sqrt{2m\pi} \left(-\frac{1}{2} \beta^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\langle v \rangle = \frac{8\pi m}{p^2} \cdot \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{4\pi m} \frac{1}{\sqrt{2m\pi}} = 2\sqrt{\frac{2k_B T}{m\pi}}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = 2 \frac{d^2 N}{V} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

Nel libro questo valore è moltiplicato per un fattore  $\sqrt{2}$ , questo può al posto della velocità ci va il valor medio della velocità relativista

Ora che abbiamo capito quanto spesso accadono le collisioni dobbiamo capire che succede ai livelli energetici.

Esistono 2 tipi di collisioni: quelle **Elastiche** e quelle **Anelastiche**.

**Le collisioni elastiche** lasciano i livelli energetici invariati, quindi al massimo cambiano le fasi di  $c_1$  e  $c_2$ , questo significa che gli unici elementi della matrice di densità che vengono modificati sono quelli fuori diagonale

$$\frac{d\tilde{c}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{c}_{21}^*}{dt} = \frac{iV}{2} (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}) + [i(\omega_0 - \omega) - (\gamma_{sp} + \gamma_{coll})] \tilde{c}_{12}$$

dove  $\gamma_{coll} = 1/\tau_0$  Dopo spiegarlo per bene come mai  $\gamma_{coll} = 1/\tau_0$  e perché va messo proprio qui

di solito  $\gamma_{coll} \gg \gamma_{sp}$  (circa  $10^4$  volte)

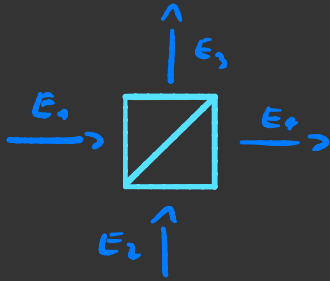
**Le collisioni Anelastiche** contribuiscono al fatto di deexcitare gli elettroni dagli stati eccitati, quindi ciò che fanno è aumentare i rate di decadimento, ma per ora non è dato sapere quanto esattamente



# Beam Splitters

Ora come ora non ti serve studiare bene sta parte

Possiamo rappresentare un generico beam-splitter con una matrice



Supponiamo che i campi siano monocromatici

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} T_{11} & R_{12} \\ R_{31} & T_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_{in} = M_{BS} \vec{E}_{out}$$

Questa matrice però ha il vincolo della conservazione dell'energia, quindi  $E_1^2 + E_2^2 = E_3^2 + E_4^2$ , cioè significa che la matrice debba essere unitaria, quindi i vettori colonna della matrice devono essere ortonormali:

$$R_{31}^2 + T_{11}^2 = R_{12}^2 + T_{32}^2 = 1 \quad R_{31}T_{32} + R_{12}T_{11} = 0$$

Dall'equazione a destra si deduce che  $t_{31} + t_{32} - t_{12} - t_{11} = \pm \pi$  dove le  $t$  sono le fasi complesse dei coefficienti  $R$  e  $T$ .

Facendo la norma quadrata dell'equazione a destra e sfruttando l'equazione a sinistra si ottiene che

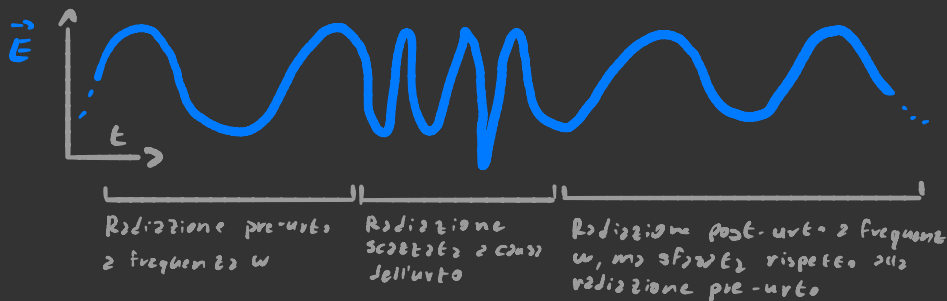
$$|T_{32}| = |T_{11}| \equiv T \quad \text{e} \quad |R_{31}| = |R_{12}| \equiv R$$

Con questi vincoli è comunque possibile creare una grande varietà di beam splitters, ad esempio settando tutti i coefficienti reali è possibile avere una matrice così

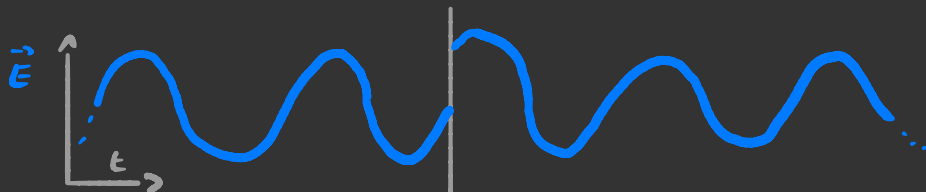
$$\begin{pmatrix} R & T \\ T & -R \end{pmatrix}$$

# Teoria Classica di Fluttuazioni ottiche e Coerenza

Supponiamo di avere un atomo di una sorgente luminosa. Questo atomo oscillando emette una radiazione monocromatica, però ogni tanto sbatte contro altri atomi



Durante l'urto la radiazione viene alterata, e dopo l'urto ritorna ad avere la stessa frequenza di prima, ma con una fase diversa se la durata media dell'urto  $\tau_u$  è  $\ll \tau_0$  del tempo medio di volo allora possiamo approssimare il grafico di sopra così



Quindi  $\vec{E}(t) = E_0 e^{-i\omega t + i\varphi(t)}$

dove  $\varphi(t)$  è una funzione costante a tratti.

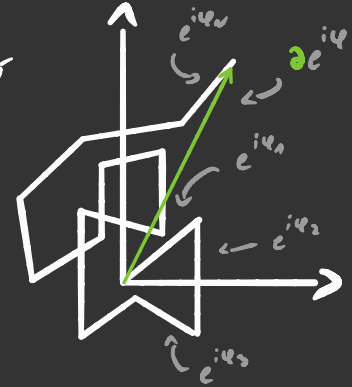


La lunghezza di un singolo tratto indica per quanto tempo la particella è stata in libero volo.

Se vogliamo sapere come il campo elettrico generato da un insieme di atomi basta sommare i vari campi elettrici

$$\vec{E}_{tot}(t) = \vec{E}_1(t) + \dots + \vec{E}_N(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} [e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}]$$

Il termine nelle parentesi può essere immaginato come una somma di tanti numeri complessi di norma 1.

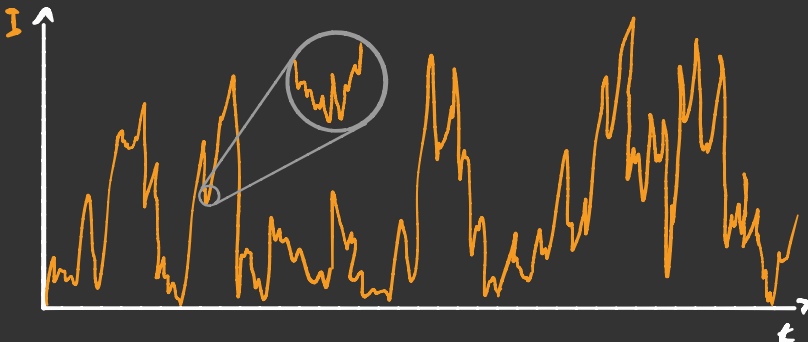


Questo è un esempio di random-walk

$$z(t) e^{i\varphi(t)} \equiv [e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}]$$

$$I(t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}_{tot}|^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 z^2(t)$$

Facendo una simulazione di  $I(t)$  esce questo tipo di funzione a frattale



Nelle prossime pagine si studieranno i vari tipi di rumori e quali informazioni si possono ricavare da essi

# Autocorrelazione

Sia  $R(t)$  un segnale rumoroso, e una funzione a media (quasi) nulla  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt \rightarrow 0$

Ogni singolo valore  $R(t)$  e' una variabile casuale, pero' e' correlato al valore che assume  $R(t-\Delta t)$  e  $R(t+\Delta t)$ , quindi e' possibile descrivere un generico segnale di rumore in termini della correlazione tra  $R(t)$  e  $R(t+t')$

In statistica la formula della correlazione tra due variabili casuali  $x$  e  $y$  e'

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

Per vedere come si generalizza questa formula al continuo basta mandare

$$x_i \rightarrow R(t), \quad y_i \rightarrow R(t+t'), \quad \bar{\cdot} \rightarrow \int dt$$

$$g_c(R, t) \equiv \text{Cov}[R(t), R(t+t')] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} R(t) R(t+t') dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} R^2(t) dt}$$

Purtroppo pero' non esistono strumenti che siano in grado di misurare direttamente  $E(t)$  o  $I(t)$  col grado di precisione necessario per fare il calcolo di sopra, pero' ci sono modi per misurare direttamente  $g_c$  con degli interferometri

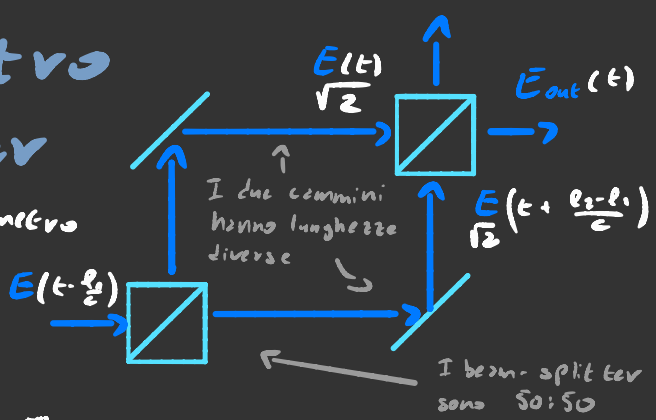
# Interferometro

## Mach-Zehnder

Prepariamo un interferometro

Fate così e vediamo che succede quando

si misura



$$\frac{\langle I_{out} \rangle}{\langle I_{in} \rangle} = 2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |E_{out}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E_{in}(t)|^2 dt}$$

Se definisco  $\frac{L_2 - L_1}{c} = \Delta t$

$$|E_{out}(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[ |E(t)|^2 + |E(t + \Delta t)|^2 + 2 \text{Re} [E(t) E(t + \Delta t)] \right]$$

$$\frac{\langle I_{out} \rangle}{\langle I_{in} \rangle} = 1 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} [E(t) E(t + \Delta t)] dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt} = 1 + \text{Re} \mathcal{G}_1(\Delta t)$$

Adesso calcoliamoci  $\mathcal{G}_1$  sapendo che  $E(t) = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n(t)}$

$$\begin{aligned} \int E(t) E(t + \Delta t) dt &= |E_0|^2 e^{-i\omega \Delta t} \sum_{n,m} \int e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_m(t + \Delta t)]} dt \quad \leftarrow \text{Per n=m in media zero} \\ &= |E_0|^2 e^{-i\omega \Delta t} \sum_n \int e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_n(t + \Delta t)]} dt = N |E_0|^2 e^{-i\omega \Delta t} \int e^{i[\varphi_1(t) - \varphi_1(t + \Delta t)]} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{i[\varphi_1(t) - \varphi_1(t + \Delta t)]} dt = \int_{\Delta t}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{T_0}} d\tau = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{\Delta t}{T_0}}$$

$$\int E(t) E(t + \Delta t) dt = N |E_0|^2 e^{-i\omega \Delta t - \frac{\Delta t}{T_0}}$$

$$\mathcal{G}_1(\Delta t) = e^{-i\omega \Delta t - \frac{\Delta t}{T_0}}$$

Il valore assoluto gliel'ho messo perché

$$\begin{aligned} \int E(t) E(t + \Delta t) dt &= \int E(t + \Delta t) E^*(t) dt = \\ &= \left[ \int E(t) E^*(t + \Delta t) dt \right]^* \end{aligned}$$

$\tilde{E}(t)$  con tutti gli urti non è più monocromatico quindi ci aspettiamo che lo spettro sia allargato

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int \tilde{E}(t) \tilde{E}^*(t+\Delta t)\right] &= \mathcal{F}[\tilde{E}(t)] \mathcal{F}[\tilde{E}^*(t+\Delta t)] : \\ &= |\tilde{E}(\omega)|^2 e^{-i\omega\Delta t} = \mathcal{F}\left[e^{-i\bar{\omega}\Delta t} e^{-i|\Delta t|/\tau_0}\right] e^{-i\omega\Delta t} : \\ &= \mathcal{F}\left[e^{-\frac{i|\Delta t|}{\tau_0}}\right] (\omega - \bar{\omega}) e^{-i\omega\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0 e^{-i\omega\Delta t}}{(\omega - \bar{\omega})^2 \tau_0^2 + 1} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che  $|\tilde{E}(\omega)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0}{(\omega - \bar{\omega})^2 \tau_0^2 + 1}$

La forma di questa funzione è quella di una lorentziana se definisco  $\gamma_{coll} \equiv 1/\tau_0$  si vede che

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 \propto \frac{\gamma_{coll}}{(\omega - \bar{\omega})^2 + \gamma_{coll}^2}$$

Quindi gli effetti collisionali creano un allargamento dello spettro di assorbimento di tipo lorentziano, questo spiega perché l'abbiamo inserito in quel modo alla fine della parte sulle eq. di Bloch ottiche.

# Correlazione dell'intensità

Ora che abbiamo visto l'autocorrelazione del campo elettrico vediamo come è autocorrelata l'intensità.

Questo ci dice come fluttua il valore dell'intensità nel tempo.

$$g_2(\Delta t) \equiv \frac{\langle \mathbf{I}(t) \mathbf{I}(t+\Delta t) \rangle}{\langle \mathbf{I} \rangle^2} = \frac{\langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}(t+\Delta t) \mathbf{E}^*(t) \mathbf{E}^*(t+\Delta t) \rangle}{\langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}^*(t) \rangle^2}$$

$$\text{Visto che } \mathbf{E}(t) = \sum_i \mathbf{E}_i(t) = E_0 e^{-i\omega t} [e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}]$$

$$\langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}(t+\Delta t) \mathbf{E}^*(t) \mathbf{E}^*(t+\Delta t) \rangle = \sum_i \langle \mathbf{E}_i(t) \mathbf{E}_i(t+\Delta t) \mathbf{E}_i^*(t) \mathbf{E}_i^*(t+\Delta t) \rangle +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \langle \mathbf{E}_i(t) \mathbf{E}_j(t+\Delta t) \mathbf{E}_j^*(t) \mathbf{E}_i^*(t+\Delta t) \rangle + \langle \mathbf{E}_i(t) \mathbf{E}_j(t+\Delta t) \mathbf{E}_i^*(t) \mathbf{E}_j^*(t+\Delta t) \rangle =$$

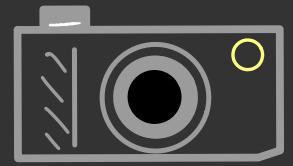
↪ Gli unici termini che tengono sono quelli che sono la media della norma quadrata di qualcosa, perché altrimenti in media fanno zero.

$$= N \langle |\mathbf{E}_i(t)|^2 |\mathbf{E}_i(t+\Delta t)|^2 \rangle + N(N-1) \langle |\mathbf{E}_i(t) \mathbf{E}_j(t+\Delta t)|^2 \rangle + N(N-1) \langle |\mathbf{E}_i(t)|^2 \rangle^2$$

Visto che  $N \ll N^2$  possiamo dire che

$$g_2(\Delta t) = 1 + |g_1(\Delta t)|^2$$

# Teoria semiclassica conteggio fotoni



Supponiamo di avere un rivelatore che conta quanti fotoni raggiungono il suo obiettivo all'interno di un intervallo temporale lungo  $T$  con una certa efficienza. Vogliamo calcolare la probabilità che  $m$  fotoni vengano rilevati nell'intervallo di tempo  $(t, t+T)$   $P_m(t, T)$ . Ora vediamo di calcolarlo.

La probabilità che tra  $t$  e  $t+dt$  ne sono già stati rilevati  $m$

La probabilità che tra  $(t', dt')$  non ne viene rilevato nessuno

Gli altri sono termini di ordine più basso

$$P_m(t, t'+dt') = P_m(t, t') P_0(t', dt') + P_{m-1}(t, t') P_1(t', dt') + \dots$$

La probabilità che tra  $t$  e  $t'+dt'$  vengono rilevati  $m$  fotoni

La probabilità che tra  $t$  e  $t'$  ne sono già stati rilevati  $m-1$

La probabilità che tra  $(t', dt')$  non ne viene rilevato 1

Se definisco  $p(t)dt \equiv P_0(t, dt)$ , allora  $P_0(t, dt) = 1 - p(t)dt$

$$p(t)dt = \eta I(t)dt$$

La probabilità per unità di tempo che un fotone venga contato è proporzionale alla potenza incidente

$$P_m(t, t'+dt') = P_m(t, t') [1 - p(t')dt'] + P_{m-1}(t, t') p(t')dt'$$

$$\frac{dP_m(t, t')}{dt'} = P_{m-1}(t, t') p(t') - P_m(t, t') p(t')$$

$$\left\{ \frac{dP_m(t, t')}{dt'} = [P_{m-1}(t, t') - P_m(t, t')] p(t') \right.$$

$$\left. \frac{dP_0(t, t')}{dt'} = -P_0(t, t') p(t') \leftarrow \text{Visto che } P_{-1} \text{ non ha nessun significato, l'equazione di } P_0 \text{ è così}$$



Supponendo che  $I(t)$  cambia poco sulla scala di tempi di  $T$   
 $\left( \frac{dI(t)}{dt} T \ll 1 \right)$  possiamo dire che

$$\frac{dP_0(t, t')}{dt'} = -P_0(t, t') \eta I(t+t') \rightarrow P_0(t, t') = e^{-\eta I(t+t') t'}$$

È possibile dimostrare per induzione che

$$P_m(t, T) = \frac{[\eta I(t+T) T]^m}{m!} e^{-\eta I(t+T) T}$$

Per calcolare in media quanti fotoconteggi vengono fatti:

$$\langle m \rangle = \sum_m m P_m(t, T) = \langle \eta I(t+T) T \rangle$$

# Quantizzazione del campo

Le Flashcards di questa  
sezione sono poche e incomplete

## Elettromagnetico

Finora abbiamo trattato il campo Elettromagnetico classicamente, adesso vediamo come si comporta quantisticamente.

Le equazioni classiche dell'elettrodinamica valgono sempre, ma  $E$ ,  $B$ ,  $V$  ed  $A$  diventano tutti degli operatori.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho / \epsilon_0 & \nabla \cdot B &= 0 & E &= -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \\ \nabla \wedge E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \wedge B &= \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} & B &= \nabla \wedge A\end{aligned}$$

L'energia diventa l'Hamiltoniana:  $H = \epsilon_0 \int |E|^2 + \frac{1}{4\pi} \int |B|^2$ .  
scritto così però è poco utile

Le equazioni di Maxwell scritte in Gauge di Coulomb soddisfano  $\nabla \cdot A = 0$  e sono scritte così

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0 \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 V - \nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J$$

Adesso, per iniziare vediamo che succede nel vuoto

$$\rho, J = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \Rightarrow V = 0 \\ J = 0 \Rightarrow \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Supponiamo che anche al contorno } V=0$$

Le soluzioni dell'equazione  $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$  sono

$$\hat{e}_{\kappa\lambda} \left[ A_{\kappa\lambda} e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t} + A_{\kappa\lambda}^* e^{-i\kappa \cdot \mathbf{x} + i\omega t} \right] \text{ con } \hat{e}_{\kappa\lambda} \cdot \kappa = 0 \text{ Perché } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Dove  $\lambda \in \{1, 2\}$  indica la polarizzazione, adesso calcoliamoci i campi.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega \hat{e}_{\kappa\lambda} \left[ A_{\kappa\lambda} e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t} - A_{\kappa\lambda}^* e^{-i\kappa \cdot \mathbf{x} + i\omega t} \right]$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = i\kappa\lambda \hat{e}_{\kappa\lambda} \left[ A_{\kappa\lambda} e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t} - A_{\kappa\lambda}^* e^{-i\kappa \cdot \mathbf{x} + i\omega t} \right]$$

Ora che abbiamo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possiamo calcolarci l'Hamiltoniana

$$H = \int \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right] d^3x$$

Se uno si fa tutti i calcoli noiosi ottiene che

$$H = \sum_{\kappa\lambda} \epsilon_0 V \omega_{\kappa}^2 \left( A_{\kappa\lambda} A_{\kappa\lambda}^* + A_{\kappa\lambda}^* A_{\kappa\lambda} \right)$$

$$H_{\kappa\lambda} \equiv \epsilon_0 V \omega_{\kappa}^2 \left( A_{\kappa\lambda} A_{\kappa\lambda}^* + A_{\kappa\lambda}^* A_{\kappa\lambda} \right)$$

Ricorda che  $A$  e  $A^*$  sono degli operatori, quindi non è detto che commutino

L'Hamiltoniana scritta così sembra peggio di com'era scritta in termini dei campi, noi vogliamo cercare di ricondurre  $H_{\kappa\lambda}$  all'Ham. di un oscillatore armonico che dovrebbe essere tipo così:

$$H_{\kappa\lambda} = \frac{\hbar \omega_{\kappa}}{2} \left( a_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda}^{\dagger} + a_{\kappa\lambda}^{\dagger} a_{\kappa\lambda} \right)$$

Però c'è bisogno che le  $a$  rispettino le relazioni di commutazione dell'oscillatore armonico

$$[a_{\kappa\lambda}, a_{\kappa\lambda}^{\dagger}] = \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Se si definisce definiscono  
 gli operatori di creazione e  
 distruzione così l'Hamiltoniana

$$\begin{cases} a_{k\lambda} \equiv \sqrt{\frac{2\epsilon_0 V \omega_k}{\hbar}} A_{k\lambda} \\ a_{k\lambda}^+ \equiv \sqrt{\frac{2\epsilon_0 V \omega_k}{\hbar}} A_{k\lambda}^* \end{cases}$$

diventa come quella dell'oscillatore armonico. Ora però  
 dobbiamo verificare che rispetti le relazioni di commutazione

$$[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^+] = \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k} [A_{k\lambda}, A_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Purtroppo per calcolare i commutatori bisogna  
 usare la teoria dei campi e questo è al di là dello scopo  
 di questo quaderno, quindi bisogna fidarsi che l'equazione  
 di sopra sia corretta.

Gli operatori  $a^+$  e  $a$  nell'oscillatore armonico sono  
 interpretati come operatori che fanno salire o scendere  
 di livello energetico. Nel caso del campo E.M.  $a^+$  e  $a^-$   
 sono visti come gli operatori che creano o distruggono  
 un fotone. E per questo vengono chiamati operatori di  
**Creazione e Distruzione**.

L'operatore  $a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} = n_{k\lambda}$  indica quanti fotoni ci  
 sono nello stato  $k, \lambda$

L'Hamiltoniana si può riparametrizzare così

$$H_{k\lambda} = \underbrace{\hbar \omega_k}_{\substack{\text{Energia del} \\ \text{singolo fotone} \\ \text{a frequenza } \omega_k}} \left( \underbrace{a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda}}_{\substack{\text{Numero di fotoni} \\ \text{nello stato } k, \lambda}} + \frac{1}{2} \right) \quad \leftarrow \substack{\text{Costante addizionale} \\ \text{che volendo si} \\ \text{può ignorare}}$$

# Statistica del campo E.M

I fotoni, avendo spin 1, sono dei bosoni e quindi rispettano la statistica di Bose-Einstein.

Come abbiamo visto all'inizio di questo quaderno la probabilità dello stato  $E$  è  $P(E) = e^{-\frac{N\hbar\omega}{kT}} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}})$

Per quanto riguarda gli stati io posso scrivere un auto stato dell'energia come  $\bigotimes_{k,\lambda} |n_{k,\lambda}\rangle \equiv |\{n_{k,\lambda}\}\rangle$ , quindi un generico stato quantistico è scrivibile come  $\sum_{\{n_{k,\lambda}\}} c(\{n_{k,\lambda}\}) |\{n_{k,\lambda}\}\rangle$

Quindi la matrice di densità di questo sistema è

$$\rho = \sum P(E(\{n_{k,\lambda}\})) |\{n_{k,\lambda}\}\rangle \langle \{n_{k,\lambda}\}| =$$

$$= \sum_{\{n_{k,\lambda}\}} \bigotimes_{k,\lambda} e^{-\frac{n_{k,\lambda}\hbar\omega_k}{kT}} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{kT}}) |n_{k,\lambda}\rangle \langle n_{k,\lambda}| =$$

$$= \bigotimes_{k,\lambda} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{kT}}) \sum_{n_{k,\lambda}=0}^{\infty} e^{-\frac{n_{k,\lambda}\hbar\omega_k}{kT}} |n_{k,\lambda}\rangle \langle n_{k,\lambda}| = \rho$$

Se vuoi capire perché ho seminato prodotto tensoriale e sommatoria così prova a calcolarlo tu, scrivere tutti i conti è lungo

$$\rho = \bigotimes_{k,\lambda} \rho_{k,\lambda}$$

$$\rho_{k,\lambda} \equiv (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{kT}}) \sum_{n_{k,\lambda}=0}^{\infty} e^{-\frac{n_{k,\lambda}\hbar\omega_k}{kT}} |n_{k,\lambda}\rangle \langle n_{k,\lambda}|$$

Da questa equazione è sinistruo si vede che la matrice di densità è il prodotto tensoriale di tante matrici di densità di singolo modo normale  $\rho_k$

$$\langle n_{k,\lambda} | \rho_{k,\lambda} | n_{k,\lambda} \rangle = \text{tr}(\rho_{k,\lambda} |n_{k,\lambda}\rangle \langle n_{k,\lambda}|) =$$

$$x \equiv \frac{\hbar\omega_k}{kT}$$

$$= (1 - e^{-x}) \sum_{n_{k,\lambda}=0}^{\infty} n_{k,\lambda} e^{-n_{k,\lambda}x} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n_{k,\lambda}=0}^{\infty} e^{-n_{k,\lambda}x} =$$

$$= -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = (1 - e^{-x})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})$$

$$= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{kT}} - 1}$$

chiaramente esce la Bose-Einstein

# Interazione

## Fotoni - Materia

Finora abbiamo visto come gli atomi interagiscono con il campo E.M. classico, ora vediamo che succede se si considera la natura quantistica del campo.

Se supponiamo che il nucleo si stia bello fermo in  $r=0$  abbiamo che densità di carica e corrente sono

$$\rho = -e \sum_{\lambda=1}^Z \delta(r-r_{\lambda}) + Ze \delta(r) \quad \mathbf{j} = -e \sum_{\lambda=1}^Z \mathbf{v}_{\lambda} \delta(r-r_{\lambda})$$

Nella gauge di Coulomb il potenziale elettrostatico è uguale a

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda=1}^Z \frac{-e}{|r-r_{\lambda}|} + \frac{Ze}{r}$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{\lambda} [\mathbf{p}_{\lambda} - e\mathbf{A}(r_{\lambda})]^2 - \sum_{\lambda} eV(r_{\lambda}) + \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2m} \sum_{\lambda} [\mathbf{p}_{\lambda}^2 - eV(r_{\lambda})]}_{H_A \text{ Ham. Atomo}} - \underbrace{\frac{e}{m} \sum_{\lambda} \mathbf{p}_{\lambda} \cdot \mathbf{A}(r_{\lambda}) + \frac{e^2}{2m} \sum_{\lambda} \mathbf{A}^2(r_{\lambda})}_{H_I \text{ Ham. di interazione}} + H_{EM}$$

Questo termine è molto piccolo

Questa Hamiltoniana, scritta così ha la proprietà che è scrivibile come la somma delle due hamiltoniane libere degli elettroni e del campo ( $H_A$  e  $H_{EM}$ ) + un termine di interazione che può essere trattato perturbativamente

Il termine  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} A^2(r_{\lambda})$  è molto piccolo, quindi si butta via, il termine  $-\frac{e}{m} \sum_{\lambda} p_{\lambda} \cdot A(r_{\lambda})$  è scrivibile così ↷

Non erano le dim di nessuna parte

$$-\frac{e}{m} \sum_{\lambda} p_{\lambda} \cdot A(r_{\lambda}) = \sum_{\lambda} D_{\lambda} \cdot E(r_{\lambda}) + \sum_{\lambda} M_{\lambda} \cdot B(r_{\lambda})$$

Energia interazione dipolo-campo elettrico ↷

Energia di interazione dipolo-campo magnetico ↷

$$D_{\lambda} \equiv -e r_{\lambda} \quad M_{\lambda} \equiv -\frac{e \hbar \lambda}{m} \quad \leftarrow L_{\lambda} \text{ è il momento angolare orbitale. Volendo si può anche aggiungere lo spin}$$

Adesso proviamo ad approssimare la parte di dipolo Non scrivo l'indice  $\lambda$ , mi serve sempre lo

$$D \cdot E(r) = -e r_i E_i(r) = -e r_i E_i(\omega) - e \frac{1}{2} r_i r_j \partial_j E_i(\omega) + \dots =$$

$$= D \cdot \vec{E}(\omega) + \vec{Q} \cdot \nabla \otimes \vec{E}(\omega) + \dots$$

↷ Dipolo                      ↷ Quadrupolo

Il secondo termine è più piccolo rispetto al primo di un fattore  $v/c$  e  $|v| = \omega r$  è causa della derivata di  $E$

Se approssimo  $\hbar \omega$  nell'ordine dell'energia dell'elettrone  $\omega \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 \hbar}$

Visto che la somma dei dipoli e dei quadrupoli non è altro che il momento di dipolo e quadrupolo dell'intero sistema

Quindi il rapporto tra il contributo del termine di dipolo e quello di quadrupolo è  $\sim \frac{\omega r_0}{c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 \hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}$

$$\sum_{\lambda} D_{\lambda} \cdot E(r_{\lambda}) = D \cdot E(\omega) + Q \cdot \nabla \otimes E(\omega) + \dots \quad D = \sum_{\lambda} D_{\lambda} \quad e \quad Q = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}$$

$$M \cdot B(r) = M_i B_i(\omega) + M_{ij} \partial_j B_i(\omega) + \dots$$

il termine  $M \cdot B(\omega)$  è  $\frac{\hbar}{m c v_0} \approx 0,005$  volte più piccolo del termine  $D \cdot E(\omega)$  ↷ Non dovrebbe essere  $\alpha$ ?

$$H_2 = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{E}(\omega)}_{\text{ordine } 0} + \underbrace{\vec{M} \cdot \vec{B}(\omega) + \vec{Q} \cdot (\nabla \otimes \vec{E})}_{\text{I ordine}} + \dots$$

# Interazione nell' approssimazione di dipolo

Ritorniamo ad analizzare l'Hamiltoniana d'interazione

$$H_I = -\frac{e}{m} \sum_{\alpha} p_{\alpha} A(\mathbf{r}_{\alpha}) + \frac{e^2}{2\epsilon_0} \sum_{\alpha} A^2(\mathbf{r}_{\alpha}) \approx \hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{R})$$

$\approx 0$       Posizione del nucleo

Vogliamo scriverla in termini di  $a, a^{\dagger}, \pi$  e  $\pi^{\dagger}$

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \leftarrow \text{Versore di polarizzazione}$$

Se supponiamo di aver scelto un  $\omega$  che si occupa di transizioni tra solo 2 livelli energetici:  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ .

L'operatore di dipolo  $\hat{\mathbf{D}}$ , in questo caso ha questa forma

$$\hat{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{D}} (\pi + \pi^{\dagger}) \quad \text{dove } \pi = |1\rangle\langle 2|$$

$\hat{\mathbf{D}}$  Vettore che non è un operatore

$$\hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V \hbar}} \overbrace{\vec{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}}^{= g_{\mathbf{k}\lambda}} (a_{\mathbf{k}\lambda} \underbrace{\pi}_{\substack{\uparrow \\ \text{Distrugge: 1} \\ \text{fotone}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} - \pi \underbrace{a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Sale di} \\ \text{livello}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}})$$

I termini  $a^{\dagger} \pi$  e  $\pi^{\dagger} a$  non sono consentiti perché l'energia non viene conservata



# Rate di assorbimento ed emissione

Per vedere come si evolvono temporalmente gli stati scriviamo

$$\begin{cases} \langle n_{k\lambda}-1, 2 | H_I | n_{k\lambda}, 1 \rangle = i\hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}} e^{i(k \cdot R + i(\omega_0 - \omega_k)t)} \\ \langle n_{k\lambda}+1, 1 | H_I | n_{k\lambda}, 2 \rangle = -i\hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}+1} e^{-i(k \cdot R - i(\omega_0 - \omega_k)t)} \end{cases}$$

Una cosa importante da notare è che gli elementi di matrice con  $\omega_0 \neq \omega_k$  non sono nulli, quindi il nostro sistema a 2 livelli interagisce con TUTTI i fotoni! Ma allora come mai solo i fotoni con  $\omega_k = \omega_0$  vengono assorbiti? Il fatto è che l'interazione non è istantanea, dobbiamo dargli almeno un po' di tempo  $\tau$ .

$$P_{1 \rightarrow 2}(\tau) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^\tau \langle n_{k\lambda}-1, 2 | H_I | n_{k\lambda}, 1 \rangle dt \right|^2 = g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} \left| \int_0^\tau e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} dt \right|^2 = g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} \frac{\text{sen}^2\left[\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_k)\tau\right]}{(\omega_0 - \omega_k)^2}$$

$\uparrow$  È approssimato perché sarebbe  $\int_0^\tau e^{i\omega t} dt$  ma poi si approssima l'esponenziale al primo ordine

Se facciamo evolvere il sistema per un tempo  $\tau \gg |\omega_0 - \omega_k|^{-1}$  abbiamo che

$$\frac{\text{sen}^2\left[\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_k)\tau\right]}{(\omega_0 - \omega_k)^2} \rightarrow \frac{\pi\tau}{2} \delta(\omega_0 - \omega_k)$$

Quindi abbiamo che gli unici fotoni che fanno fare la transizione sono quelli con la frequenza ad esattamente  $\omega_k = \omega_0$ , solo che c'è il problema che la probabilità diverge, che senso ha? (Per chi sa lo sia perso questo NON è una densità di probabilità, ma una probabilità vera e propria. Non dovrebbe fare al massimo?)

Il punto è che non esistono veramente fotoni con una frequenza ben definita, ogni fotone è una sovrapposizione di tanti fotoni a frequenze diverse, quindi di fatto noi non partiamo mai veramente da uno stato  $|n_{k\lambda}, 1\rangle$ .

Se supponiamo che il nostro campo E.M. abbia una matrice di densità fatta così: In realtà la matrice di densità del campo E.M. in generale è più complicata

$$\rho = \sum_{\lambda} \int P_{\lambda}(\mathbf{k}) |n_{k\lambda}, 1\rangle \langle n_{k\lambda}, 1| \frac{d^3\mathbf{k}}{8\pi^3} = 2 \int \underbrace{\frac{1}{\pi^2 c^3} P_{\lambda}(\mathbf{k})}_{\equiv P(\omega)} |n_{k\lambda}, 1\rangle \langle n_{k\lambda}, 1| d\omega$$

$$P_{e_{12}}(\tau) = \text{Tr} (H_I |n_{k\lambda}, 1, 2\rangle \langle n_{k\lambda}, 1, 2| H_I \rho) =$$

$$= 2 \int P(\omega) \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\tau} \langle n_{k\lambda}, 1, 2| H_I |n_{k\lambda}, 1\rangle dt \right|^2 d\omega = g_{k\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 V \hbar}} \vec{D} \cdot \hat{e}_{k\lambda}$$

$$= 8\tau \pi g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} \int P(\omega) \delta(\omega - \omega_k) d\omega = 2\tau \frac{\pi \omega_k n_{k\lambda}}{\epsilon_0 V \hbar} |D \cdot \hat{e}_{k\lambda}|^2 P(\omega_k)$$

$$= \frac{\tau \pi |D \cdot \hat{e}_{k\lambda}|^2 \omega(\omega_k)}{\epsilon_0 \hbar^2} \quad B_{12} = \frac{P_{e_{12}}(\tau)}{\tau W(\omega_0)} = \frac{\pi |D \cdot \hat{e}_{k\lambda}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{\pi |D_{12}|^2}{3 \epsilon_0 \hbar^2}$$

c'è da tenere in considerazione però che con questa formulazione non c'è una vera e propria differenza tra emissione spontanea e stimolata. Possiamo però dividere l'elemento di matrice di emissione dell'Hamiltoniana d'interazione

$$\text{Emissione stimolata} \rightarrow \hbar^2 g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} + \hbar^2 g_{k\lambda}^2 \leftarrow \text{Emissione spontanea}$$

c'è anche da tenere in considerazione che noi abbiamo considerato solo un ben determinato  $\mathbf{k}$  e  $\lambda$ , l'emissione spontanea può anche avvenire quindi a un  $\mathbf{k}$  diverso da quello della radiazione incidente.

# Vettore di Poynting

Adesso proviamo a calcolarci tutte queste cose sull'auto-correlazione trattando i campi quantisticamente

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \left( a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + i\omega_{\mathbf{k}}t} \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} \left( a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + i\omega_{\mathbf{k}}t} \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \wedge \vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} :$$

↑  
Controlla i segni

$$= -\frac{c^2 \hbar}{2V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left( a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + i\omega_{\mathbf{k}}t} \right) \left( a_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{R} - i\omega_{\mathbf{k}'}t} - a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{R} + i\omega_{\mathbf{k}'}t} \right) (\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}')$$

$$= \frac{c^2 \hbar}{2V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}' a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{R} - i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{R} + i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} - a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{R} - i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{R} + i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}$$

In generale però quando si calcola il valor medio del vettore di Poynting  $\langle \mathbf{S} \rangle$  si fa con auto-stati dell'Ham.  $|n, \lambda\rangle$  oppure con la matrice di densità all'equilibrio termodinamico  $\rho = e^{-\frac{H_{\text{em}}}{kT}} |k, \lambda\rangle \langle k, \lambda|$ .

Quando si calcolano  $\langle n, \lambda | \mathbf{S} | n, \lambda \rangle$  gli unici elementi che non fanno zero nella sommatoria sono quelli con  $k=k'$  e  $\lambda=\lambda'$

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}, t) = -\frac{c^2 \hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left( a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \right) \vec{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\epsilon_0} \left( \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^\dagger - \mathbf{B} \wedge \mathbf{E}^\dagger \right) :$$

Se si lavora con un'onda piana monocromatica abbiamo che

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}, t) = \frac{c^2 \hbar}{2} \left( a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \right) \vec{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\epsilon_0 \omega} \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\dagger + \mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E} \right) :$$

$$= \frac{2}{4\epsilon_0 \omega} \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\dagger \right) + \cos t \vec{\eta}$$

Non conta perché non si può misurare

↑  
 $\mathbf{E}^\dagger$  per qualche ragione è la parte con l'operatore di distruzione ed  $\mathbf{E}$  di creazione

# Ottica quantistica 2 singolo modo

Adesso torniamo a trattare il campo Elettromagnetico da solo, e per semplicità concentriamoci su un singolo modo.

In questo caso l'Hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico

$$H = \hbar\omega \left( a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right)$$

L'operatore di campo elettrico è scrivibile così

$$E(x) = \frac{1}{2} \left( 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \right) \left[ a e^{-ix} + a^{\dagger} e^{ix} \right] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

Per ora ignoreremo i termini nella parentesi grigia perché cambiamo unità di misura per  $E$

Bisogna notare che  $x$  non ha nulla a che vedere con la funzione d'onda dei fotoni.  $x$  serve a distinguere due operatori di campo elettrico diversi. Inoltre abbiamo che

$$[E(x_1), E(x_2)] = -\frac{i}{2} \text{sen}(x_1 - x_2)$$

$$\Delta E(x_1) \Delta E(x_2) \geq \frac{1}{2} |\text{sen}(x_1 - x_2)|$$

Quindi la fase del campo E.M. è qualcosa che è soggetta a dell'indeterminazione quantistica anche se si considera un singolo modo.

Gli autostati  $E$  dell'Hamiltoniana sono detti: **Stati Numero**

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

# Stati Coerenti

Gli stati coerenti: sono gli autostati dell'operatore di **distribuzione**  $\hat{D}$   
 Stranamente per riuscire a capire meglio il campo E.M. a  
 singolo modo e più importante lavorare con gli stati coerenti che  
 con gli stati numero.

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Bisogna stare attenti! Visto che  $\hat{D}$  non è un operatore  
 hermitiano non è detto che formino una base ortogonale,  
 infatti:

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Nonostante ciò gli stati coerenti formano un insieme completo  
 delle funzioni  $\mathbb{L}^2$ , ma bisogna tenere in considerazione che  
 sono sovrabbondanti.

È possibile scrivere gli stati coerenti in questa forma più semplice

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n 2^{n/2}}{n!} |0\rangle = e^{2\alpha^\dagger - \frac{|\alpha|^2}{2}} |0\rangle$$

definisco l'operatore di

Traslazione coerente come

$$D(\alpha) = e^{2\alpha^\dagger - \frac{|\alpha|^2}{2}}$$

A dire il vero non so  
 come si chiama in italiano.  
 In inglese si dice  
 "Coherent-state displacement  
 operator"

La probabilità di trovare  $n$  fotoni  
 nello stato  $\alpha$  è uguale a

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

È una Poissoniana

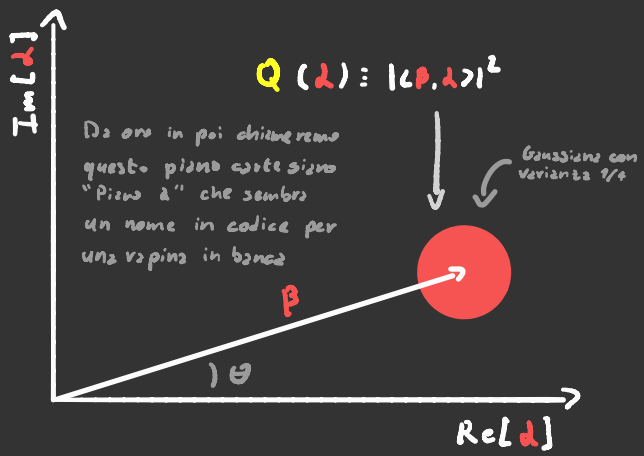
È possibile scrivere  $|\alpha|^2 = \langle \alpha | 2^\dagger \rangle \langle 2 | \alpha \rangle =$

$$= \langle \alpha | n | \alpha \rangle = \langle n \rangle, \text{ quindi } P(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

È possibile "rappresentare" una generica funzione d'onda  $\psi$  definendo la quasi-probabilità

$$Q(\alpha) = |\langle \psi, \alpha \rangle|^2$$

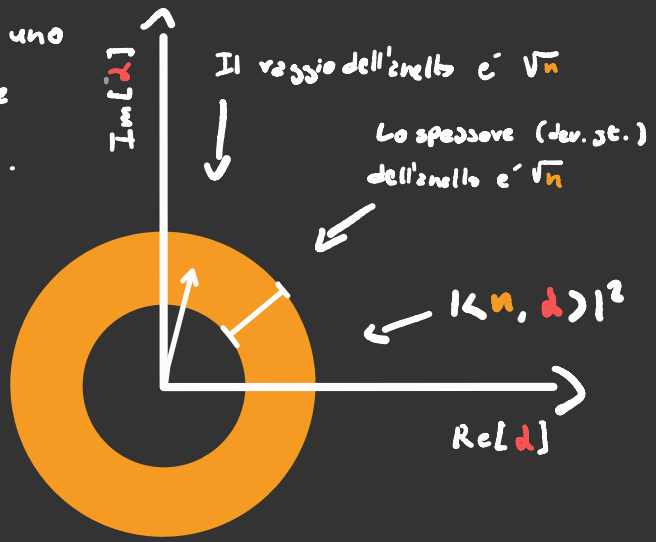
Nella figura qui a destra è rappresentato lo stato coerente  $|\beta\rangle$ .



Se si vuole rappresentare uno stato numero abbiamo che avrà una forma a ciambella.

Se si vuole essere più precisi abbiamo che la distribuzione radiale è quella della pagina prima

$$Q = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$



L'operatore di evoluzione coerente  $D(\alpha)$  trasforma la Quasidistribuzione di  $\alpha$ .

Ma qual'è il senso di questa strana rappresentazione delle funzioni d'onda?

Tutto gira intorno a queste 2 equazioni:

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle = |\alpha| \cos(x - \theta) \quad [\Delta E(x)]^2 = 1/4$$

Per gli stati coerenti

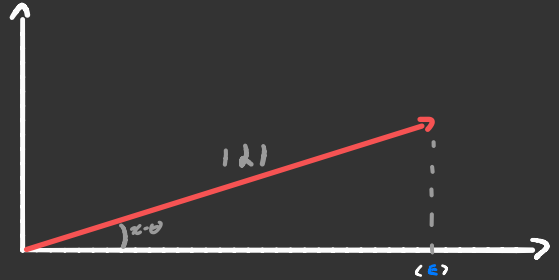
L'equazione  $\langle \lambda | E(x) | \lambda \rangle = |\lambda| \cos(x - \theta)$  ci dice che gli stati coerenti hanno una "preferenza" per alcune fasi del campo elettrico. Gli stati numerici, ad esempio, non hanno questo tipo di preferenza, infatti:  $\langle n | E(x) | n \rangle = 0$ .

La seconda dice quello che dice  $\Delta E = 1/2$ .

Adesso proviamo a rappresentare queste equazioni graficamente.

La prima equazione sembrerebbe semplice da rappresentare  $\rightarrow$

$$\langle \lambda | E(x) | \lambda \rangle = |\lambda| \cos(x - \theta)$$

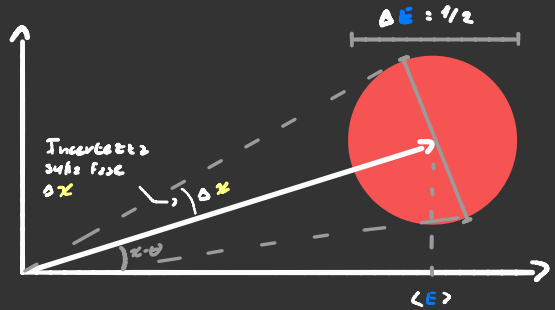


Tuttavia non tiene in considerazione il fatto che gli stati coerenti non sono ortogonali tra di loro. (Sta parte e spiega la mela)

$$\langle \lambda | E(x) | \lambda \rangle \rightarrow \langle \lambda | \rho \rangle \langle \rho | E(x) | \rho \rangle \langle \rho | \lambda \rangle = \langle \rho | E | \rho \rangle e^{-|\lambda - \rho|^2}$$

In pratica  $\langle E \rangle$  "contiene" il contributo anche degli altri stati coerenti con uno smorzamento gaussiano  $e^{-|\lambda - \rho|^2}$ . Quindi il posto di rappresentare l'equazione

$$\langle \lambda | E(x) | \lambda \rangle = |\lambda| \cos(x - \theta)$$



come un solo vettore (come nella prima figura) bisogna rappresentarlo come una gaussiana centrata in  $|\lambda| e^{i(x-\theta)}$  con una deviazione standard  $1/2$  (che guarda caso è uguale a  $\Delta E$ )

Il Loudon sta parte qua non lo spiega e non l'argomenta nemmeno, quindi mi sono arrampicato sugli specchi.

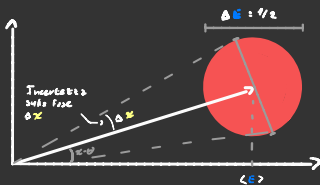
Sapendo che

$$E(x) = \frac{1}{2} [a e^{-ix} + a^* e^{ix}] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

calcola

$$\langle n | E(x) | n \rangle$$

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle$$



$$\langle n | E(x) | n \rangle = 0$$

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \alpha | a e^{-ix} | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha | a^* e^{ix} | \alpha \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} [a e^{-ix} + a^* e^{ix}] \quad a = |\alpha| e^{i\theta}$$

$$= |\alpha| \cos(x - \theta)$$

ANWER



Sapendo che

$$E(x) = \frac{1}{2} [ a e^{-ix} + a^* e^{ix} ] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

$$\langle a | E(x) | a \rangle = |a| \cos(x - \theta)$$

calcola

$$\langle a | \Delta E^2(x) | a \rangle$$

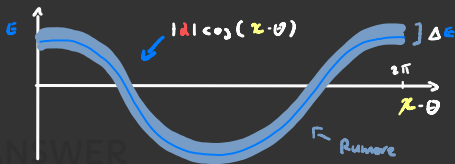
QUESTION

$$\langle a | E^2(x) | a \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \langle a | a^2 e^{-2ix} + 2a^* a + 1 + a^2 e^{2ix} | a \rangle$$

$$= \frac{1}{4} (a^2 e^{-2ix} + 2|a|^2 + a^2 e^{2ix}) + \frac{1}{4}$$

$$= |a|^2 \cos^2(x - \theta) + \frac{1}{4} \quad \langle a | \Delta E^2(x) | a \rangle = \frac{1}{4}$$



ANSWER

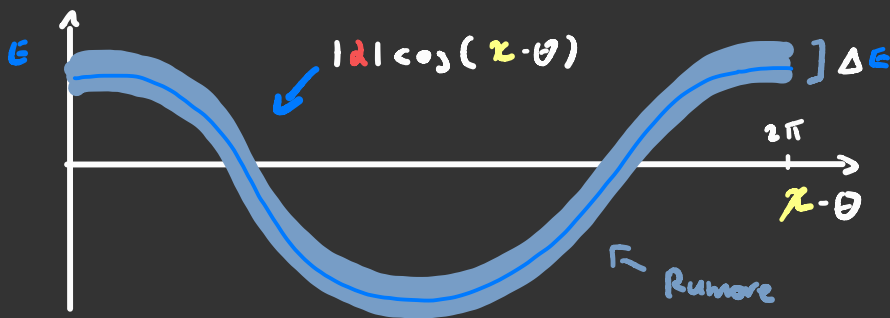
Da questa rappresentazione è possibile ottenere l'errore associato alla fase del campo elettrico  $\Delta\chi = 2\sqrt{\epsilon} \tan\left(\frac{1}{2\epsilon|\alpha|}\right)$   
 per  $\epsilon$  grande  $\Delta\chi = \frac{1}{2\epsilon|\alpha|}$ .

Facendo qualche altro conto si ottiene che  $\Delta n = |\alpha|$ .

Moltiplicando i 2 risultati otteniamo che  $\Delta\chi \Delta n = \frac{1}{2}$

quindi c'è una relazione d'indeterminazione tra  $\chi$  ed  $n$ .

Detto questo, ora possiamo metterci a rappresentare la forma del campo Elettrico di uno stato coerente.



Nota che lo spessore della funzione implicita che c'è anche un errore nella fase  $\Delta\chi$ , che è proprio quello di cui abbiamo discusso prima

Se definiamo il segnale  $S = \langle E \rangle$  e il rumore  $R = (\Delta E)^2$   
 abbiamo che il rapporto segnale-rumore  $S^2/R = \frac{|\alpha|^2 \cos^2(x-\theta)}{\epsilon}$

Come ultimo caso vediamo l'evoluzione temporale degli stati coerenti:

$$e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t} |n\rangle = e^{-|\alpha|^2 - i\omega t/2} \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{n!} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

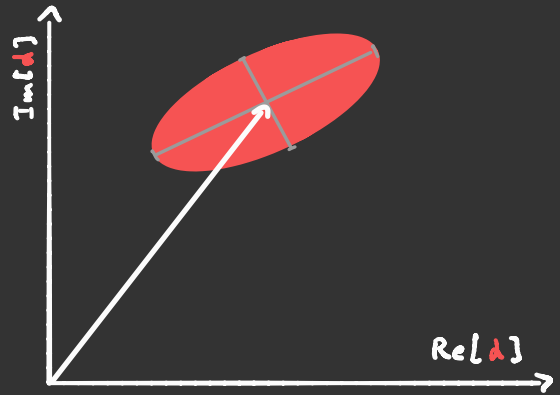
Quindi l'evoluzione temporale è rappresentata da una rotazione attorno all'origine, ciò implica che  $\exp[i\theta \hat{d}^2]$  è l'operatore di rotazione nel piano  $\alpha$

# Stati Squeezed

Finora abbiamo visto come sia possibile creare e ruotare le funzioni d'onda nel piano  $\alpha$ , ma è anche possibile "schiacciare".

In generale uno stato squeezed ha la forma di una gaussiana con il prodotto delle 2 varianze pari ad  $1/8$ .

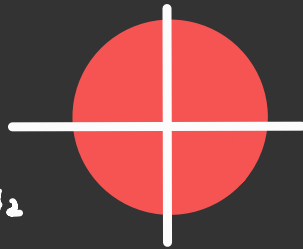
Adesso vediamo com'è la matematica dietro a questi stati.



Definiamo l'operatore di Squeeze così

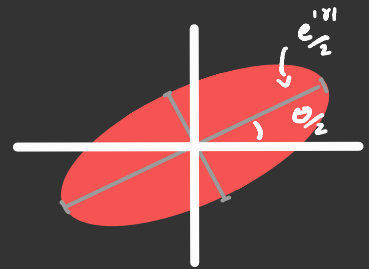
$$S(r) = e^{\frac{r}{2} \hat{a}^2 - \frac{r}{2} \hat{a}^{\dagger 2}}$$

dove  $r = |r| e^{i\theta}$



$S(r)$

$\rightarrow$



Non ho trovato da nessuna parte una

spiegazione sul perché questo operatore abbia questa forma a parte quella a forza bruta.

L'espressione di uno stato squeezed centrato nell'origine è

$$S(r)|0\rangle = e^{\frac{r}{2} \hat{a}^2 - \frac{r}{2} \hat{a}^{\dagger 2}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(-1)^n n!}}{n!} \left[ \frac{e^{i\theta} \tanh(r)}{2} \right]^n |2n\rangle$$

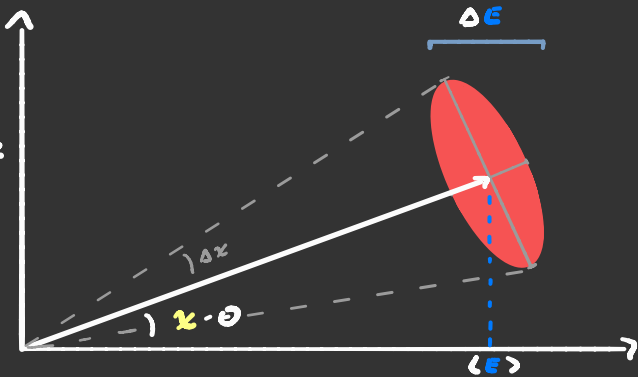
Per ottenere lo stato squeezed più generico possibile basta applicargli un operatore di traslazione coerente

$$|\lambda, \gamma\rangle = D(\lambda) S(\gamma) |0\rangle \quad \leftarrow \text{Stato squeezed generico}$$

Adesso vediamo qual'è la forma d'onda e l'incertezza associate ad uno stato squeezed.

Per semplicità prendiamo uno stato dove uno dei due semiasse punta verso l'origine.

Il valore medio e l'incertezza sul campo elettrico sono rappresentati dalla proiezione lungo l'asse  $x$  del centro dell'ellisse o dalla "lunghezza" dell'ellisse.

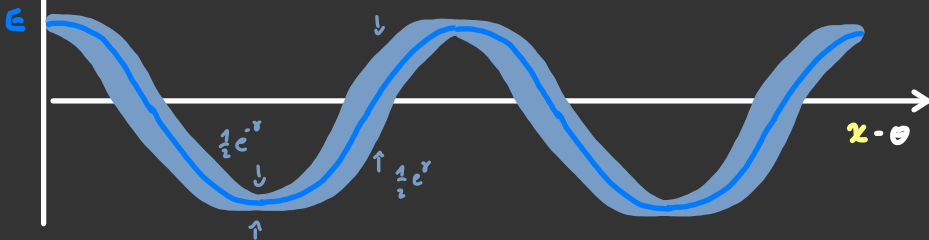


$$\langle E \rangle \equiv \langle \lambda, \gamma | E | \lambda, \gamma \rangle = |E| \cos(\alpha - \theta)$$

Se definiamo  $x = e^{i\gamma}$  abbiamo che  $N = (\Delta E)^2$  è la componente 1,1 di questa matrice qui sotto

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma \\ \sin \sigma & \cos \sigma \end{vmatrix}$$

che è uguale a  $N = \frac{1}{4} [e^{2\gamma} \sin^2(\alpha - \theta) + e^{-2\gamma} \cos^2(\alpha - \theta)]$



E questa è la forma del campo elettrico

# Autocorrelazione bis

Prima abbiamo usato l'autocorrelazione dei campi con se stessi per riuscire a ottenere informazioni sulle fonti di rumore, adesso il rumore è quantistico, vediamo che succede.

Stavolta sia  $g_1$  che  $g_2$  sono degli operatori, e come ogni operatore di campo vogliamo scriverli in termini di  $a$  e  $a^\dagger$ .

Partiamo con  $g_1$ : la definizione classica e'

$$g_1(\epsilon, \epsilon') = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t+\epsilon') dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt}$$

A dire il vero la definizione scritta qua tiene in considerazione il fatto che il campo può avere valori complessi:

Ora in teoria basterebbe sostituire  $E$  e  $E^*$  con i loro operatori, però bisogna stare attenti, l'ordine conta!

Abbiamo visto prima che  $|E(t)|^2 = E(t) E^*(t)$ , inoltre il nominatore e il denominatore devono essere uguali per  $\epsilon'=0$  quindi:

$$g_1(\epsilon') = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t+\epsilon') dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t) dt}$$

Inoltre la media temporale viene aggiunta la media rispetto alla matrice di densità del campo

$$g_1(\epsilon') = \frac{\langle E(t) E^*(t+\epsilon') \rangle}{\langle E(t) E^*(t) \rangle}$$

Facendo così  $g_1$  non è più un operatore, ma va bene così

La funzione  $\mathcal{D}_2$ , invece viene scritta così

È lo stesso operatore di quello a destra, solo che agisce sul bra
Assorbo un fotone al tempo  $t+t'$ 
Assorbo un fotone al tempo  $t$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\langle \bar{E}^\dagger(t) \bar{E}^\dagger(t+t') \bar{E}(t+t') \bar{E}(t) \rangle}{|\langle \bar{E}^\dagger(t) \bar{E}(t) \rangle|^2}$$

Il motivo per cui è espressa in questo ordine è perché per confrontare l'intensità del campo in due istanti di tempo diversi c'è da assorbire due fotoni.

Fin ora abbiamo considerato le funzioni di correlazione che non dipendono dallo spazio. La forma più generica è

$$\mathcal{D}_1(r_1, t_1; r_2, t_2) = \frac{\langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{\langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T(\vec{r}_1, t_1) \rangle \langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \bar{E}_T(\vec{r}_2, t_2) \rangle}$$

$$\mathcal{D}_2(r_1, t_1; r_2, t_2) = \frac{\langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{\langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \bar{E}_T(\vec{r}_1, t_1) \rangle \langle \bar{E}_T^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \bar{E}_T(\vec{r}_2, t_2) \rangle}$$

Queste formule valgono per campi generici, ora vediamo che forma assumono quando lavoriamo con campi E.M a singolo modo. Visto che

$$\bar{E}^\dagger \propto \bar{a} e^{-i\mathbf{x}} \quad \bar{E} \propto \bar{a}^\dagger e^{i\mathbf{x}} \quad \mathbf{x} = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} - \pi/2$$

Sostituendo abbiamo che

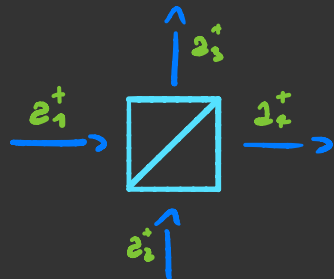
$$\mathcal{D}_1 = \frac{\langle \bar{a}^\dagger \bar{a} e^{i(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \rangle}{\langle \bar{a}^\dagger \bar{a} \rangle} = \frac{\langle n e^{i(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \rangle}{\langle n \rangle} = e^{i(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\langle \bar{a}^\dagger \bar{a}^\dagger \bar{a} \bar{a} \rangle}{\langle \bar{a}^\dagger \bar{a} \rangle \langle \bar{a}^\dagger \bar{a} \rangle} = \frac{\langle \bar{a}^\dagger \bar{a} \bar{a}^\dagger \bar{a} \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{\langle n \rangle} = \frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{\langle n \rangle}$$

# Esperimenti di Interferenza

Ora che abbiamo scoperto che la luce presenta delle incertezze di tipo quantistico bisogna chiedersi cosa succede a tutta la teoria sui beam splitters e sull'autocorrelazione.

Questa volta esprimiamo i campi che entrano ed escono dai 4 bracci tramite degli operatori di campo.



Se creiamo un fotone in ingresso

con l'operatore  $a_1^+ |0\rangle = |1, 0\rangle_2$ , questo passando dal beam splitter crea uno stato che è uguale a

$$(R a_2^+ + T a_1^+) |0\rangle = R |1, 0\rangle_2 + T |0, 1\rangle_2$$

Per semplificare imponiamo  $R = T = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Adesso proviamo a far interferire un fotone con se stesso.

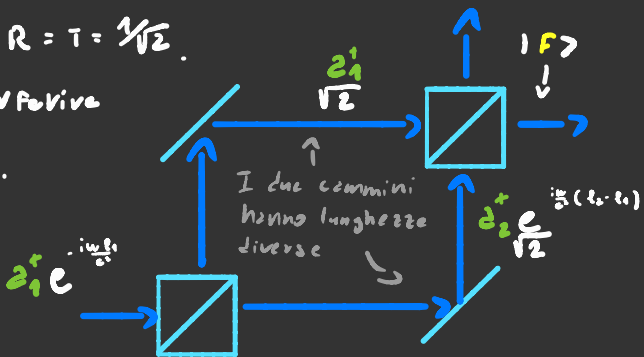
Sia  $|F\rangle$  lo stato finale per vedere quanto è luminosa la figura di

interferenza bisogna calcolare  $\langle F | n | F \rangle$  in questo caso  $n = |1\rangle \langle 1|$ , quindi  $\langle F | n | F \rangle = |\langle 1 | F \rangle|^2$

$$|F\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{2} - (|0\rangle - |1\rangle) \frac{e^{i\frac{\omega}{2}(l_2 - l_1)}}{2} \quad \langle 1 | F \rangle = \frac{1}{2} [1 + e^{i\frac{\omega}{2}(l_2 - l_1)}]$$

$$|\langle 1 | F \rangle|^2 = \sin^2 \left[ \frac{\omega}{2} (l_2 - l_1) \right] = 1 - \cos^2 \left[ \frac{\omega}{2} (l_2 - l_1) \right]$$

→ Trova un'interpretazione



# Stati: Multimodo

Anche se non sembra finora abbiamo lavorato in un caso molto semplificato rispetto a quello che succede nella realtà. Infatti la radiazione non è mai veramente monocromatica.

La funzione d'onda del nostro campo E.M. appartiene allo span di  $| \psi_{n_1} \rangle | \psi_{n_2} \rangle \dots | \psi_{n_n} \rangle \dots$  dove le varie  $| \psi_{n_i} \rangle$  sono delle funzioni d'onda a singolo modo.

Gli operatori di creazione e distruzione adesso vanno usati specificando  $\vec{k}$  e la polarizzazione  $\lambda$ . Io però mi metto ad ignorare  $\lambda$  perché approssimazione la notazione

Le relazioni di commutazione diventano.

$$[a_k, a_k] = 0 \quad [a_k, a_k^\dagger] = \delta_{k, k'} \quad [a_k^\dagger, a_k^\dagger] = 0$$

e l'Hamiltoniana diventa

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \text{cost}$$

Quando si passa a valori di  $\vec{k}$  continui gli operatori  $a(\vec{k})$  e  $a^\dagger(\vec{k})$  creano stati non normalizzabili a m.o di  $\delta$  di Dirac, quindi possiamo prenderci la libertà di moltiplicare i nostri operatori per  $(2\pi)^{3/2}$ . Ma perché proprio  $(2\pi)^{3/2}$ ?

In un caso cubico di dimensione  $L$   $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$ , quindi  $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k$  e se si è nello spazio libero basta levare  $L^3$ .



Quindi se io volessi fare ad esempio

$$\sum_k a_k e^{-ik \cdot x} \rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} d^3k$$

Il che significa che posso usare la trasformata di Fourier che mantiene la norma. ( $\|F(\vec{x})\| = \|\tilde{F}(\vec{k})\|$ )

Inoltre le relazioni di commutazione e l'Ham. diventano così:

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0 \quad [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0$$

$$H = \int \hbar \omega(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) d^3k + \text{cost}$$

Spesso e volentieri si considerano dei fasci di luce che si propagano in una singola direzione, in questi casi si usa  $\omega$  al posto di  $k$ .

Quando io creo un fotone con l'operatore  $a^\dagger(\omega)$  so con precisione la frequenza, ma non ho la minima idea di quando venga creato.

Adesso prendiamo l'operatore  $a^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a^\dagger(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ , con questo io so esattamente quando viene creato, ma non ho idea che frequenze abbia.

Esistono operatori che creano pacchetti d'onda

$$a^\dagger[F] \equiv \int f(\omega) a^\dagger(\omega) d\omega \quad \text{con } \|F\|^2 = 1$$

Le relazioni di commutazione diventano

$$[a[F], a^\dagger[G]] = \langle F, G \rangle$$

E le equazioni riguardanti il numero di fotoni diventano

$$n[F] = a^\dagger[F] a[F] \quad |n[F]\rangle = \frac{(a^\dagger[F])^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

# Operatori di Campo Multimodali

Per quanto riguarda gli operatori di campo essi diventano

$$E_T^+(\vec{k}, \omega) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{\frac{\hbar \omega(k)}{2\epsilon_0 V}} a(\vec{k})$$

Facendo la trasformata di Fourier rispetto a  $\vec{k}$  si ottiene  $E$  in funzione di  $\vec{r}$ . Inoltre se a ogni componente in  $\vec{k}$  gli si aggiunge la fase che acquista si ottiene anche la dipendenza dal tempo

$$E_T^+(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega(k)}{2\epsilon_0}} a(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k$$

$$E_T^+(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 A}} a(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

Questa è la forma che si ha quando l'onda si propaga lungo la  $x$  con  $k > 0$  all'interno di un area  $A$

Se siamo sicuri di lavorare con uno

spettro stretto l'ultimo operatore del campo  $E_T^+(x, t)$  diventa

$$E_T^+(x, t) \approx \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{4\pi\epsilon_0 A c}} a(t - \frac{x}{c})$$

In modo analogo si ottengono gli operatori multimodali

del campo magnetico partendo dal campo elettrico  $B_T^+ = \frac{1}{c} E_T^+$

Da qui possiamo ricavare il vettore di Poynting per un'onda che si propaga con  $k > 0$

$$S = \frac{2}{4\pi} B_T^- E_T^+ = \frac{2}{4\pi} E_T^- E_T^+$$

$$S(x, t) = \frac{2}{4\pi c^2} \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0 A} \int \sqrt{\omega \omega'} a^+(\omega') a(\omega) \exp[i(\omega - \omega')(t - \frac{x}{c})] d\omega d\omega'$$

$$= \frac{\hbar}{2\pi A} \int \sqrt{\omega \omega'} a^+(\omega') a(\omega) \exp[i(\omega - \omega')(t - \frac{x}{c})] d\omega d\omega'$$

Inoltre se si calcola il flusso di  $S$  e integrando su tutto

il tempo si ottiene

A quanto pare una dimostrazione esiste, ma è lunga. Ad intuito però torna.

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar \omega a^+(\omega) a(\omega) d\omega$$

# Autocorrelazione bis bis

Riservo per comodità le definizioni delle funzioni di correlaz.

$$g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle E_T^-(x_1, t_1) E_T^+(x_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle E_T^-(x_1, t_1) E_T^+(x_1, t_1) \rangle \langle E_T^-(x_2, t_2) E_T^+(x_2, t_2) \rangle}}$$

$$g_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle E_T^-(x_2, t_2) E_T^-(x_1, t_1) E_T^+(x_1, t_1) E_T^+(x_2, t_2) \rangle}{\langle E_T^-(x_1, t_1) E_T^+(x_1, t_1) \rangle \langle E_T^-(x_2, t_2) E_T^+(x_2, t_2) \rangle}$$

Supponiamo di avere uno stato  $|1[F]\rangle = g^+[F]|0\rangle$ , per evitare di ammazzarci la vita consideriamo che  $f(\omega)$  sia stretta in  $\omega$ . Con questa supposizione possiamo dire che

$$E_T^-(x, t) \approx \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\pi\epsilon_0 \Lambda c}} a(t - \frac{x}{c}), \quad g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle a^\dagger(t_1 - \frac{x_1}{c}) a(t_2 - \frac{x_2}{c}) \rangle}{\sqrt{\langle n(t_1 - \frac{x_1}{c}) \rangle \langle n(t_2 - \frac{x_2}{c}) \rangle}}$$

Noi vogliamo calcolare il  $g_1$ , partiamo calcolando:  $a(t)|1[F]\rangle$

$$a(t)|1[F]\rangle = a(t)g^+[F]|0\rangle = f(t)|0\rangle + \cancel{g[F]a(t)|0\rangle} \quad \leftarrow a(t)|0\rangle = 0|0\rangle$$

Ho usato le relazioni di commutazione  $\rightarrow$

$$\text{E' così ecc fuori } g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{f^*(t_1 - \frac{x_1}{c}) f(t_2 - \frac{x_2}{c})}{|f^*(t_1 - \frac{x_1}{c}) f(t_2 - \frac{x_2}{c})|}$$

Per  $g_2$  invece si fa  $a(t)a(t')g^+[F]|0\rangle =$

$= a(t)f(t')|0\rangle = 0$  quindi  $g_2 = 0$  se si lavora con un singolo fotone, questo perché c'è bisogno di misurare due fotoni per vedere come è correlata l'intensità

Certi processi emettono i fotoni a 2 a 2, per ora ignoriamo come sono fatti sti processi e ci limitiamo a studiare le proprietà di queste coppie.

Un operatore di creazione di coppia generico  $P^+$  appartiene allo span  $\{a^\dagger(\omega) \otimes z^\dagger(\omega') \mid \omega, \omega' \in \mathbb{R}\}$ , quindi ha la forma

$$P^+[\beta] = \sqrt{\frac{1}{2}} \iint \beta(\omega, \omega') z^\dagger(\omega) z^\dagger(\omega') d\omega d\omega'$$

Se scambiamo i due operatori di creazione e scambiamo  $\omega$  e  $\omega'$  non dovrebbe cambiare nulla, quindi:  $\beta(\omega, \omega') = \beta(\omega', \omega)$ .

I due fotoni sono in genere correlati tra di loro, e meno che  $\beta(\omega, \omega') = f(\omega) f(\omega')$ .

Per riuscire a calcolare la  $\mathcal{G}_1$  utile sapere qual'è  $[a(\omega), P^+[\beta]]$

$$\begin{aligned} a(\omega) P^+[\beta] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega', \omega'') a(\omega) z^\dagger(\omega') z^\dagger(\omega'') d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega, \omega'') z^\dagger(\omega'') d\omega'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega', \omega'') z^\dagger(\omega') a(\omega) z^\dagger(\omega'') d\omega' d\omega'' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega, \omega') z^\dagger(\omega') d\omega' + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega', \omega) z^\dagger(\omega') d\omega' + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega', \omega'') z^\dagger(\omega') z^\dagger(\omega'') a(\omega) d\omega' d\omega'' = \\ &= \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') z^\dagger(\omega') d\omega' + P^+[\beta] a(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } [a(\omega), P^+[\beta]] = \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') z^\dagger(\omega') d\omega'$$

In questo caso noi abbiamo fatto i conti con le  $\omega$ , ma il risultato vale per qualsiasi  $\omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x_1, t_1; x_2, t_2) &\propto \langle 0 | \int \int \beta^*(t_1 - \frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) z^\dagger(t) z^\dagger(t') d\omega d\omega' | 0 \rangle = \\ &= 2 \int \beta^*(t_1 - \frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) dt \end{aligned}$$

Per calcolarci la costante di proporzionalità basta dire che

$$\mathcal{G}_1(x, t; x, t) = 1, \text{ quindi}$$

$$\mathcal{G}_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\int \beta^*(t_1 - \frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) dt}{\sqrt{\int |\beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t)|^2 dt \int |\beta(t_2 - \frac{x_2}{c}, t)|^2 dt}}$$

Per calcolare la  $\mathcal{J}_2$  bisogna prima sapere  $[Z(\omega)Z(\omega'), P^+(\beta)]$

$$Z(\omega)Z(\omega')P^+(\beta) = Z(\omega)P^+(\beta)Z(\omega') + Z(\omega)\sqrt{2}\int\beta(\omega,\omega'')Z^+(\omega'')d\omega'' \\ = P^+(\beta)Z(\omega)Z(\omega') + \sqrt{2}\int\beta(\omega,\omega'')Z^+(\omega'')d\omega''Z(\omega') + \sqrt{2}\int\beta(\omega,\omega'')Z^+(\omega'')d\omega''Z(\omega) + \sqrt{2}\beta(\omega,\omega')$$

$[Z(\omega)Z(\omega'), P^+(\beta)] =$

$$\sqrt{2}\left[\beta(\omega,\omega') + \int\beta(\omega,\omega'')Z^+(\omega'')d\omega''Z(\omega') + \int\beta(\omega,\omega'')Z^+(\omega'')d\omega''Z(\omega)\right]$$

Quando si calcola la  $\mathcal{J}_2$  gli ultimi due pezzi non contribuiscono quindi

$$\mathcal{J}_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \propto Z \left| \beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t_2 - \frac{x_2}{c}) \right|^2$$

Al denominatore ci va il quadrato della normalizzazione che abbiamo dato a  $\mathcal{J}_1$ , per ciò alla fine esce che

$$\mathcal{J}_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\left| \beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t_2 - \frac{x_2}{c}) \right|^2}{\int \left| \beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t) \right|^2 dt + \int \left| \beta(t_2 - \frac{x_2}{c}, t) \right|^2 dt}$$

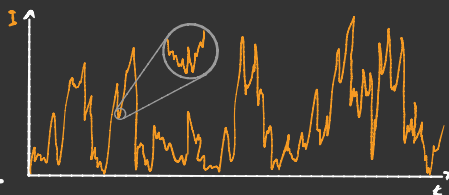
# Ammassamento e

In inglese si dice bunching and anti-bunching

# Anti-ammassamento di Fotoni

Partiamo dal fatto che in questo paragrafo è fatto un po' a cazzò perché le fonti sono un po' a cazzò, se c'è qualcosa che non si capisce è perché non c'è niente da capire.

Supponiamo di avere una sorgente di Fotoni che è causa di fenomeni di allargamento presenta uno spettro  $F(\omega)$ .



Ciò significa che i fotoni emessi non sono indipendenti tra di loro, ma tendono ad ammassarsi.

La sorgente luminosa che consideriamo genera luce coerente.

Prima avevamo visto, quando abbiamo iniziato a studiare i fenomeni di rumore, che classicamente

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \left[ e^{i\varphi_1(t)} + \dots + e^{i\varphi_n(t)} \right]$$

Quantisticamente la funzione d'onda del campo può essere

rappresentata come una somma di tanti operatori di creazione

ognuno con una fase random  $\varphi_i(t)$ . Non la scrivo perché fa confondere e non serve a nulla

Stessa di fatto che  $S_1 = \tilde{F}(\omega)$  rimane valida anche nel caso

quantistico. Questo perché il caso classico non è altro che il caso quantistico, ma con infinitissimi fotoni, e per la legge dei grandi numeri la correlazione due cose la stessa

Se abbiamo  $\tilde{F}(\omega) = \frac{F \gamma \pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$   $S_1 = \frac{\int \tilde{z}^+(t) \tilde{z}(t+\tau)}{\int \tilde{z}^+(t) \tilde{z}(t)} = e^{-i\omega_0 \tau - \gamma |\tau|}$

Per quanto riguarda la  $\rho_2$  si usa questa equazione che cade dal cielo, ma vale se la nostra sorgente emette luce coerente

$$\langle \rho_2^*(t) \rho_2^*(t+\tau) \rho_2(t+\tau) \rho_2(t) \rangle =$$

$$\langle \rho_2^*(t) \rho_2(t) \rangle \langle \rho_2^*(t+\tau) \rho_2(t+\tau) \rangle + \langle \rho_2^*(t) \rho_2(t+\tau) \rangle \langle \rho_2^*(t+\tau) \rho_2(t) \rangle$$

Da ciò otteniamo che

$$\langle \rho_2^*(t) \rho_2^*(t+\tau) \rho_2(t+\tau) \rho_2(t) \rangle = F^2 [1 + e^{-2\gamma|\tau|}]$$

Se si prova a disegnare le tipiche rilevazioni in funzione del tempo esce qualcosa del genere



Cioè i fotoni tendono ad ammassarsi

Se la  $\rho_2(\tau) = 1 \forall \tau$  allora i fotoni sono indipendenti tra di loro ed esce fuori una cosa così



se la funzione  $\rho_2$  è sempre minore di 1

i fotoni tendono a anti-ammassarsi tra di loro



# Teoria quantistica del Fotonconteggio

Un sensore ideale che ti dice quanti fotoni lo colpiscono nell'intervallo di tempo  $(t, t+T)$  è rappresentabile con questo osservabile

$$M(t, T) = \int_t^{t+T} n(t') dt' = \int_t^{t+T} a^\dagger(t') a(t') dt'$$

Purtroppo sensori ideali ancora non ne hanno inventati.

Un sensore non ideale con un'efficienza  $\eta$  può essere rappresentato come un sensore ideale con davanti un beam splitter con  $R = i\sqrt{1-\eta}$   $T = \sqrt{\eta}$

Quindi

$$M_S(t, T) = \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s(t') dt'$$

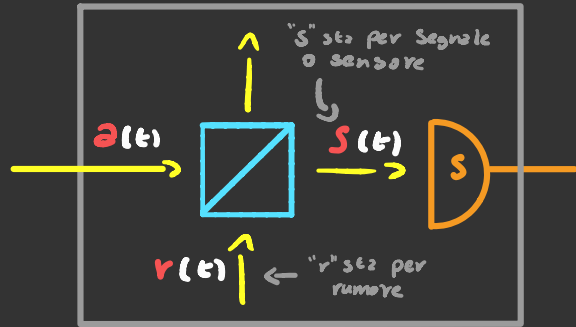
dove  $s(t) = a(t)\sqrt{\eta} + i\sqrt{1-\eta} r(t)$

Il valore medio di fotonconteggio se il rumore è nullo è

$$\langle M_S(t, T) \rangle = \eta \langle M(t, T) \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta M_S^2(t, T) \rangle &= \langle M_S^2 \rangle - \langle M_S \rangle^2 = \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s(t') s^\dagger(t'') s(t'') dt' dt'' - \left[ \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s(t') dt' \right]^2 \\ &= \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s^\dagger(t'') s(t'') s(t') dt' dt'' + \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s(t') dt' - \left[ \int_t^{t+T} s^\dagger(t') s(t') dt' \right]^2 \\ &= \eta^2 \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} a^\dagger(t') a^\dagger(t'') a(t'') a(t') dt' dt'' + \eta \int_t^{t+T} a^\dagger(t') a(t') dt' - \eta^2 \left[ \int_t^{t+T} a^\dagger(t') a(t') dt' \right]^2 \\ &= \eta^2 \langle \Delta M^2(t, T) \rangle + \eta(1-\eta) \langle M(t, T) \rangle \end{aligned}$$

Sensore non ideale

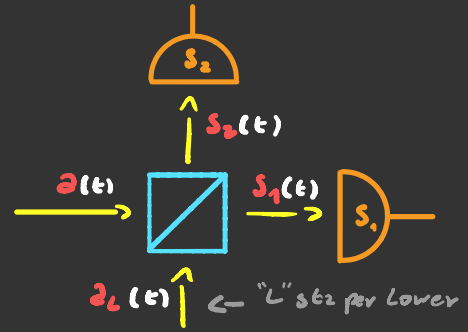




# Rilevazione Omodina

I sensori sono solo in grado di contare i fotoni, tutte le altre informazioni vengono perse.

Però se si crea un apparato sperimentale fatto così si riescono a ottenere un paio di informazioni in più.



Come beam splitter ne scegliamo uno 50:50, e poi ci calcoliamo la differenza dei segnali dei due rilevatori  $(T = 1/\sqrt{2}, R = 1/\sqrt{2})$

$$M_{S_1} = \eta \int_t^{t+T} S_1^+(t') S_1(t') dt' = \frac{\eta}{2} \int_t^{t+T} (a^+ + i a_L^+) (a + i a_L) dt'$$

$$= \frac{\eta}{2} \int_t^{t+T} a^+ a + i(a^+ a_L - a_L^+ a) + a_L^+ a_L dt'$$

Per calcolarsi  $M_{S_2}$  basta scambiare  $a$  con  $a_L$  e  $a^+$  con  $a_L^+$

$$M_{S_2} = \frac{\eta}{2} \int_t^{t+T} a^+ a - i(a^+ a_L - a_L^+ a) + a_L^+ a_L dt'$$

Adesso calcoliamoci la differenza

$$M_{S_2}(t, T) - M_{S_1}(t, T) = i \eta \int_t^{t+T} a^+(t') a_L(t') - a(t') a_L^+(t') dt'$$

adesso arriva il brucchetto, se nella parte di sotto al beam splitter ci si mette uno stato coerente con ampiezza

$$a = \sqrt{F} e^{i\chi(t)} \quad \text{dove } \chi = \omega t + \pi/2$$

Mettendo tutto assieme si ha che

$$M_{2,2}(t,T) = \eta \sqrt{F} \int_t^{t+T} \left[ 2^+(t') e^{iK(t')} + 2^-(t') e^{-iK(t')} \right] dt'$$

Che è proporzionale all'operatore di campo elettrico

↑  
Argomentare

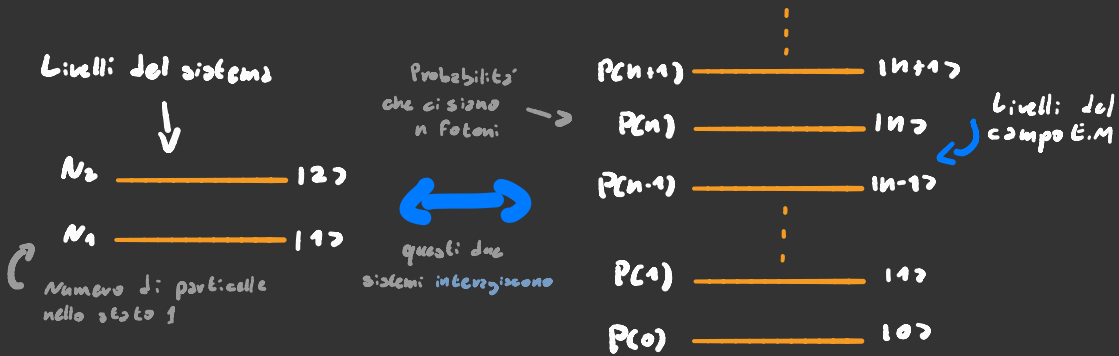
Aggiungere effetto

Casimir

# Generazione, Atenuazione e Amplificazione Ottica

Ora che abbiamo una conoscenza completa delle proprietà del campo E.M. da questo momento in poi cercheremo di avere una conoscenza completa di come esso interagisce con la materia.

Iniziamo con il solito sistema a 2 livelli e immaginiamo di metterlo in una cavità che ha all'interno un modo a frequenza  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ . Il tutto è rappresentabile così:



Le equazioni che avevamo scritto prima riguardante il sistema a due livelli erano

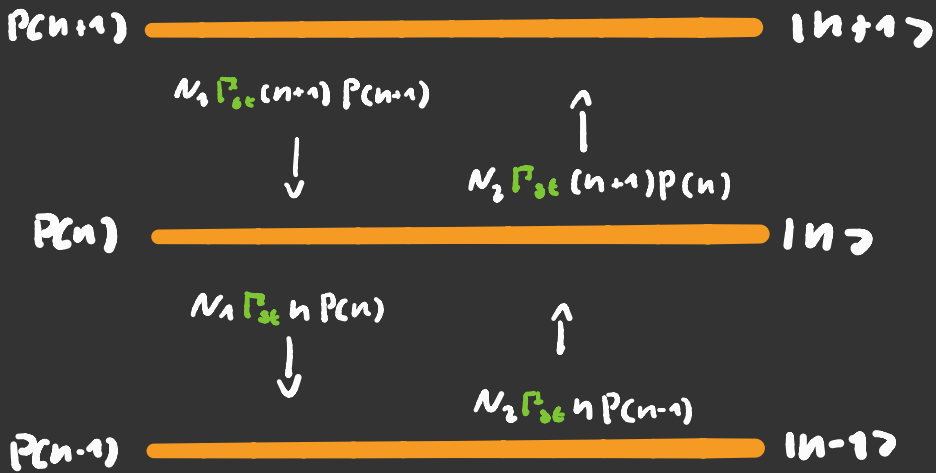
$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 A_{21} + (N_2 - N_1) B_{21} W(\omega_0)$$

Questa eq. è ancora valida, noi però vogliamo esprimerla in termini del numero di fotoni visto che  $W(\omega_0) \propto n$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 \Gamma_{sp} + (N_2 - N_1) \Gamma_{sc} n$$

Orz però vogliamo scrivere le equazioni che riguardano il campo E.M.

Ogni livello del campo E.M. può assorbire o emettere un fotone con i livelli energetici adiacenti, visto che l'emissione spontanea rilaccia un fotone in un  $\vec{k}$  a random ignoriamo questo effetto



Il motivo per cui il termine di emissione stimolata dallo stato  $|n\rangle$  allo stato  $|n+1\rangle$  è che gli elementi di matrice dell'Hamiltoniana d'interazione sono

$$\begin{cases} \langle n_{k\lambda}-1, 2 | H_I | n_{k\lambda}, 1 \rangle = i\hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + i(\omega_0 - \omega)t)} \\ \langle n_{k\lambda}+1, 1 | H_I | n_{k\lambda}, 2 \rangle = -i\hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}+1} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - i(\omega_0 - \omega)t)} \end{cases}$$

Sta equazione è già spuntata prima in questo quaderno, se non ti ricordi cosa è e da dove viene fai un bel ripasso

È quando si fa la norma quadro spunta un  $n+1$ .

L'immagine di sopra si può scrivere in matematiche così

$$\frac{dP(n)}{dt} = \Gamma_{se} [ N_1(n+1)P(n+1) + N_2 n P(n-1) - N_1 n P(n) - N_2(n+1)P(n) ]$$

$$\Gamma_{sc} \frac{d\langle n \rangle}{dt} = \Gamma_{sc} \sum n \frac{dP(n)}{dt}$$

$$= N_1 \sum n(n+1)P(n+1) + N_2 \sum n^2 P(n-1) - (N_1 + N_2) \langle n^2 \rangle - N_2 \langle n \rangle =$$

$$= \langle n^2 \rangle N_1 - N_1 \sum (n+1)P(n+1) + N_2 \sum n^2 P(n-1) - (N_1 + N_2) \langle n^2 \rangle - N_2 \langle n \rangle =$$

$$= -(N_1 + N_2) \langle n \rangle + 2N_2 \sum n P(n-1) - N_2 \sum P(n-1) =$$

$$= -(N_1 + N_2) \langle n \rangle + 2N_2 \sum (n-1) P(n-1) + N_2 \sum P(n-1) =$$

$$= N_2 + (N_2 \cdot N_1) \langle n \rangle \quad \text{In questi conti ho approssimato } P(0) \approx 0$$

$$\text{Quindi: } \frac{d\langle n \rangle}{dt} = [N_2 + (N_2 \cdot N_1) \langle n \rangle] \Gamma_{sc}$$

Quando si lavora con tanti fotoni si tende ad approssimare  $n \approx \langle n \rangle$

Sommando quest'equazione con quella del rate di  $N_2$  si ha

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{d\langle n \rangle}{dt} + N_2 (\Gamma_{sp} - \Gamma_{sc}) = 0$$

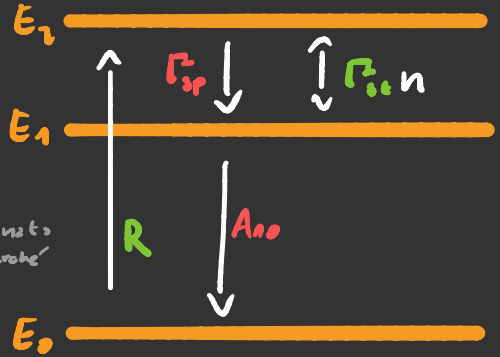
Se si risolve per  $\langle n \rangle$  e si moltiplica per  $h\nu$  si ottiene quanta energia il nostro sistema scambia con gli altri modi del campo

$$h\nu \frac{d\langle n \rangle}{dt} = - \frac{dN_2}{dt} - N_2 (\Gamma_{sp} - \Gamma_{sc})$$

# LASER bis

Sono sbrigativo su alcuni aspetti perché sono già stati trattati prima

Adesso torniamo a parlare dei Laser. Il nostro modello di un laser è fatto da un sistema a 3 livelli tale che



Non l'ho disegnato qua a destra perché è piccolo

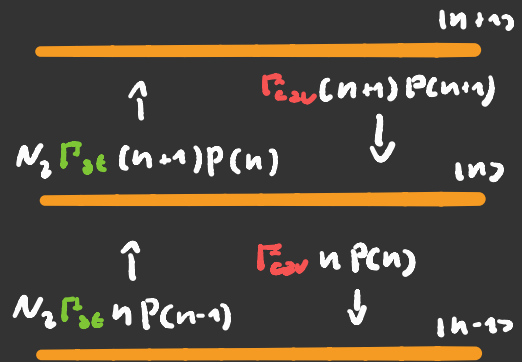
$$A_{10} \gg R, \Gamma_{sp}, \Gamma_{st} n \gg A_{20}$$

Visto che  $A_{10}$  è molto grande abbiamo che  $N_1 \approx 0$   
 $N_2$  invece è controllato da  $R$  che è il rate di pompaggio inoltre supponiamo che  $N_2 \ll N_0 \approx N$  ← Numero totale di particelle

Quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = NR - N_2 (\Gamma_{st} + n \Gamma_{sp})$$

Visto che da qualche parte la luce di questo laser deve uscire aggiungiamo un termine di decadimento  $\Gamma_{out} n$  (si capisce meglio guardando la figura)



Quindi alla fine esce che

$$\frac{dP(n)}{dt} = N_2 \Gamma_{st} [n P(n-1) - (n+1) P(n)] - \Gamma_{out} [n P(n) - (n+1) P(n+1)]$$

Facendo dei conti noiosi come quelli della pagina di prima si ottiene che

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \Gamma_{st} N_2 (1 + \langle n \rangle) - \Gamma_{out} \langle n \rangle$$

Quando siamo a regime  $\dot{N}_2 = 0$

$$N_2 = \frac{NR}{\Gamma_{sp} + \Gamma_{sc} \langle n \rangle} \quad \Gamma_{sc} N_2 (1 + \langle n \rangle) = \Gamma_{cov} \langle n \rangle$$

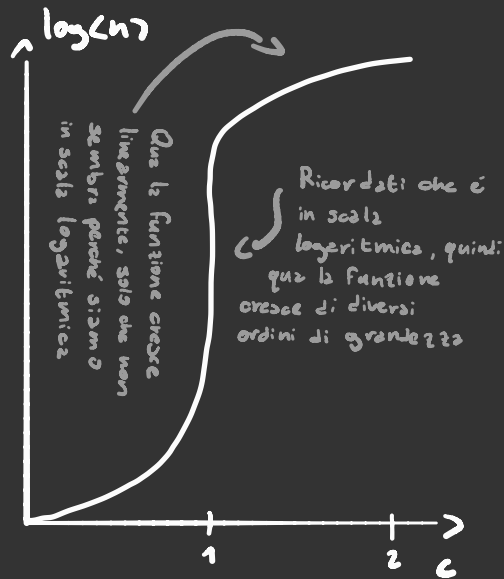
Mettendo a sistema queste due equazioni si ottiene che

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2} \left[ (C-1)n_s + \sqrt{(C-1)^2 n_s^2 + 4Cn_s} \right] \quad N_2 = \frac{\Gamma_{cov}}{\Gamma_{sc}} \frac{Cn_s}{n_s + \langle n \rangle}$$

dove  $C = \frac{NR \Gamma_{sc}}{\Gamma_{sp} \Gamma_{cov}}$  e  $n_s = \frac{\Gamma_{sp}}{\Gamma_{sc}}$

È possibile plottare  $\langle n \rangle$  in funzione di  $C$  ed esce questo. →

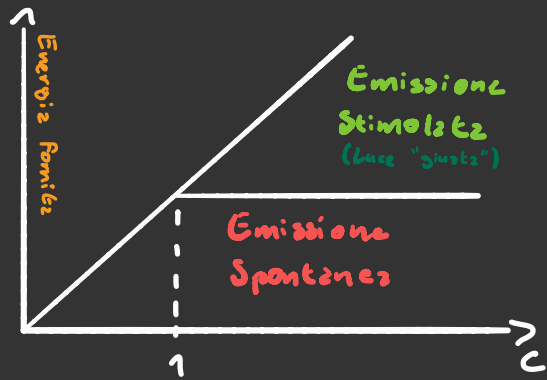
Per dimostrarlo si potrebbe fare lo studio di funzione, ma visto che qui siamo tutti adulti e vaccinati basta mettere l'equazione di  $\langle n \rangle$  su Wolfram Alpha e vafancu!



Da qui si può capire dove va a

finire l'energia fornita al sistema in funzione di  $C$ .

L'energia della luce "giusta" prodotta dal laser è  $\propto \langle n \rangle$   
 Tutto il resto è sprecato in Emissione spontanea



Si, lo so è spiegato male, ma mi scoccia argomentare a destra

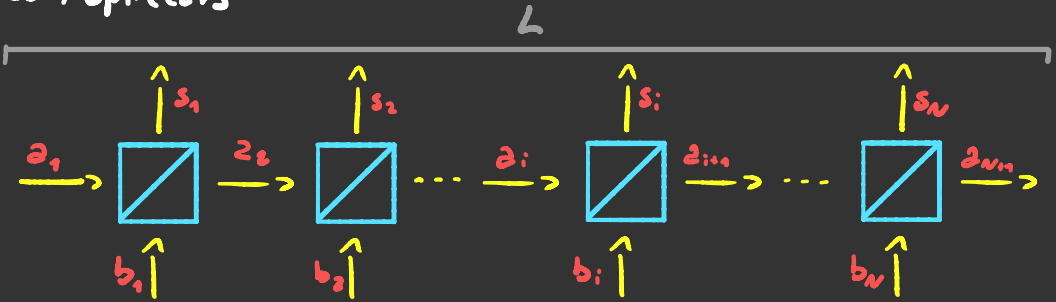
# Fluttuazioni della Luce dei LASER

Prima abbiamo approssimato  $n$  con  $\langle n \rangle$  per calcolare la potenza  
media di un fascio laser, se vogliamo capire quanto fluttua



# Propagazione all'interno di un mezzo attenuante

È possibile rappresentare un mezzo lungo  $L$  come tanti beam splitters



gli operatori  $a$  servono a indicare il segnale che si propaga,  
 gli operatori  $b$  servono a indicare il rumore e  
 gli operatori  $s$  servono a indicare ciò che viene scatterato

L'equazione che lega questi operatori è

$$\begin{cases} s_i(\omega) = R(\omega)a_i(\omega) + T(\omega)b_i(\omega) \\ a_{i+1}(\omega) = T(\omega)s_i(\omega) + R(\omega)b_i(\omega) \end{cases}$$

La luce in uscita in funzione di quella in ingresso è

$$a_{N+1}(\omega) = [T(\omega)]^N a_1(\omega) + R(\omega) \sum_{i=1}^N [T(\omega)]^{N-i} b_i(\omega)$$

Per passare al continuo basta che  $N \rightarrow +\infty$   $R(\omega) \rightarrow 0$  in modo tale che il coefficiente di attenuazione  $K(\omega) = |R(\omega)|^2 / \Delta z$  rimanga finito ( $\Delta z = L/N$ ), quindi:

$$|T(\omega)|^{2N} = [1 - |R(\omega)|^2]^N = \left[1 - \frac{K(\omega)L}{N}\right]^N = e^{-K(\omega)L}$$

$$D_2 \text{ cio' abbiamo che } [T(\omega)]^N = \exp\left\{\left[i\eta(\omega)\frac{\omega}{c} - \frac{\kappa(\omega)}{2}\right]L\right\}$$

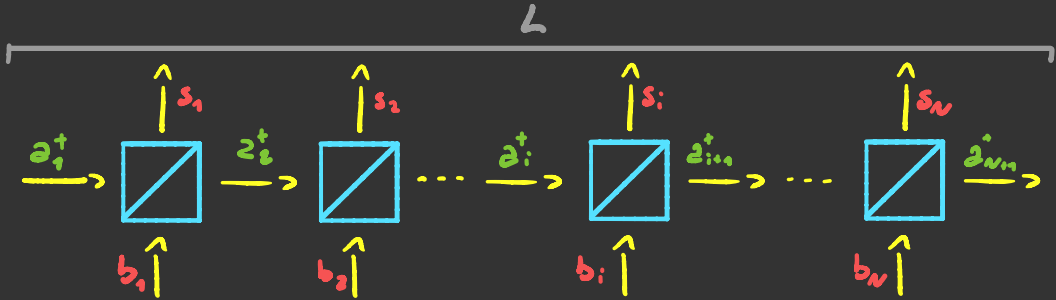
dove  $\eta(\omega)$  e' l'indice di rifrazione

Per capire come mai basta partire dal caso in cui l'onda si propaga nel vuoto, e poi nel mezzo mandare  $c \rightarrow c\eta$

Se si vuole mandare  $a_{in}(\omega) \rightarrow a(L, \omega)$  basta fare un paio di sostituzioni:

$$a(L, \omega) = e^{\left[i\eta(\omega)\frac{\omega}{c} - \frac{\kappa(\omega)}{2}\right]L} a(0, \omega) + \sqrt{\kappa(\omega)} \int_0^L e^{\left[i\eta(\omega)\frac{\omega}{c} - \frac{\kappa(\omega)}{2}\right](L-x)} b(x, \omega) dx$$

# Propagazione all'interno di un mezzo Amplificante



Se prendiamo un mezzo attenuante e lo facciamo funzionare con tempo che va al contrario diventa amplificante, quindi basterebbe trasformare tutti gli operatori di distruzione in operatori di creazione.

Il rumore e il segnale in uscita però non dovrebbero avere questa proprietà quindi continuano ad essere degli operatori di distruzione.

Le equazioni che legano tutti questi coefficienti sono simili a quelle di prima

$$\begin{cases} s_i(\omega) = R(\omega) a_i^+(\omega) + T(\omega) b_i(\omega) \\ a_{i+1}^+(\omega) = T(\omega) a_i^+(\omega) + R(\omega) b_i(\omega) \end{cases}$$

Le relazioni di commutazione sono

$$\begin{aligned} [b_i(\omega), a_j^+(\omega')] &= \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \\ [s_i(\omega), a_j^+(\omega')] &= \delta(\omega - \omega') \quad [a_i(\omega), a_j^+(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \end{aligned}$$

Se inseriamo queste relazioni di commutazione nel sistema di eq. di sopra otteniamo che

$$|T(\omega)|^2 - |R(\omega)|^2 = 1$$

Questo implica che  $|T(\omega)|^2 > 1$ , che equivale a dire che c'è amplificazione.

Facendo conti identici a quelli della sezione di prima si ha che

$$a^+(L, \omega) = e^{\left[ i\eta(\omega) \frac{L}{2} + \frac{G(\omega)}{2} L \right]} a^+(0, \omega) + \sqrt{G(\omega)} \int_0^L e^{\left[ i\eta(\omega) \frac{L-x}{2} + \frac{G(\omega)}{2} (L-x) \right]} b(x, \omega) dx$$

bisogna aggiungere tutte quelle cose riguardanti il flusso del segnale

# Luce Diffratta da un Atomo

A dire il vero si parla della luce diffratta da un sistema a 2 livelli;

Adesso vediamo come l'onda scattata da un sistema a 2 livelli e che proprietà ha. Ci mettiamo a far evolvere gli operatori

$$H = \hbar \sum_{k,\lambda} \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_0 \pi^\dagger \pi + i\hbar \sum_{k,\lambda} g_{k\lambda} \left( a \pi^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a^\dagger \pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a} = [H, a] = \hbar \omega a - i\hbar \sum_{k,\lambda} g_{k\lambda} \pi(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ i\hbar \dot{\pi} = [H, \pi] = \hbar \omega_0 \pi + i\hbar \sum_{k,\lambda} g_{k\lambda} a (2\pi^\dagger \pi - 1) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{cases}$$

La soluzione all'equazione differenziale

$$f'(x) = a f(x) + g(x) \text{ e}$$

$$f(x) = e^{ax} \left[ f_0 + \int_0^x g(x') e^{-ax'} dx' \right]$$

Integrando la prima si ottiene che

$$a(t) = e^{-i\omega t} \left[ a(0) - \sum_{k,\lambda} g_{k\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^t \pi(t') e^{i\omega t'} dt' \right]$$

Noi vogliamo calcolare il campo E.M.

$$E^+(r, t) = i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_{k\lambda} a_{k\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\vec{k} =$$

Rappresenta l'onda incidente quindi me ne frega

$$= i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_{k\lambda} a_{k\lambda}(0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_k t} d\vec{k} +$$

Rappresenta l'onda diffratta

$$+ i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_{k\lambda} g_{k\lambda} e^{-i\omega_k t} \int_0^t \pi(t') e^{i\omega_k t'} dt' d\vec{k} =$$

Adesso qua va fatto un integrale in 4 dimensioni ed e' bruttissimo

Alla Fine però ecco che

$\Theta$  è l'angolo di differenza tra il momento di dipolo e la direzione di osservazione

Direzione di osservazione

L2 "a" sta per osservata

$$\vec{E}_S^+(r, t) = -\frac{e\omega_0^2 Q_{12} \sin \Theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 |r-R|} \pi \left( t - \frac{|r-R|}{c} \right) \hat{n}$$

Visto che  $\vec{E}_S^+$  di  $\pi$  possiamo esprimere facilmente le  $\rho_1$  e  $\rho_2$  della radiazione diffratta.

$$\rho_1(\gamma) = \frac{\langle \vec{E}_S^+(r, t) \vec{E}_S^+(r, t+\gamma) \rangle}{\langle \vec{E}_S^+(r, t) \vec{E}_S^+(r, t) \rangle} = \frac{\langle \pi^+(t) \pi(t+\gamma) \rangle}{\langle \pi^+(t) \pi(t) \rangle}$$

$$\rho_2(\gamma) = \frac{\langle \pi^+(t) \pi^+(t+\gamma) \pi(t+\gamma) \pi(t) \rangle}{\langle \pi^+(t) \pi(t) \rangle^2}$$

Da qui si nota che  $\rho_2(0) = 0$ , questo significa che la luce è fortemente non classica.

Questo è possibile spiegarlo dal fatto che una volta che un fotone è stato emesso il nostro atomo si trova allo stato fondamentale e quindi c'è da aspettare che venga ri-eccitato per far sì che venga emesso un altro fotone.

Adesso vediamo che forma ha esattamente la  $\rho_2$ .

Per calcolare i vari valori medi ci tocca fare le tracce con la matrice di densità.

$$\langle \pi(t) \rangle = \rho_{21} e^{-i\omega_0 t} \equiv \tilde{\rho}_{21} e^{-i\omega_0 t} \quad \langle \pi^+(t) \pi(t) \rangle = \rho_{22}(t) \equiv \tilde{\rho}_{22}(t)$$

In qualche modo se la matrice di densità si evolve

$$\tilde{\rho}_{21}(t+\gamma) = \alpha_1(\gamma) + \alpha_2(\gamma) \tilde{\rho}_{21}(t) + \alpha_3(\gamma) \tilde{\rho}_{22}(t) + \alpha_4(\gamma) \tilde{\rho}_{22}(t)$$

$$\tilde{\rho}_{22}(t+\gamma) = \beta_1(\gamma) + \beta_2(\gamma) \tilde{\rho}_{21}(t) + \beta_3(\gamma) \tilde{\rho}_{22}(t) + \beta_4(\gamma) \tilde{\rho}_{22}(t)$$

Perché manca  $\tilde{\rho}_{11}$ ?

Per  $\tau=0$  abbiamo che  $\lambda_2(0) = \beta_2(0) = 1$  e tutti gli altri coefficienti sono uguali a zero, invece per  $\tau \rightarrow +\infty$  le condizioni iniziali non contano, quindi tutti i coefficienti tranne  $\lambda_1(\infty)$  e  $\beta_1(\infty)$  sono nulli.

Una proprietà curiosa di questi discorsi sui coefficienti  $\lambda$  e  $\beta$  è che se abbiamo un operatore  $A(t)$  e un insieme di operatori  $\{A_i(t)\}$  tali che

$$\langle A(t+\tau) \rangle = \sum_i \lambda_i(\tau) \langle A_i(t) \rangle \quad \text{abbiamo che} \quad \text{Dimostratelo, è facile}$$

$$\langle B(t) A(t+\tau) C(t) \rangle = \sum_i \lambda_i(\tau) \langle B(t) A_i(t) C(t) \rangle$$

Adesso calcoliamoci i valori medi degli operatori che stanno dentro alle  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$

$$\langle \Pi^\dagger(t) \Pi(t+\tau) \rangle = \lambda_1(\tau) \langle \Pi^\dagger(t) \rangle + \lambda_2(\tau) \langle \Pi^\dagger(t) \Pi(t) \rangle e^{i\omega\tau}$$

$$\mathcal{G}_1(\tau) = \frac{\tilde{f}_{12}(t)}{\tilde{f}_{22}(t)} e^{i\omega\tau} \lambda_1(\tau) + \lambda_2(\tau) e^{i\omega\tau}$$

Visto che l'equazione dovrebbe valere per ogni  $t$  prendiamo a  $t \rightarrow +\infty$ , quindi:

$$\mathcal{G}_1(\tau) = \left[ \frac{\lambda_1(\infty)}{\beta_1(\infty)} \lambda_1(\tau) + \lambda_2(\tau) \right] e^{i\omega\tau}$$

$$\mathcal{G}_2(\tau) = \frac{\beta_1(\tau)}{\tilde{f}_{22}(t)} = \frac{\beta_1(\tau)}{\beta_1(\infty)}$$

Adesso proviamo a calcolarci le  $\rho_2$  per un atomo che inizialmente sta allo stato fondamentale  $\tilde{p}_{11}(0) = 1$ ,

$$p_{10} = p_{21} = p_{22} = 0$$

$$\frac{d\tilde{p}_{11}}{dt} = R\tilde{p}_{11}(t) - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11}(t) \approx R - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11}(t)$$

$$R - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11}(t+\tau) = [R - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11}(t)]e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$

$$\tilde{p}_{11}(t+\tau) = \frac{R}{2\gamma_{sp}}(1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau}) + \tilde{p}_{11}(t)e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$

$$x = R - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11}(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\gamma_{sp}\frac{d\tilde{p}_{11}(t)}{dt}$$

$$-\frac{1}{2\gamma} \dot{x} = x$$

$$\dot{x} = -2\gamma x$$

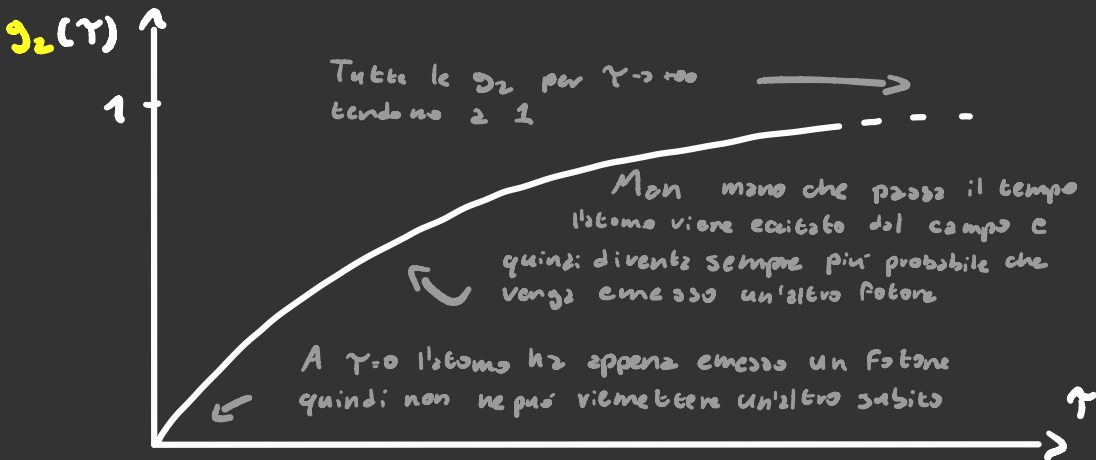
$$x(t+\tau) = x(t)e^{-2\gamma\tau}$$

Quindi:

$$p_1(\tau) = \frac{R}{2\gamma_{sp}}(1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau})$$

È adesso possiamo calcolarci le  $\rho_2(\tau) = \frac{p_1(\tau)}{p_1(\infty)}$

$$\rho_2(\tau) = 1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$

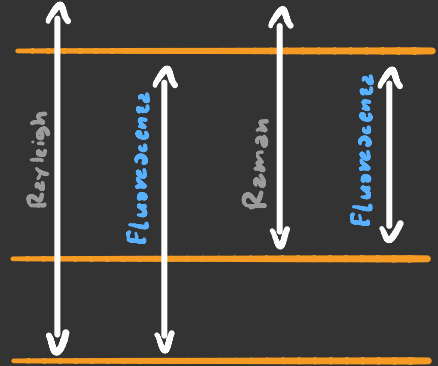


# Fluorescenza

Ma che differenza c'è tra Fluorescenza e Fosforescenza?

In questa materia le i fenomeni di fluorescenza sono quelle cose che succedono quando un atomo viene eccitato e poi decade.

Gli altri due tipi di scattering sono quello Rayleigh e quello Raman, che a differenza della Fluorescenza sono elastici



A ognuno di questi fenomeni è associata una

## Sezione d'urto

Avrei scritto l'anno scorso un pdf sulla sezione d'urto, sta sulla cartella Mega, dagli un'occhiata se vuoi ripassare

Per processi di diffrazione E.M. è definita così

$$\frac{dG}{d\Omega} = \gamma^2 \frac{\omega I_s(\Omega, \infty)}{\omega_i I} \quad \begin{matrix} \text{Intensità scatters} \\ \text{Intensità incidente} \end{matrix}$$

Chiaramente per calcolarla va fatta la media sulla matrice di densità.

Qualche pagina fa abbiamo visto che

$$\langle I_s(\nu, \theta) \rangle = \frac{2}{4\pi} \langle \mathbf{E}_s(\nu, \theta) \mathbf{E}_s^*(\nu, \theta) \rangle = \frac{1}{8\epsilon_0 c^3} \left( \frac{e \omega_s^2 \hat{\mathbf{e}}_s \cdot \vec{\mathbf{D}}_{11}}{\pi |\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}|} \right)^2 l_{11}(\mathbf{t} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c}) \hat{\mathbf{n}}$$

$$\langle I \rangle = \frac{c \hbar \omega \langle n \rangle}{V} \quad \text{Questo è il volume infatti è bianco}$$



A questo punto ci vuole sapere che fa la matrice di densità

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}_{11}}{dt} = -\frac{d\tilde{p}_{22}}{dt} = -\frac{iV}{2}(\tilde{p}_{12} - \tilde{p}_{21}) - 2\gamma_{sp}\tilde{p}_{11} \\ \frac{d\tilde{p}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{p}_{21}^*}{dt} = \frac{iV}{2}(\tilde{p}_{11} - \tilde{p}_{22}) + [i(\omega_0 - \omega) - \gamma_{sp} + \gamma_{coll}] \tilde{p}_{12} \end{cases}$$

$$\tilde{p}_{11}^{(+\infty)} = \frac{(\gamma_{coll} + \gamma_{sp})V^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + (\gamma_{coll} + \gamma_{sp})V^2} \quad V^2 = \frac{2e^2}{\epsilon_0 \hbar^2} (E \cdot D_{12})^2$$

Alla fine la sezione d'urto viene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) = \frac{e^4 \omega_0^4 \omega}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 c^4 \omega_{sc}} \frac{(E_{sc} \cdot D_{12})^2 (\hat{n} \cdot D_{12})^2 \gamma_{coll}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + (\gamma_{coll} + \gamma_{sp})V^2}$$

La sezione d'urto è piccola per piccole intensità, e per intensità evoppe oltre tende a zero perché l'atomo viene saturato.

Per calcolarsi la  $\mathcal{G}_1$  e la  $\mathcal{G}_2$  basta usare le espressioni calcolate prima

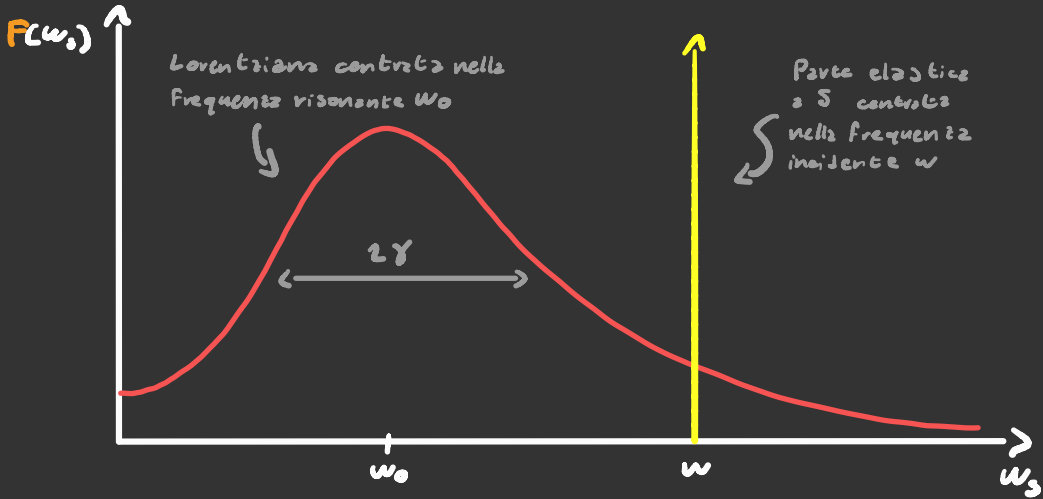
$$\mathcal{G}_1(\gamma) = \left[ \frac{\alpha_1(\infty)}{\beta_1(\infty)} \alpha_1(\gamma) + \alpha_2(\gamma) \right] e^{i\omega\gamma} \quad \mathcal{G}_2(\gamma) = \frac{\beta_1(\gamma)}{\beta_1(\infty)}$$

Sta volés visto che le equazioni di Bloch sono diverse, quindi gli  $\alpha_i(\gamma)$  e  $\beta_i(\gamma)$  saranno diversi, ma però non li scrivo perché non serve per davvero, basta scrivere direttamente

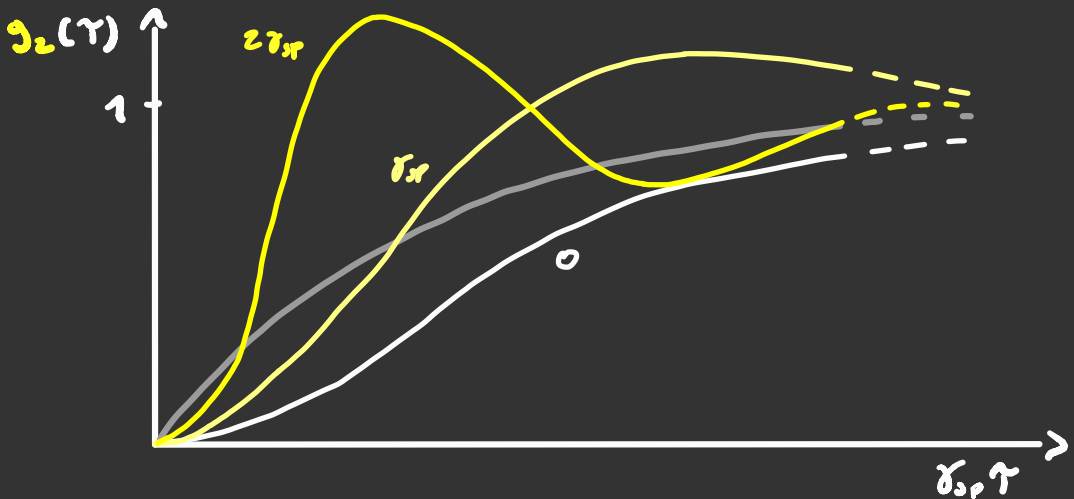
$$\mathcal{G}_1(\gamma) = \frac{\gamma_{coll}}{\gamma} e^{-i\omega_0\gamma - \gamma\pi} + \frac{\gamma_{sp}}{\gamma} e^{-i\omega\gamma}$$

Questo ci serve a scrivere la distribuzione in frequenza della luce scattering

$$F(\omega_s) = \underbrace{\frac{\gamma_{coll}}{\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega_s)^2 + \gamma^2}}_{\text{Anelastica}} + \underbrace{\frac{\gamma_s}{\gamma} \delta(\omega_s - \omega)}_{\text{Elastica}}$$



La  $\rho_2$  ha una formula enorme, quindi meglio mettere direttamente qualche grafico.

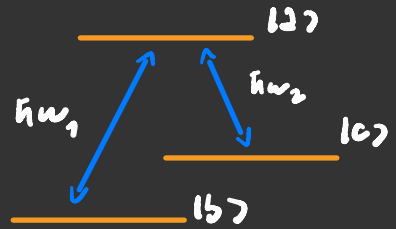


# Coerenza

Quella cosa che i filosofi non hanno

È un po' complicato dire esattamente la coerenza, ma ci provo lo stesso, in ogni caso dopo ci saranno un paio di esempi che dovrebbero rendere il tutto più chiaro.

Supponiamo di avere un atomo con 3 livelli energetici e che attraverso un campo E.M. sia possibile effettuare delle transizioni  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ .



Di norma se partiamo da un sistema  $c_b(0)|b\rangle + c_c(0)|c\rangle$  dopo un po' di tempo ci troviamo in uno stato

$$c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle + c_c(t)|c\rangle$$

Grazie al fatto che il campo E.M. fa assorbire un fotone, però se impostiamo bene la fase dei livelli  $b$  e  $c$  a  $t=0$  possiamo far sì che la transizione  $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$  sia esattamente in controfase con la transizione  $|c\rangle \rightarrow |a\rangle$ . Così facendo sarà impossibile per il campo E.M. eccitare gli elettroni allo stato  $|a\rangle$ .

Questo è un esempio di come si usa la coerenza tra 2 livelli energetici per controllare un processo.

Adesso vediamo di dimostrare in matematiche che tutto ciò è possibile.

$$H = H_0 + H_2 \quad H_0 = \hbar \omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar \omega_b |b\rangle\langle b| + \hbar \omega_c |c\rangle\langle c|$$

$$H_2 = \frac{\hbar}{2} \Omega_1 [ |a\rangle\langle b| e^{i\omega_a t + i\phi_1} + |b\rangle\langle a| e^{-i\omega_a t - i\phi_1} ] + \frac{\hbar}{2} \Omega_2 [ |a\rangle\langle c| e^{i\omega_a t + i\phi_2} + |c\rangle\langle a| e^{-i\omega_a t - i\phi_2} ]$$

$$i\hbar \frac{\partial c_a}{\partial t} = \langle a|H|\psi\rangle = c_b(t)\hbar\omega_a + \hbar\frac{\Omega_1}{2} e^{i\omega_a t + i\phi_1} c_b(t) + \hbar\frac{\Omega_2}{2} e^{i\omega_a t + i\phi_2} c_c(t)$$

$$i\hbar \frac{\partial c_b}{\partial t} = \langle b|H|\psi\rangle = c_b(t)\hbar\omega_b + \hbar\frac{\Omega_1}{2} e^{-i\omega_a t - i\phi_1} c_a(t)$$

$$i\hbar \frac{\partial c_c}{\partial t} = \langle c|H|\psi\rangle = c_c(t)\hbar\omega_c + \hbar\frac{\Omega_2}{2} e^{-i\omega_a t - i\phi_2} c_a(t)$$

Se  $c_a(t) = 0$  basta imporre

$\phi$  è la fase tra  $\omega_a$  e  $\omega_b$  gli stati  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$  a  $t=0$



$$\Omega_1 c_b(0) = e^{i\phi} \Omega_2 c_c(0) \quad \text{e} \quad \phi_1 - \phi_2 - \phi = \pm\pi$$

La funzione d'onda totale viene

$$|\psi\rangle = c_b(t)|b\rangle + c_c(t)|c\rangle = e^{-i\omega_a t} c_b(0)|b\rangle + e^{-i\omega_a t} c_c(0)|c\rangle = e^{-i\omega_a t} [\Omega_1 e^{i\phi} |b\rangle + \Omega_2 |c\rangle]$$

$$|\psi\rangle = \Omega_2 e^{i\phi - i\omega_a t} |b\rangle + \Omega_1 e^{-i\omega_a t} |c\rangle$$

Questa funzione d'onda è un mezzo AutoStato dell'Hamiltoniana nel senso che una volta che il sistema si è trovato dentro non si sposta più, ed è spesso chiamata "vibra nera" o "stato scuro".

Una cosa curiosa da notare è che lo stato scuro può essere anche  $|b\rangle$ , basta avere  $E_1 = 0$  ed  $E_2 \neq 0$  e assicurarsi che l'elettrone se ne stia in  $|b\rangle$ . (che in questo caso è anche lo stato fondamentale)

Inoltre se si cambiano i campi adiabaticamente lo stato scuro segue.

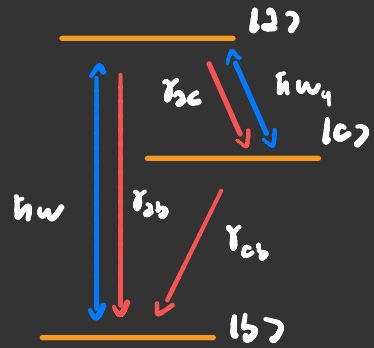
# Trasparenza indotta elettromagneticamente

Quest'ultimo paragrafo può essere usato per spiegare la trasparenza indotta elettromagneticamente.

Come abbiamo visto lo stato si evolve senza assorbire nessun fotone, ciò significa che è possibile attivare o disattivare la trasparenza del mezzo accendendo o spegnendo o spegnendo una delle due radiazioni.

Il problema però è che il sistema deve essere preparato in uno stato quantistico ben preciso perché tutto funzioni.

Realisticamente partendo l'elettrone a  $t=0$  sta nello stato fondamentale e inoltre c'è dell'emissione spontanea dagli stati più alti a quelli più bassi ( $\gamma_{21}, \gamma_{20}, \gamma_{10}$ ).



Per rendere il tutto più simile al sistema sendite-poco  $F_2$  supponiamo che  $\gamma_{01}$  sia molto più grande di  $\gamma_{21}$  e  $\gamma_{10}$ .

A prima vista tutti questi tassi di decadimento sembrano essere un bel problema, ma a dire il vero aiutano ad impostare la fase "giusta"  $\phi$  tra lo stato  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$ .

Infatti se la fase  $\phi \neq \phi_1 - \phi_2 \pm \pi$  l'elettrone viene eccitato e sbalanzato un po' e infine ri- decade in  $|0\rangle$  con una nuova

fase  $\phi'$  e poi  $\phi''$  e poi  $\phi'''$  finché non arriva a una fase  $\phi^{(n)} = \phi_1 - \phi_2 \pm \pi$

Supponiamo di voler far sì che il nostro mezzo sia trasparente rispetto a una radiazione a frequenza  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ .

Per fare ciò dobbiamo far sì che lo stato scuro sia  $|b\rangle$ , quindi la radiazione a frequenza  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  deve essere molto più forte di quella a frequenza  $\hbar\omega$ .

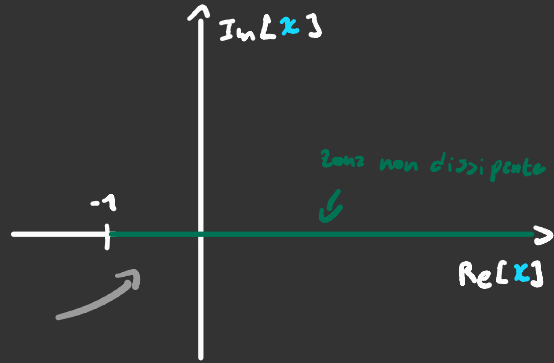
In teoria questo è quello che serve per fare la trasparenza indotta elettromagneticamente, adesso passiamo al matematico.

Per vedere se un mezzo è trasparente ad una certa frequenza  $\omega$ , basta guardare la suscettività  $\chi(\omega)$ , senza entrare troppo nei dettagli, noi abbiamo che

$$n(\omega) + \frac{2i\omega}{c} \kappa(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$$

↑ Twice di rifrazione      ↑ coefficiente di attenuazione

Un mezzo per essere considerato trasparente deve avere  $\kappa(\omega) = 0$ , quindi deve trovarsi in queste zone del campo complesso.



Ricordiamoci che  $P(\omega) = \chi(\omega) E(\omega) = \frac{1}{V} \langle \hat{O} \rangle E(\omega)$  dove per  $\langle \hat{O} \rangle$  si intende  $\text{tr}(\hat{O} \rho)$ .

Visto che gli elementi diagonali della matrice di densità hanno momento di dipolo nullo ci limitiamo a scrivere gli elementi fuori diagonale, inoltre visto che siamo interessati solo a cosa succede alla componente della luce a frequenza  $\omega$  l'unica componente di  $\hat{O}$  che ci interessa è  $D_{ab}$ .

Il procedimento è identico a quello delle equazioni di Bloch ottiche

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d p_{2b}}{dt} &= -(i\omega_{2b} + \gamma_{2b}) p_{2b} - \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} e^{-i\omega t} (p_{22} - p_{2b}) + i \frac{\Omega_{21}}{2} e^{-i\omega_1 t - i\phi_1} p_{2b} \\ \frac{d p_{2c}}{dt} &= -(i\omega_{2c} + \gamma_{2c}) p_{2c} - \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} e^{-i\omega t} p_{2c} + i \frac{\Omega_{21}}{2} e^{i\omega_1 t + i\phi_1} p_{2b} \\ \frac{d p_{2a}}{dt} &= -(i\omega_{2a} + \gamma_{2a}) p_{2a} + \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} e^{-i\omega t} p_{2c} - \frac{i}{2} \Omega_{21} e^{-i\omega_1 t - i\phi_1} (p_{22} - p_{2c}) \end{aligned} \right.$$

A  $t=0$   $p_{2b}=1$ ,  $p_{22}=p_{2c}=p_{2a}=0$

Per ora limitiamoci a tempi piccoli, facendo così possiamo ignorare la III equazione del sistema. Se si definiscono

$$\tilde{p}_{2b} \equiv p_{2b} e^{-i\omega t} \quad \tilde{p}_{2c} \equiv p_{2c} e^{-i(\omega + \omega_{21})t} \quad \Delta = \omega_{2b} - \omega$$

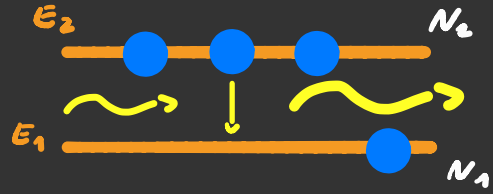
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_{2b} &= -(\gamma_{2b} + i\Delta) \tilde{p}_{2b} + \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} + i \frac{\Omega_{21}}{2} e^{i\phi_1} \tilde{p}_{2c} \\ \dot{\tilde{p}}_{2c} &= -(\gamma_{2c} + i\Delta) \tilde{p}_{2c} + i \frac{\Omega_{21}}{2} e^{i\phi_1} \tilde{p}_{2b} \end{aligned} \right.$$

# Incompleto

# LASER Senza

Quando c'è LWI...

# Inversione



Prima avevamo visto che per far sì che ci sia dell'amplificazione della luce è necessario che ci siano più elettroni eccitati che allo stato fondamentale.

Anche levando l'emissione spontanea, se ad esempio  $N_2 = N_1$  il numero di fotoni che emettono in modo stimolato è uguale al numero che assorbono, quindi la luce non viene amplificata.

Per far sì che avvenga l'emissione anche quando  $N_2 < N_1$  c'è bisogno che in un modo o nell'altro i rate di assorbimento e di emissione non siano uguali.

Facciamo finta che il nostro sistema a 2 livelli sia accoppiato a un continuo di livelli energetici: il rate di transizione è scrivibile tipo



$$+ \int_{\text{Continuo}} \frac{\langle 2 | H_2 | 1 \rangle \langle 1 | H_2 | 2 \rangle}{E_1 - E_0} d\epsilon \quad \text{Argomenti!}$$

Questo fa diventare la curva di assorbimento così





Anche il processo di emissione viene modificato quando si considera l'interazione col continuo, ma in modo diverso

$$\langle 1 | H_2 | 2 \rangle + \int \frac{\langle 1 | H_2 | c \rangle \langle c | H_2 | 2 \rangle}{E_2 - E_c} dc$$

Continuo
 $E_2 - E_c$ 
←
Al denominatore c'è  $E_2$  al posto di  $E_1$

Questo crea un'asimmetria nei tassi di assorbimento e emissione stimolati, e quindi in teoria permette di avere dell'amplificazione senza inversione.

**Attenzione!** Questo non significa che è possibile avere un laser senza inversione con un sistema a 2 livelli.

Un III livello è comunque indispensabile per pompare gli elettroni nello stato  $|2\rangle$ . Altrimenti prima o poi gli elettroni in  $|2\rangle$  finirebbero

$$|\psi\rangle = a_1(t)|1\rangle + a_2(t)|2\rangle + \sum_{c \in \text{cont.}} \beta_c(t)|c\rangle$$

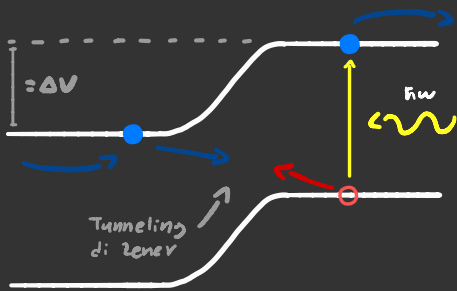
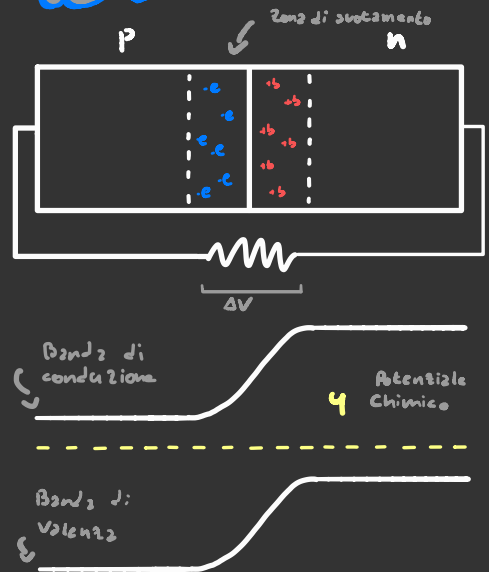
$$\text{in } \hat{a}_2(t) = \langle 2 | V | \psi \rangle = a_1(t) \langle 2 | V | 1 \rangle + \sum \beta_c(t) \langle 2 | V | c \rangle$$

$$\text{in } \hat{\beta}_c(t) = a_1(t) \langle c | V | 1 \rangle + a_2(t) \langle c | V | 2 \rangle + \sum \beta_{c'}(t) \langle c | V | c' \rangle$$

$$\hat{a}_2(t) = -\frac{i}{\hbar} \langle 2 | V | 1 \rangle + \frac{i}{\hbar} \iint \langle 2 | V | c \rangle \langle c | V | 1 \rangle d\omega dc$$

# Come funziona un Pannello Solare

Supponiamo di avere una giunzione p-n, questa giunzione crea un gradiente di potenziale per gli elettroni. Se non c'è della luce che colpisce la nostra giunzione tutti gli elettroni stanno nella banda di valenza, per far sì che si possano muovere è necessario che vadano in banda di conduzione.



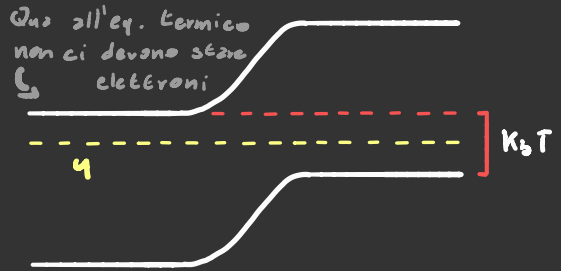
Supponiamo che un fotone con un'energia pari al gap del semiconduttore ecciti un elettrone. Se l'elettrone esce dalla parte destra nel nostro semiconduttore, esso libera un'energia pari a  $\Delta V e$ ,

dopo di che rientra nell'altra parte del semiconduttore nella banda di valenza e si annienta con la buca che aveva creato.

Se invece l'elettrone viene eccitato nella zona p il ragionamento è identico al caso in cui l'elettrone viene eccitato nella zona n, solo che sta volta bisogna ragionare in termini di cosa fa la buca.

A prima vista sembrerebbe che se si usa un pannello solare con un gap energetico  $eV = h\nu$  si ha un'efficienza del 100%. Il problema però è che facendo così la banda di conduzione viene riempita di elettroni e quindi non conduce più.

Per assicurarci che non ci siano elettroni dobbiamo far sì che la banda di conduzione nella zona P e quella di valenza nella n abbiano una differenza di energia pari a  $k_B T$ , dove T è la temperatura del silicio.



Da qui abbiamo che l'energia prodotta dal singolo fotone è

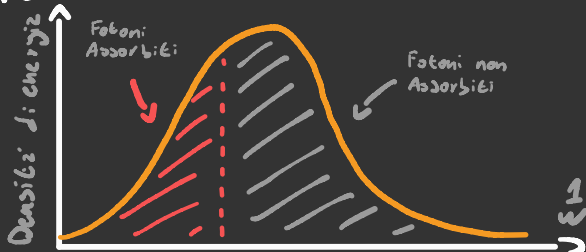
$$\Delta E_e = h\nu - k_B T$$

L'efficienza  $\eta$  è uguale al rapporto tra il lavoro prodotto  $\Delta E_e$  e l'energia assorbita  $h\nu$ , inoltre se scriviamo l'energia assorbita come se fosse una temperatura otteniamo che

$$\eta = \frac{\Delta E_e}{h\nu} = 1 - \frac{k_B T}{h\nu} = 1 - \frac{T}{T_s}$$

Temperatura della sorgente

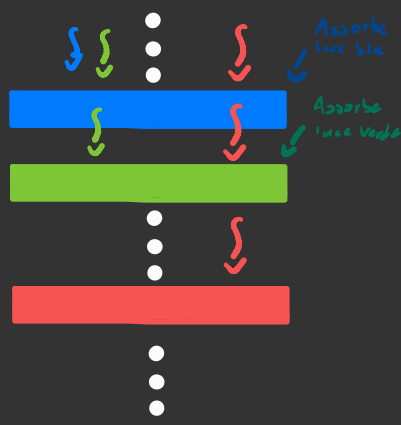
È questo non è altro che l'efficienza di una macchina di Carnot. Purtroppo però questa formula funziona solo per luce monocromatica. Se la radiazione è di corpo nero i fotoni a frequenze minore del gap non vengono assorbiti e quelli a frequenze maggiore contribuiscono solo  $\Delta E_e$ .



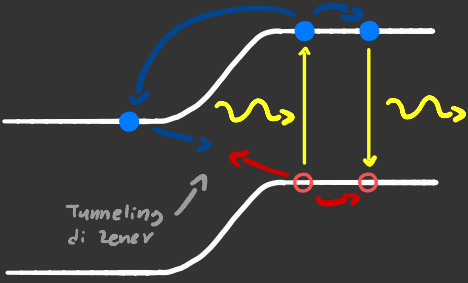
Questo problema però può essere risolto creando dei pannelli stretti fittissimi che assorbono la luce come descritto

nel disegno a destra.

L'unico problema è che per ora costa uno spreco di soldi fare i pannelli così.



I problemi però non finiscono qui: certe volte l'elettrone o la buca si scordano di fare il giro del circuito prima di ricombinarsi.



Questo è uno spreco di energia, ma forse è risolvibile.

Nell'immagine qui a sinistra sono presenti due possibili percorsi:

Ma se decade ri-emettendo un fotone a frequenza  $h\nu$  non dovrebbe essere riassorbito subito?