

2018 级学生期末试题答案及解析

一、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 已知向量 $a = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, 且 $|b| = 1$, $|a \times b| = 1$, 则 $|a \cdot b| =$ _____.

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$
(C) 2 (D) 1

【答案】 B.

【解析】 $|a| = 2$, $|a \times b| = |a||b|\sin \theta = 2\sin \theta = 1$, $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|a \cdot b| = |a||b|\cos \theta = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. 故选 B.

2. 设 n 阶矩阵 A 和 n 阶矩阵 B 等价, 以下正确的是_____.

- (A) $|A| = a \neq 0$, 则 $|B| = a$ (B) $|A| = a \neq 0$, 则 $|B| = -a$
(C) $|A| = a \neq 0$, 则 $|B| = 0$ (D) $|A| = 0$, 则 $|B| = 0$

【答案】 D.

【解析】 A 与 B 等价, 则 $A = P_m \cdots P_1 B Q_1 \cdots Q_t$, 其中 $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_t$ 为初等阵, 则 $|A|$ 与 $|B|$ 之间相差倍数, 所以若 $|A| = 0$, 则 $|B| = 0$. 故选 D.

3. 设 3 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 其中 $b \neq 0$, 已知 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 $r(A^*) = 1$, 则 a, b 应

满足的关系为_____.

- (A) $a = b$ (B) $a = 0$
(C) $a = -2b$ (D) $a = 2b$

【答案】 C.

【解析】 $r(A^*) = 1$, 则 $r(A) = 3 - 1 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2b+a & b & b \\ 2b+a & a & b \\ 2b+a & b & a \end{bmatrix}$$

若 $a = -2b$, $A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ 0 & -2b & b \\ 0 & b & -2b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $r(A) = 2$. 故选 C.

非齐次线性方程组 $AX = b$ 中, 未知数个数为 4, 方程个数为 3, $r(A) = 2$, 又设三个线性无关



的向量 η_1, η_2, η_3 都是该方程组的解, c_1, c_2 为任意常数, 则该方程组的通解为_____.

- (A) $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\eta_3$
 (B) $c_1\eta_1+c_2\eta_2-(c_1+c_2)\eta_3$
 (C) $c_1(\eta_1-\eta_3)+c_2(\eta_2-\eta_3)+(\eta_1+\eta_3)$
 (D) $c_1(\eta_1-\eta_3)+c_2(\eta_2-\eta_3)+\frac{(\eta_1+\eta_3)}{2}$

【答案】 D.

【解析】 η_1, η_2, η_3 是 $AX=b$ 的三个无关解, 由 $[\eta_1-\eta_3, \eta_2-\eta_3] = [\eta_1, \eta_2, \eta_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

$r(\eta_1-\eta_3, \eta_2-\eta_3) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2$, 则 $\eta_1-\eta_3, \eta_2-\eta_3$ 为 $AX=0$ 的无关解, 且基础解系中含有

4-2 个解向量, 则 $\eta_1-\eta_3, \eta_2-\eta_3$ 为 $AX=0$ 的基础解系, $\frac{\eta_1+\eta_3}{2}$ 为 $AX=b$ 的一个解, 则 $AX=b$ 的

通解为 $c_1(\eta_1-\eta_3)+c_2(\eta_2-\eta_3)+\frac{(\eta_1+\eta_3)}{2}$. 故选 D.

5. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 的秩为 3, 则直线 $L_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

$\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系为_____.

- (A) 相交于一点 (B) 重合
 (C) 平行但不重合 (D) 异面

【答案】 A.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, 由 $r(A)=3$, 则 $\{a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2\}$ 与

$\{a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3\}$ 不平行, 则 L_1 与 L_2 不平行, 由 $r(A)=3$, 可知向量 $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}, \{a_3, b_3, c_3\}$ 不共面, 则点 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ 不共线. 三直线两两相交于一点. L_1 为过点 (a_3, b_3, c_3) 平行于 $\{a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2\}$ 的直线, L_2 为过点 (a_1, b_1, c_1) 平行于 $\{a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3\}$ 的直线, 则 L_1 与 L_2 共面. 所以 L_1 与 L_2 交于一点. 故选 A.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设向量 $\alpha = [1, 0, -1]^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, 则 $|E - A^{2019}| =$ _____.



【答案】 $1-2^{2019}$.

【解析】 矩阵 A 的特征值为 $0, 0, 2$, 则 $E-A^{2019}$ 的特征值为 $1, 1, 1-2^{2019}$, 所以 $|E-A^{2019}| = 1 \times 1 \times (1-2^{2019}) = 1-2^{2019}$.

2. 曲线 $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所成的曲面方程为_____.

【答案】 $x^2 + z^2 = 2y$.

【解析】 曲线 $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所成的曲面方程为 $(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2 = 2y$, 即 $x^2 + z^2 = 2y$.

3. 设 $A_{i3} (i=1, 2, 3)$ 是行列式 $\begin{vmatrix} a & x & z \\ a & y & x \\ a & z & y \end{vmatrix}$ 中第三列元素的代数余子式, 则 $A_{13} + A_{23} + A_{33} =$ _____.

【答案】 0 .

【解析】 $A_{13} + A_{23} + A_{33} = \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ a & y & 1 \\ a & z & 1 \end{vmatrix} = 0$.

4. 设 A 是 $m \times m$ 矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $A^T X = 0$ 的基础解系, 则 $r(A) =$ _____.

【答案】 $m-t$.

【解析】 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $A^T X = 0$ 的基础解系, 则 $r(A^T) = m-t, r(A) = r(A^T) = m-t$.

5. 设 A 为 3 阶方阵, 将 A 的第二行加到第三行上得矩阵 B , 再交换 B 的第一、第二行得矩阵 C , 则满足 $QA = C$ 的可逆阵 $Q =$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

【解析】 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} A, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} A = QA$.

6. 已知 3 维向量 $\alpha_1 = [1 \ -1 \ 0]^T, \alpha_2 = [2 \ -1 \ 1]^T$, 若利用施密特正交化得到 $\beta_1 = \alpha_1$, 则 $\beta_2 =$ _____.

【答案】 $\left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 1\right]^T$.

【解析】 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 1\right]^T$.



7. 已知向量组(I): α_1, α_2 ; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. 若各向量组的秩分别为 $r(I)=r(II)=2$, $r(III)=3$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-\alpha_4$ 的秩为_____.

【答案】 3.

【解析】 $r[\alpha_1, \alpha_2]=2=r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

$r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]=3$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-\alpha_4] = [\alpha_1, \alpha_2, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-\alpha_4] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-\alpha_4] =$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3.$$

8. 设 2 阶方阵 A 的特征值 $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$ 对应的特征向量分别为 $p_1=[1 \ 2]^T, p_2=[2 \ 5]^T$, 则该矩阵 $A=$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix} -13 & 6 \\ -30 & 14 \end{bmatrix}$.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & 6 \\ -30 & 14 \end{bmatrix}$.

9. 设 A 为 3 阶方阵, 其特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\frac{1}{3}$, 且齐次线性方程组 $(3E-A)x=0$ 有非零解, 则

$|A|=$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 $(3E-A)x=0$ 有非零解, 则 $r(3E-A)<3, |3E-A|=0$, 所以 $-1, \frac{1}{3}, 3$ 为矩阵 A 的特

征值, 则 $|A| = -1 \times \frac{1}{3} \times 3 = -1$.

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + (a+2)x_3^2 + 2x_1x_2$ 为正定二次型, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a>1$.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$ 正定, 则 $a>0, \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1>0, |A| = (a+2)(a-1)>0$, 所以 $a>1$.



三、计算题(每小题 7 分, 共 35 分)

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值, 其中 $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$.

【解答】 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$= \left(a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) a_2 a_3 a_4 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 若矩阵 X 满足 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求矩阵 X .

【解答】 由 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E$, 则 $X = 3(A - E)^{-1}A \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

由 $A - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $|A - E| = 3 \neq 0$, 因此 $A - E$ 可逆, 且

$(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因此解得 $X = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

3. 求过点 $P(1, 2, 1)$ 且垂直于直线 $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ 又与直线 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ 相交的直线的点向式方程.

【解答】 设直线 L 与 L_2 的交点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 因此满足 $\frac{x_0}{2} = \frac{y_0}{1} = \frac{z_0}{-1}$, 即 $x_0 = 2y_0, z_0 = -y_0$, 因此 $M(2y_0, y_0, -y_0) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又由直线 L 与 L_2 垂直, 则向量 $\overrightarrow{PM} \perp d_1$, 因此 $\{2y_0 - 1, y_0 - 2, -y_0 - 1\} \perp \{3, 2, 1\}$



解得 $v_0 = \frac{8}{7}$, 3 分

因此 $M\left(\frac{16}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{8}{7}\right)$, $PM = \frac{3}{7}|3, -2, -5|$, 故点向式方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-5} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 且线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解, 求参数 λ 和

方程组 $Ax=b$ 的通解的向量形式.

【解答】 线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解, 因此 $r(A) < 3$, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_1 = 1$ 或 $\lambda_2 = -1$ 2 分

(1) 当 $\lambda_1 = 1$ 时, 其增广矩阵为

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $r(A) = 1, r(\tilde{A}) = 2$, 方程组无解; 2 分

(2) 当 $\lambda_2 = -1$ 时, 其增广矩阵为

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时 $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$, 2 分

$$\text{因此 } \begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

则方程组的通解为



$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1 \text{ 为任意常数}). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

5. 求向量组 $\alpha_1 = [2, 0, 1, 8]^T, \alpha_2 = [1, 2, 1, 1]^T, \alpha_3 = [1, 1, 2, 1]^T, \alpha_4 = [2, 2, -1, 8]^T$ 的秩和一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

【解答】 对 $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]$ 构成的矩阵进行初等行变换得:

$$A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大无关组, 且 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

四、应用题(12分)

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $-3y_1^2 + 6y_2^2$.

(1) 求参数 a 及正交矩阵 P .

(2) 说明方程 $f=1$ 代表三维几何空间中的何种曲面.

【解答】 (1) 二次型对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{bmatrix}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $-3y_1^2 + 6y_2^2$, 因此特征值为

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0;$$

又由于 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 - 1 + a = 3$, 解得 $a = 2$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

对特征值 $\lambda_1 = -3$, 可解得对应的特征向量 $p_1 = (1, -1, 1)^T$; $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

对特征值 $\lambda_2 = 6$, 可解得对应的特征向量 $p_2 = (-1, 0, 1)^T$; $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

对特征值 $\lambda_3 = 0$, 可解得对应的特征向量 $p_3 = (1, 2, 1)^T$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

将 p_1, p_2, p_3 单位化, 得到正交阵 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$



则 $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 所以在正交变换 $x = Py$ 下, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为正交标准

型 $-3y_1^2 + 6y_2^2$.

(2) 方程 $f = -3y_1^2 + 6y_2^2 = 1$ 代表三维几何空间中的双曲柱面. 2 分

五、证明题(每小题 4 分, 共 8 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间的一组基, 若 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也为 $\mathbf{R}^3$ 空间的一组基.

证明 由 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$, 因此

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由于 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ 可逆, 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相互等价, 即证得

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也为 $\mathbf{R}^3$ 空间的一组基. 2 分

2. 设 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 求证 $r(A) = 2$.

证明 由于 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同特征值, 因此方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 必可对角化, 又由于 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 因此 $|A| = 0$, 因此必有一个特征值 $\lambda_3 = 0$, 设另有特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$,

因此必存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 因此证得 $r(A) = 2$ 4 分



2019 级学生期末试题答案及解析

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, $[X \ Y]$ 表示分块矩阵, 则_____.

- (A) $r[A \ AB] = r(A)$
- (B) $r[A \ BA] = r(A)$
- (C) $r[A \ B] = \max\{r(A), r(B)\}$
- (D) $r[A \ B] = r[A^T \ B^T]$

【答案】 A.

【解析】 选项 A, AB 的列向量可由 A 的列向量线性表示, 则 $[A \ AB] \rightarrow [A \ 0]$, 则 $r[A \ AB] = r(A)$;

选项 B, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $r[A \ BA] = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq r(A) = 1$;

选项 C, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $r[A \ B] = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq \max\{r(A), r(B)\} = 1$;

选项 D, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $r[A \ B] = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq r[A^T \ B^T] =$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1.$$

故选 A.

2. 已知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则下列结论中正确的是_____.

- (A) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 必线性相关
- (B) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 必线性无关
- (C) 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关
- (D) 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关也可能线性无关

【答案】 A.

【解析】 由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, $r[\beta_1, \beta_2, \beta_3] \leq r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] < 3$, 所以 $r[\beta_1, \beta_2, \beta_3] < 3$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 必线性相关. 故选 A.

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则下列结论中错误的是_____.



- (A) 若 $|A| < 0$, 则 A 可对角化
 (B) 若 A 有两个线性无关的特征向量, 则 A 可对角化
 (C) 若 $A+E$ 与 $A+2E$ 均不可逆, 则 A 可对角化
 (D) 若 $r(A)=1$, 则 A 可对角化

【答案】 D.

【解析】 选项 A, $|A| < 0$, 则 A 有两个不同的特征值, 所以 A 可对角化;

选项 B, 显然正确;

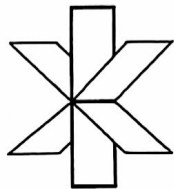
选项 C, 由 $A+E$ 与 $A+2E$ 均不可逆, $|A+E|=0$, $|A+2E|=0$, $-1, -2$ 为矩阵 A 的两个不同的特征值, 所以 A 可对角化;

选项 D, 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A)=1$, 但 A 不可对角化.

故选 D.

4. 若三张平面位置如图, 则由三张平面的方程构成的线性方程组中_____.

- (A) 系数矩阵的秩为 1, 增广矩阵的秩为 2
 (B) 系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2
 (C) 系数矩阵的秩为 2, 增广矩阵的秩为 3
 (D) 系数矩阵与增广矩阵的秩均为 3



【答案】 B.

【解析】 三张平面交于一条直线, 则可知方程组有无穷组解, 则 $r(A)=r(\tilde{A}) < 3$, 若 $r(A)=$

$r(\tilde{A})=1$, 则三张平面重合, 所以 $r(A)=r(\tilde{A})=2$. 故选 B.

5. 以下实数域上的线性空间中, 维数与其他 3 个选项不同的是_____.

- (A) 全体 3 阶对角线为零的上三角阵, 按照矩阵的加法数乘, 构成的线性空间
 (B) 全体 2 阶对称阵, 按照矩阵的加法数乘, 构成的线性空间
 (C) $O-xyz$ 直角坐标系下所有向量, 按照向量的加法数乘, 构成的线性空间
 (D) 次数不超过 3 次的多项式和零多项式, 按照多项式的加法数乘, 构成的线性空间

【答案】 D.

【解析】 选项 A, $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V_1 = 3$;

选项 B, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V_2 = 3$;



选项 C, $V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}, \dim V_3 = 3;$

选项 D, $V_4 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}, \dim V_4 = 4.$

故选 D.

二、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 中,元素 a_{25} 的代数余子式为 $A_{25} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2.

【解析】 $A_{25} = (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$

2. 两个椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 与 $z = 3 - 2x^2 - y^2$ 围成的空间立体,在 xoy 平面上的投影区域为 $D = \{(x, y) | \underline{\hspace{2cm}}\}$.

【答案】 $x^2 + y^2 \leq 1.$

【解析】 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 3 - 2x^2 - y^2 \end{cases}, x^2 + 2y^2 = 3 - 2x^2 - y^2, \text{化简为 } x^2 + y^2 = 1, \text{所以投影区域为 } x^2 + y^2 \leq 1.$

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{2020} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

【答案】 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

【解析】 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 1] = \alpha \alpha^T, \alpha^T \alpha = 1, A^{2020} = \alpha (\alpha^T \alpha)^{2019} \alpha^T = \alpha \alpha^T = A.$

4. 设 A 为 3 阶方阵, $|A| = 2$, 则 $\left| \left(\frac{1}{2} A^* \right)^{-1} \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2.



【解析】 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}, \left| \left(\frac{1}{2} A^* \right)^{-1} \right| = |2(A^*)^{-1}| = |A| = 2.$

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $B^{100}AC^{100} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$

【答案】 $\begin{bmatrix} 301 & 2 & 3 \\ 604 & 5 & 6 \\ 907 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

【解析】 $BA = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 互换第一行和第三行, 则 $B^{100}A = A$;

$AC = \begin{bmatrix} 1+3 & 2 & 3 \\ 4+6 & 5 & 6 \\ 7+9 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 的第三列加到第一列上, 则 $AC^{100} = \begin{bmatrix} 301 & 2 & 3 \\ 604 & 5 & 6 \\ 907 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, 则 $B^{100}AC^{100} =$

$\begin{bmatrix} 301 & 2 & 3 \\ 604 & 5 & 6 \\ 907 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

6. 设 $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4], B = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$, 若非齐次方程组 $AX = \beta$ 的通解为 $X = C[1 \ 2 \ -1 \ 0]^T + [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (C 为任意常数), 则方程组 $BX = \beta - \alpha_1$ 的通解为

【答案】 $X = k[1 \ 2 \ -1]^T$ (k 为任意常数).

【解析】 $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 为 $AX = \beta$ 的一个特解, 则 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 = \beta$;

$[1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$ 为 $AX = 0$ 的一个基础解系, 则 $r(A) = 3$, 且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$;

则 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 为方程组 $BX = \beta - \alpha_1 = 0$ 的一个非零解, 由 $r(A) = 3$, 可知 $2 \leq r(B) \leq 3$, 若 $r(B) = 3$, 则



$BX=0$ 仅有零解, 矛盾。所以 $r(B)=2$, 则 $BX=\beta-\alpha_1$ 的基础解系中含有 $3-2$ 个解向量, 则

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 为一组基础解系, 通解为 } X=k[1 \ 2 \ -1]^T (k \text{ 为任意常数}).$$

7. 若向量 $\beta=[1 \ 3 \ 0]$ 不能由 $\alpha_1=[1 \ 2 \ 1], \alpha_2=[2 \ 3 \ a], \alpha_3=[1 \ a+2 \ -2]$ 线性表示, 则 $a=$ _____.

【答案】 -1 .

【解析】 $\beta=[1 \ 3 \ 0]$ 不能由 $\alpha_1=[1 \ 2 \ 1], \alpha_2=[2 \ 3 \ a], \alpha_3=[1 \ a+2 \ -2]$ 线性表示, 则 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 无解, 即 $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] \neq r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{bmatrix}$$

$$\text{若 } a=-1, [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] \neq r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3].$$

8. 设 A 为 3 阶方阵, 可逆阵 $P=[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$, 且有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 若令 $Q =$

$$[\alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_1], \text{ 则有 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

【答案】 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$

【解析】 由 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 可知, α_1 为 1 的特征向量, α_2 为 2 的特征向量, α_3 为 3 的特

征向量, 则 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9. 已知直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $L_2: \frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{1} = \frac{z-c}{-3}$ (其中 a, b, c 为常数), 平面 π 经过直线 L_1 且与直线 L_2 平行, 则平面 π 的一般方程为 _____.



【答案】 $x+y+z-6=0$.

【解析】 取 $n_1=d_1 \times d_2 = |1, 1, -2| \times |2, 1, -3| = |-1, -1, -1|$, 所以 π 的一般方程为: $x-1+y-2+z-3=0$, 即 $x+y+z-6=0$.

10. 若 3 阶对称阵 A 满足 $(A+E)^2(A-2E)=0$, 且二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=X^TAX$ 的正惯性指数为 2, 则行列式 $|A|=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4.

【解析】 由 $(A+E)^2(A-2E)=0$ 可知, $-1, 2$ 为矩阵 A 的两个特征值, 又由于正惯性指数为 2, 所以 $-1, 2, 2$ 为 A 的全部特征值, 则 $|A|=-4$.

三、计算题(每小题 7 分, 共 35 分)

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix}.$$

【解答】
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 14 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -33 & 0 \\ 2 & -17 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -33 \\ 2 & -17 \end{vmatrix} = 202 \dots\dots 3 \text{ 分}$$

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 已知 $|A|=-1$, 且 A 的伴随阵 A^* 的特征值 λ_0 对应的特征向量为

$\alpha = [-1 \ -1 \ 1]^T$, 求 a, b, c 及 λ_0 的值.

【解答】 由已知 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$, 左乘 A 得

$AA^* \alpha = \lambda_0 A \alpha \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $AA^* = |A|E = -E$, $\lambda_0 A \alpha = -\alpha$, 因此

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

得



$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(c-1-a)=-1 & (3) \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(1)式减(3)式得 $\lambda_0=1$, 代入(2)式中得 $b=-3$;

将 $\lambda_0=1$ 代入(1)式中得 $a=c$, 将 $a=c$ 代入 $-1=|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{vmatrix}$ 中

解出 $a=c=2$, 因此 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$ 为所求. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

3. 若四点 $P_1(1,2,2), P_2(2,3,4), P_3(0,-1,2), P_4(0,0,k)$ 共面, 求 k 值.

【解答】 设经过三点 P_1, P_2, P_3 的平面为 π , 经过定点 $P_1(1,2,2)$ 其法向量

$$n=P_1P_2 \times P_3P_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \{-6, 2, 2\} = 2\{-3, 1, 1\}$$

因此平面 π 的方程为 $-3(x-1)+(y-2)+(z-2)=0$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

将 $P_4(0,0,k)$ 代入平面 π 的方程中, 解出 $k=1$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

4. 求向量组 $\alpha_1 = [1 \ 2 \ 1 \ 3]^T, \alpha_2 = [1 \ 1 \ -1 \ 1]^T, \alpha_3 = [1 \ 3 \ 3 \ 5]^T, \alpha_4 = [4 \ 5 \ -2 \ 6]^T, \alpha_5 = [3 \ 5 \ 1 \ 7]^T$ 的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用极大无关组线性表示.

【解答】 令 $A=[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此向量组的秩为 2; 一个极大无关组为 α_1, α_2 ; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2, \alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+ax_2)^2 + (x_2+ax_3)^2 + (x_3+ax_1)^2$, 若 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 有非零解, 求参数 a 的值和 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的通解.

【解答】 由 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+ax_2)^2 + (x_2+ax_3)^2 + (x_3+ax_1)^2 = 0$, 等同于方程组



$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 0 \\ x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + x_3 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

若使方程组有非零解,则系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a^3=0$, 即 $a=-1$; $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

此时,系数阵 $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 解得通解为 $X=k[1 \ 1 \ 1]^T$ (k 为任意常数). $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

四、应用题(12分)

设 A 为 3 阶实对称阵,且 $A[1 \ 1 \ 1]^T = [4 \ 4 \ 4]^T$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = 1$ 表示半轴长分别为 1, 1, k 的椭球面.

(1) 求 k 值

(2) 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形,并写出所用的变换.

【解答】 (1) 由 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{k^2} \end{bmatrix}$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{k^2}$ 为 A 的全部特征值,

由 $A[1 \ 1 \ 1]^T = [4 \ 4 \ 4]^T$, 则 $\lambda = \frac{1}{k^2} = 4$, 其特征向量为 $\alpha = [1 \ 1 \ 1]^T$,

因此 $k = \frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设 $\lambda = 1$ 对应的特征向量为 $\beta = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, 由 A 为对称阵, 则 β 与 $\alpha = [1 \ 1 \ 1]^T$ 正交, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 解方程得基础解系 $\beta_1 = [1 \ -1 \ 0]^T, \beta_2 = [1 \ 0 \ -1]^T$ 为 $\lambda = 1$ 对应的特征向量. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

用施密特方法将特征向量 β_1, β_2, α 正交化单位化得

$$p_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, p_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T, p_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T$$



因此, 令 $P = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, 2 分

二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $X = PY$ 下, 化为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$ 2 分

五、证明题(每小题 4 分, 共 8 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求证: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中任意 3 个向量均线性无关.

证明 先证明 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 由已知得

$$[\alpha_1 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ 矩阵 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 可逆, } r[\alpha_1 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = r[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] = 3, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因此 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 同理可证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 综上, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中任意 3 个向量均线性无关.

2. 设 A, B 为同阶实对称矩阵, 且 A 为正定阵, 求证: AB 的特征值均为实数.

证明 由于 A 是正定阵, 故存在可逆阵 Q 使得 $A = Q^T Q, AB = Q^T QB$, 2 分

从而 $(Q^T)^{-1}(AB)Q^T = (Q^T)^{-1}(Q^T QB)Q^T = QBQ^T$.

因 B 为实对称阵, 故 $B^T = B$, 从而 $(QBQ^T)^T = QB^T Q^T = QBQ^T$,

所以, AB 与实对称阵 QBQ^T 相似, 而实对称阵 QBQ^T 的特征值均为实数, 由于相似矩阵有相同的特征值, 故 AB 的特征值均为实数. 2 分



2020 级学生期末试题答案及解析

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r , 则 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r=n$

(B) A 的行向量组线性无关

(C) A 的列向量组线性相关

(D) A 的列向量组线性无关

【答案】 C.

【解析】 $Ax=0$ 有非零解, 则 $r(A)<n$, 所以 A 的列向量组线性相关. 故选 C.

2. 设分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$, 其中 B 和 C 都为方阵, 且 $|A| \neq 0$, 则有_____.

(A) B 可逆, C 不可逆

(B) C 可逆, B 不可逆

(C) B 和 C 可逆性不确定

(D) B 和 C 都可逆

【答案】 D.

【解析】 $|A| = \begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0$, 所以 $|B| \neq 0, |C| \neq 0$, 则 B 和 C 都可逆. 故选 D.

3. 设矩阵 A 经过初等列变换变成矩阵 B , 则以下正确的是_____.

(A) 存在矩阵 P , 使得 $PA=B$

(B) 存在矩阵 P , 使得 $BP=A$

(C) 存在矩阵 P , 使得 $PB=A$

(D) 线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

【答案】 B.

【解析】 矩阵 A 经过初等列变换变成矩阵 B , 则 $B=AP_1 \cdots P_m$ ($P_1, \dots, P_m$ 为初等阵), 则 $BP_1^{-1} \cdots P_m^{-1} = BP = A$. 故选 B.

4. 设 A, B 为两个相似的可逆矩阵, 则下列结论错误的是_____.

(A) A^T 与 B^T 相似

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】 C.

【解析】 A, B 为两个相似的可逆矩阵, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

选项 A, $B^T = (P^{-1}AP)^T = (P^T)^{-1}A^TP^T$, 所以 A^T 与 B^T 相似;

选项 B, $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, 所以 A^{-1} 与 B^{-1} 相似;

选项 C, $B+B^T = P^{-1}AP + (P^T)^{-1}A^TP^T = (P^{-1} + (P^T)^{-1})(A+A^T)(P+P^T)$, 由于 $(P+P^T)^{-1} \neq P^{-1} + (P^T)^{-1}$, 所以 $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 不一定相似;

选项 D, $B+B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A+A^{-1})P$, 所以 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.



故选 C.

5. 已知 A 为 3 阶实对称矩阵, E 为 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $f = x^T A x$ 的规范标准形为_____.

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

【答案】 C.

【解析】 $A^2 + A = 2E, (A + 2E)(A - E) = 0$, 则 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ 为 A 的特征值, 又由于 $|A| = 4$, 所以 $\lambda_3 = -2$, 则二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 所以规范型为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 故选 C.

二、填空题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 平面 $x + 2y + z + 1 = 0$ 与坐标面 xoy 的夹角余弦值为_____.

【答案】 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

【解析】 平面 $x + 2y + z + 1 = 0$ 的法向量为 $n_1 = \{1, 2, 1\}$, 坐标面 xoy 的法向量为 $n_2 = \{0, 0, 1\}$, 则夹角余弦值为 $\frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2. 设 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 的行列式为 $|A| = 4$, 若令矩阵 $B = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_1]$, 则矩阵 B 的行列式 $|B| =$ _____.

【答案】 8.

【解析】 $|B| = |\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_1| = |\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_1| + |\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_1|$
 $= |\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3| + |\alpha_1, 2\alpha_2, -2\alpha_1| + 0 = |\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3| = 2|A| = 8$.

3. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $A + AB = E$, 则 $A + BA =$ _____.

【答案】 E .

【解析】 $A + AB = E, A(E + B) = E$, 则 $(E + B)A = A + BA = E$.

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为_____.

【答案】 2.

【解析】 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则 $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = 3$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为可逆矩阵, 则 $r([A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3]) = r(A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = r(A) = 2$.

5. 设三张不同的平面 $\pi_1: ax + y + z = 0, \pi_2: x + ay + z = 0, \pi_3: x + y + az = 0$ 经过同一条直线, 则参数 $a =$ _____.

【答案】 -2.

【解析】 三张不同的平面 $\pi_1: ax + y + z = 0, \pi_2: x + ay + z = 0, \pi_3: x + y + az = 0$ 经过同一条直线, 可



知 $r\left(\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\right) = 2$.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 2+a & a & 1 \\ 2+a & 1 & a \end{bmatrix},$$

若 $a = -2$, $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r\left(\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\right) = 2$;

若 $a \neq -2$, $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$, 则

若 $a = 1$, $r\left(\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\right) = 1$; 若 $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$, 则 $r\left(\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\right) = 3$.

所以 $a = -2$.

6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3.

【解析】 由 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似, 则 $\begin{cases} -4+x=1+y \\ -2(-2x+4)=-2y \end{cases}$, 得到 $x=3$,

$y = -2$.

7. 已知向量组 $\alpha_1 = [1, 2]^T$, $\alpha_2 = [1, 3]^T$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的一组基, 则向量 $\beta = [1, 1]^T$ 在这组基下的坐标为 $[\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}]^T$.

【答案】 2, -1.

【解析】 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$, 增广阵为 $[\alpha_1, \alpha_2, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 所以 $x_1 = 2, x_2 = -1$.

8. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $k[-1, 2, -1]^T, k \in \mathbf{R}$.

【解析】 由 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 可知 $r(A) = 2$, 则方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为



有 3-2 个解向量, 由 $\alpha_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 可知, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一组基础解系, 则 $Ax=0$ 的通解为

$k[-1, 2, -1]^T, k \in \mathbb{R}$.

9. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_1x_3$ 为正定二次型, 则 a 的取值范围为

【答案】 $a > 3$.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}$, A 正定, 则

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} > 0, |A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = 24(a-3) > 0, \text{ 则 } a > 3.$$

10. 设 A 为 3 阶方阵, 可逆矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 且有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $Q = [\alpha_1 + \alpha_2,$

$\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2]$, 则 $Q^{-1}AQ =$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【解析】 α_1, α_2 为 1 对应的无关的特征向量, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 为 1 对应的无关的特征向量, 则

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

三、计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

【解答】 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$



$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 45 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

2. 求经过两直线 $L_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$ 的平面方程.

【解答】 平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \{2, -16, -13\} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因此平面方程为

$$2(x-7) - 16(y-2) - 13(z-1) = 0$$

$$\text{即 } 2x - 16y - 13z + 31 = 0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

3. 求向量组 $\alpha_1 = [1, -1, 2, 4]^T, \alpha_2 = [0, 3, 1, 2]^T, \alpha_3 = [3, 0, 7, 14]^T, \alpha_4 = [1, -1, 2, 0]^T$ 的秩和一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组表示.

【解答】 对 $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]$ 构成的矩阵进行初等行变换得:

$$A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{取 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \text{ 是一个极大无关组, 且 } \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

4. 求与下列三个向量同时正交的所有非零列向量.

$$[1, -1, 1, 6]^T, [1, 1, -1, 2]^T, [2, 3, 3, -4]^T.$$

【解答】 设向量 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 与三个向量同时正交, 则满足齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



解得该方程组的基础解系为 $p = [-4, 3, 1, 1]^T$, 因此所有正交的向量为

$$x = kp = k[-4, 3, 1, 1]^T, k \in \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

另解: 构造如下 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k & w \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

则取向量 $x = [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}]^T$, 其中 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ 是该行列式的第一行的代数余子式, 分别计算可得

$$A_{11} = 48, A_{12} = -36, A_{13} = -12, A_{14} = -12. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因此所有正交的向量为

$$x = k[-4, 3, 1, 1]^T, k \in \mathbf{R}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 可对角化, 求参数 x .

【解答】 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda - 1 & -x \\ -4 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 6) = 0$$

因此解得特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由于矩阵 A 可对角化, 则当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 齐次方程组 $(E - A)x = 0$ 基础解系中线性无关向量的个数为 $3 - r(E - A) = 2$ 个, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因此

$$E - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -x \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } x = 3. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

四、应用题 (10 分)

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 求参数 a 及正交矩阵 P .

(2) 说明方程 $f = 1$ 代表三维几何空间中的何种曲面.



【解答】 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 分

在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $y_2^2 + 2y_3^2$, 因此特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

又由于 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = 0$, 解得 $a = 0$ 2 分

对特征值 $\lambda_1 = 0$, 可解得对应的特征向量 $p_1 = (-1, 0, 1)^T$; 1 分

对特征值 $\lambda_2 = 1$, 可解得对应的特征向量 $p_2 = (0, 1, 0)^T$; 1 分

对特征值 $\lambda_3 = 2$, 可解得对应的特征向量 $p_3 = (1, 0, 1)^T$ 1 分

将 p_1, p_2, p_3 单位化, 得到正交阵 $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 2 分

则 $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, 所以在正交变换 $x = Py$ 下, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为正交标准

$$y_2^2 + 2y_3^2.$$

(2) 方程 $f = y_2^2 + 2y_3^2 = 1$ 代表三维几何空间中的椭圆柱面.

五、证明题 (5 分)

1. 设 A 为 3 阶方阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证明 由线性相关性定义可知

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

两边同时乘以 A , 可得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0, \dots\dots\dots$$

$$\text{因此 } -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

两式相减可得 $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$, 由于 α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量必线性无关, 因此

$$k_1 = k_3 = 0 \dots\dots\dots$$

代入定义可知 $k_2 = 0$, 因此证得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



2021 级学生期末试题答案及解析

一、单项选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为四维列向量, 矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1], B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2]$, 且 $|A| = 3, |B| = -2$, 则 $|A+B| =$ _____.

(A) -8

(B) -16

(C) 16

(D) 8

【答案】 D.

【解析】 $|A+B| = |2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, \beta_1+\beta_2| = 2^3(|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2|) = 8$. 故选 D.

2. 设 A 为 3 阶方阵, 将 A 的第二行的 1 倍加到第一行得到矩阵 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到

第二列得到矩阵 C , 若记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 _____.

(A) $C = P^{-1}AP$

(B) $C = PAP^{-1}$

(C) $C = P^TAP$

(D) $C = PAP^T$

【答案】 B.

【解析】 将 A 的第二行的 1 倍加到第一行得到矩阵 B , 则 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = PA$, 将 B 的第一

列的 -1 倍加到第二列得到矩阵 C , 则 $C = B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAP^{-1}$. 故选 B.

3. 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\alpha_i =$

$[a_i, b_i, c_i]^T, i=1, 2, 3$, 则 _____.

(A) α_1 可由 α_2, α_3 线性表示

(B) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示

(C) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

【答案】 C.

【解析】 L_1 与 L_2 交于一点, 则 α_1 与 α_2 不平行, 确定一张平面, 且 L_1 在此平面上, L_2 为过点 (a_3, b_3, c_3) 平行于 α_2 的直线, 所以 L_2 也在此平面上, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相



关,则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示. 故选 C.

4. 设矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 经过初等行变换变为矩阵 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则_____.

- (A) β_4 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示
(B) β_4 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但表示不唯一
(C) β_4 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且表示唯一
(D) β_4 能否由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示不能确定

【答案】 C.

【解析】 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 经过初等行变换变为矩阵 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 有相同的线性相关性, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关, β_4 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且表示唯一. 故选 C.

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$, 则方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 表示的曲面为_____.

- (A) 椭球面 (B) 双叶双曲面
(C) 单叶双曲面 (D) 柱面

【答案】 A.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $|\lambda E - A| = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$, 则矩阵 A 的特征值全大于

0, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 2$ 表示椭球面. 故选 A.

二、填空题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 且满足 $BA = B + E$, 则 $|B| =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $BA = B + E, B(A - E) = E, B = (A - E)^{-1}, |B| = |(A - E)^{-1}| = \frac{1}{|A - E|} = \frac{1}{2}$.

2. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与锥面 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的交线在 xoy 坐标面上的投影方程为_____.

【答案】 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2 \\ z = 0 \end{cases}$.

【解析】 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$, 在 xoy 坐标面上的投影方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2 \\ z = 0 \end{cases}$.

3. 已知 A 为 n 阶非零方阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^2 - 2A = 0$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{8}(4E-A).$

【解析】 $(A+2E)(A-4E)=A^2-2A-8E=-8E$, 则 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{8}(4E-A).$

4. 向量 $\alpha_1=(1,1,1)^T, \alpha_2=(-1,1,1)^T$ 的 Schmidt 正交向量组是 $\beta_1=(1,1,1)^T, \beta_2=$ _____.

【答案】 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^T.$

【解析】 $\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\alpha_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

5. 设 α, β 为单位向量, 且内积 $[\alpha, \beta]=\frac{1}{2}$, 则 $\|\alpha-\beta\|=$ _____.

【答案】 1.

【解析】 $\|\alpha-\beta\|=\sqrt{[\alpha-\beta, \alpha-\beta]}=\sqrt{\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2[\alpha, \beta]}=1.$

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 且 $A^3=0$, 则 $a=$ _____.

【答案】 0.

【解析】 由 $A^3=0$, 则 $|A|=0$, $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3=0$, 所以 $a=0$.

7. 设 3 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, B^* 为 B 的伴随矩阵, 则行列式

$\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^T B^*\right|=$ _____.

【答案】 -27.

【解析】 由 A 的特征值为 $1, 3, -2$, A 与 B 相似, 则 $|B|=|A|=-6$, 又由 $|B^*B|=||B|E|=|B|^3$, 而 $|B^*B|=|B^*||B|$, 所以 $|B^*|=|B|^2=36$, $|A^T|=|A|$, $\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^T B^*\right|=\frac{1}{2^3}|A||B^*|=-27.$

8. 设 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 _____.



【答案】 $k[2, -3, -1]^T, k \in \mathbb{R}$.

【解析】 由 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2$, 可知系数阵 A 的秩为 2, 基础解系中含有 $3-2$ 个解向量, 则 $[2, -3, -1]^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系, 则方程的通解为 $k[2, -3, -1]^T, k \in \mathbb{R}$.

9. 已知 α_1, α_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个基底, 若 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, 则基底 α_1, α_2 到基底 β_1, β_2 的过渡矩阵为_____.

【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

【解析】 由 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, 所以 $[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则基底 α_1, α_2 到基底 β_1, β_2 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 正定, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > \frac{5}{2}$.

【解析】 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ 正定, 则 $a > 0, \begin{bmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4a - 9 > 0, |A| = a(4a - 10) > 0$, 所以 $a > \frac{5}{2}$.

三、计算题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 计算 $|A|$ 和 $|A^{2022}|$.

【解答】 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -24 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$|A^{2022}| = (-24)^{2022} = 24^{2022} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

2. 求过点 $P_0(1, 0, -4)$ 且与直线 $\begin{cases} x-y+3z+1=0 \\ 2x-2y+z-3=0 \end{cases}$ 平行的直线方程.

【解答】 直线的方向向量为

$d = n_1 \times n_2 = \{5, 5, 0\}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



因此直线方程为

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{5} = \frac{z+4}{0},$$

$$\text{即 } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{0}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

3. 设线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 (a \neq b). \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 求 a, b 为何值时方程组有非零解.

(2) 求该方程组的一个基础解系及通解的向量形式.

【解答】 该方程组有非零解, 则 $|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0$

由 $a \neq b$, 则只有 $a = -2b$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当 $a = -2b$ 时, 系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

因此该方程组的一个基础解系为 $[1, 1, 1]^T$, 其通解为 $k[1, 1, 1]^T, k \in \mathbf{R}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

4. 设向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (3, 5, 3, 3)^T, \alpha_4 = (2, -1, 3, 4)^T, \alpha_5 = (5, 3, 6, 7)^T$$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩和一个极大无关组.

(2) 将其余向量用极大无关组线性表示.

【解答】 由题意可知,

$$A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$, 取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大无关组, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$



5. 设 A 为 3 阶方阵, $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, 已知 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = 2\alpha_2$,

$A\alpha_3 = 3\alpha_3$, 令 $A^{10} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, 求 b_{22} 的值.

【解答】 由 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = 2\alpha_2$, $A\alpha_3 = 3\alpha_3$, 则矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为相应的特征向量 2 分

令矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$, 因此 $A = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$, 则

$A^{10} = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2^{10} & \\ & & 3^{10} \end{bmatrix} P^{-1}$ 3 分

由 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 因此

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2^{10} & \\ & & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{10}-1 & 3^{10}-2^{10} \\ 0 & 2^{10} & 3^{10}-2^{10} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

因此 $b_{22} = 2^{10}$ 3 分

四、应用题 (每小题 10 分, 共 10 分)

已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 3, 2, -2, 且 $(0, 1, 0)^T, (\sqrt{3}, 0, 1)^T$ 分别是 A 的对应于特征值 3, 2 的特征向量.

(1) 求 A 的对应于特征值 -2 的特征向量.

(2) 求正交变换 $x = Py$, 使二次型 $f(x) = x^T Ax$ 化为正交标准形.

【解答】 (1) 设对应于特征值 -2 的特征向量为 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, 则由正交性

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3$$

解得该方程组的基础解系为 $p_3 = [1, 0, -\sqrt{3}]^T$, 因此取对应于特征值 -2 的特征向量为 $p_3 = [0, -\sqrt{3}]^T$:

(2) 令 $p_1 = [0, 1, 0]^T, p_2 = [\sqrt{3}, 0, 1]^T, p_3 = [1, 0, -\sqrt{3}]^T$,



因此正交阵为 $P = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{\|p_1\|} & \frac{p_2}{\|p_2\|} & \frac{p_3}{\|p_3\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 3 分

在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $3y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_3^2$ 2 分

五、证明题(每小题 5 分, 共 5 分)

设 x 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵. 求证矩阵 $E - xx^T$ 的秩为 $n-1$.

【证明方法 1】 设 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 则令 $xx^T = \begin{bmatrix} x_1^2 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & x_n^2 \end{bmatrix}$, 有

$$r(xx^T) \leq r(x) \leq 1$$

又 $\|x\| = 1$, 因此 $r(xx^T) = 1$, 且 xx^T 为实对称矩阵, 则 xx^T 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = 1 \quad \dots \dots \dots 3 \text{ 分}$$

又由 $E - xx^T$ 仍为实对称矩阵, 因此其特征值, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 1, \lambda_n = 0$, 因此 $E - xx^T =$

$$P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^{-1}, \text{ 即 } r(E - xx^T) = n-1. \quad \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

【证明方法 2】 有 $(E - xx^T)x = x - xx^Tx = 0, x \neq 0$ 因此该齐线性方程组有非零解, 即

$$r(E - xx^T) < n \quad \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

又记 $A = E - xx^T$, 则 $A + xx^T = E$, 因此

$$n = r(A + xx^T) \leq r(A) + r(xx^T) \leq r(A) + r(x) \leq r(A) + 1$$

$$\text{则 } r(A) \geq n-1, \text{ 即 } r(E - xx^T) = n-1. \quad \dots \dots \dots 3 \text{ 分}$$



2023 级学生期末试题答案及解析

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $AB=O, B \neq O$, 则必有 D.

(A) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ $AB=O \Rightarrow r(A)+r(B) \leq n, |B| \neq 0$

(C) $A=O$ $B \neq O \Rightarrow r(B) \geq 1$ (D) $|A|=0$

【答案】 D.

【解析】 选项 A, 矩阵乘法不满足交换律, 若 $AB=O$, 不一定有 $BA=O$; 选项 B, 矩阵 $B \neq O$, $|B| \neq 0$ 也可能 $|B|=0$; 选项 C, $A=O$ 也可能有 $A \neq O$; 选项 D, 假设 $|A| \neq 0$, 则矩阵 A 可逆, 于是有 $A^{-1}AB=A^{-1}O=O$, 即 $B=O$, 这与题设矛盾, 故 $|A|=0$.

2. 设有平面方程为 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. 若秩 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2$, 则一定

有平面 π_1 与 π_2 D.

(A) 平行

(B) 垂直

(C) 重合

(D) 相交

【答案】 D.

【解析】 因为秩 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2$, 所以法向量 $n_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ 和 $n_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ 线性无关,

于是两个法向量不平行, 所以平面 π_1 与 π_2 一定相交.

3. 对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的关系表述正确的是 C.

(A) 既相似又合同 $1, 1, 4$

(B) 相似, 但不合同

(C) 不相似, 但合同

(D) 既不相似, 也不合同

【答案】 C.

【解析】 因为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, 1, 4$, 而矩阵 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, 1, 2$, 所以两个矩阵不相似. 因为相似的矩阵具有相同的特征值, 而两个矩阵均为实对称矩阵, 具有相同的秩和正惯性指数, 故两个矩阵合同.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为 3 维列向量, 现有四个命题

①若 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

②若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示



③若 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

④若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

以上命题正确的是_____.

(A) ①②

(B) ③④

(C) ①④

(D) ②③

【答案】 C.

【解析】 ①若 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 否则有 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 这与 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关矛盾, 所以①正确; ②若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 β 可能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 也可能不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以②错误; ③若 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可能线性无关, 也可能线性相关, 所以③错误; ④若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以④正确, 故正确选项为 C.

5. 下列集合中构成向量空间的是_____.

(A) $V = \{[a, a, a, b] \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

(B) $V = \{[1, a, b, c] \mid \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(C) $V = \{[a, b, c] \mid a+b+c=1, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(D) $V = \{\text{所有长度为1的 } n \text{ 维向量}\}$

【答案】 A.

【解析】 由向量空间的定义可知选项 A 正确.

二、填空题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $A_{3j} (j=1, 2, 3)$ 是行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 中第 3 行元素的代数余子式, 则 $A_{31} + A_{32} - 2A_{33} =$ _____.

【答案】 -18.

【解析】 因为 $A_{31} + A_{32} + 4A_{33} = 0$, 故可知 $A_{31} + A_{32} - 2A_{33} = -6A_{33}$, 而 $A_{33} = 3$, 所以答案为 -18.

2. 过点 $P(1, 1, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} y+z-2=0 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$ 垂直的平面方程为_____.

【答案】 $x-y+z=1$.

【解析】 直线与平面垂直, 则有直线的方向向量和平面的法向量平行, 故可取平面的法向量为直线的方向向量, 直线的方向向量为 $d = \{0, 1, 1\} \times \{1, 2, 1\}$, 计算可得平面的法向量为 $n = \{-1, 1, -1\}$, 由平面的点法式可得平面方程为 $x-y+z=1$.

3. 曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线为_____.



【答案】 $x^2+2y^2=16, z=0$.

【解析】 曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的投影柱面为 $2x^2+y^2-16=x^2-y^2$, 所以投影曲线为 $\begin{cases} x^2+2y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$.

4. 设方阵 A 满足 $A^2+3A-5E=O$, 则 $(A+5E)^{-1} = \underline{-\frac{1}{5}(A-2E)}$.

【答案】 $-\frac{1}{5}(A-2E)$. (A+5E)(A-2E) = -5E

【解析】 由 $A^2+3A-5E=O$ 可知 $A^2+5A-2A-10E=-5E$, 所以有 $-\frac{1}{5}(A-2E)(A+5E)=E$, 所

以有 $A^{-1} = -\frac{1}{5}(A-2E)$.

5. 设 A, B 均为 3 阶方阵, 若秩 $(A)=2$, 秩 $(B)=3$, 则秩 $\begin{bmatrix} A^*B^* & BA \\ O & A \end{bmatrix} = \underline{\quad\quad}$.

【答案】 3.

【解析】 因为 3 阶矩阵 B 的秩 $r(B)=3$, 所以有 $r(B^*)=3$, 由 $r(A)=2$, 可知 $r(A^*)=1$. 所

以 $r\left(\begin{bmatrix} A^*B^* & BA \\ O & A \end{bmatrix}\right) = r(A^*B^*) + r(A) = r(A^*) + r(A) = 3$. 左乘右乘了 3 阶秩不足

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\quad\quad}$.

【答案】 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 22 & 61 & 43 \end{bmatrix}$. 初等矩阵

【解析】 由初等矩阵和初等变换的关系可知, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相当于对矩

阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 进行 10 次行初等变换和 1 次列初等变换, 行初等变换后的结果为

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 43 & 61 & 22 \end{bmatrix}$, 列初等变换的结果为 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 22 & 61 & 43 \end{bmatrix}$.

7. 设 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是 4×3 矩阵, 其中 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_2=2\alpha_3$, 若 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$, 则非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $\underline{\quad\quad}$.

【答案】 $k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, k \in \mathbf{R}$.



【解析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1$, 可知 $r(A) = 2$, 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解

系含有 1 个解向量, 且由 $\alpha_2 = 2\alpha_1$ 可知 $A[0 \ 1 \ -2]^T = 0$, 又因为 $\beta = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, 则方

程组 $AX = \beta$ 的通解为 $k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为_____.

【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

【解析】 因为

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

由过渡矩阵的定义可知, 由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

重根数 > 无关特征向量数

9. 设 2 阶方阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的两个线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 因为 2 阶方阵 A 有两个不同特征值, 所以 A 可以对角化, 且对于每一个特征值仅存在一个线性无关的特征向量, 而 α_1, α_2 是 A 的两个线性无关的特征向量, α_1, α_2 为属于不同特征值的特征向量, 不妨设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 所以有

$$A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

即

$$(\lambda_1^2 - 1)\alpha_1 + (\lambda_2^2 - 1)\alpha_2 = 0$$

又因为 α_1, α_2 线性无关, 则有 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ 或者 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 总之有

$$|A| = \lambda_1\lambda_2 = -1$$

10. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交矩阵, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列向量, 则 $2\alpha_1^T\alpha_1 + \alpha_2^T\alpha_3 =$ _____.

【答案】 2.



【解析】 因为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交矩阵, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为标准正交基, 故有 $\alpha_1^T \alpha_1 = 1$, $\alpha_2^T \alpha_3 = 0$, 所以有 $2\alpha_1^T \alpha_1 + \alpha_2^T \alpha_3 = 2$.

三、计算题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}.$$

【解答】
$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c+d)x^3$$

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $A^*BA = 2A^*B + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,

求矩阵 B .

【解答】 由 $A^*BA = 2A^*B + E$, 等式两侧左乘 A 得

$$|A|BA = 2|A|B + A$$

由 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$ 得

$$3BA = 6B + A$$

则

$$2B(A - 2E) = A$$

由 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 知 $A - 2E$ 可逆, 则



$$B = \frac{1}{3}A(A-2E)^{-1}$$

所以

$$B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + ax_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = b \end{cases}$ 有解, 且系数矩阵的秩为 2. 求 a, b 的值及该非

齐次线性方程组的通解.

【解答】 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & a & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & b+2 \\ 0 & 0 & a-3 & -5(a-3) & (b+2)(a-4)+3 \end{bmatrix}$

方程组有解, 则系数阵的秩与增广阵的秩相等所以 $a=3, b=1$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 4x_4 + 2 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 - 3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 = -2C_1 + 4C_2 + 2 \\ x_2 = C_1 - 5C_2 - 3 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}, \text{或者} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. 求向量组 $\alpha_1 = [3, 1, 2, 5]^T, \alpha_2 = [1, 1, 1, 2]^T, \alpha_3 = [2, 0, 1, 3]^T, \alpha_4 = [1, -1, 0, 1]^T, \alpha_5 = [4, 2, 3, 7]^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

【解答】 对 $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5]$ 构成的矩阵进行初等行变换得:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 2$. α_1, α_2 或 α_1, α_3 或 α_1, α_4 或 α_1, α_5 是一个极大无关组,

且 $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2$,

或者 $\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_5 = 2\alpha_1 - \alpha_3$,

或者 $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_4, \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_4, \alpha_5 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_4$,



或者 $\alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_4 = 3\alpha_1 - 2\alpha_3$.

5. 设 3 阶实对称矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 且满足 $\alpha_1 - 2\alpha_3 = [-3, 0, 6]^T$, 求 A 的特征值与 3 个线性无关的特征向量, 并求矩阵 A .

【解答】 由 $\alpha_1 - 2\alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$,

则 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, 因此 $\lambda_3 = -3$, 对应特征向量为 $\eta_3 = [1, 0, -2]^T$,

设属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的特征向量为 $[x_1, x_2, x_3]^T$,

由实对称阵知 $[1, 0, -2]^T$ 与 $[x_1, x_2, x_3]^T$ 正交, 即 $x_1 - 2x_3 = 0$,

则 $\eta_1 = [0, 1, 0]^T, \eta_2 = [2, 0, 1]^T$,

则存在可逆阵 $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, 使得 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

四、应用题 (10 分)

已知二次曲面方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$ 可以经过正交变换

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $y_2^2 + 4y_3^2 = 4$. 求参数 a, b 的值和正交矩阵 P .

【解答】 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $y_2^2 + 4y_3^2$, 因此特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

又由于 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + a = 6, |A| = -3(b-1) = 0$,

解得 $a = 3, b = 1$.

对特征值 $\lambda_1 = 0$, 可解得对应的特征向量 $p_1 = (1, 0, -1)^T$;

对特征值 $\lambda_2 = 1$, 可解得对应的特征向量 $p_2 = (-1, 0, 1)^T$;

对特征值 $\lambda_3 = 4$, 可解得对应的特征向量 $p_3 = (1, 2, 1)^T$.



将 p_1, p_2, p_3 单位化, 得到正交阵 $P = [p_1, p_2, p_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

五、证明题(5分)

设 A 为 n 阶正定矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 则秩($B^T A B$) = 秩(B).

证明 方法 1: 已知 A 为 n 阶正定矩阵, 则存在 n 阶可逆阵 P 使得 $A = P^T P$, 则

$$B^T A B = B^T P^T P B = (PB)^T (PB)$$

所以

$$\text{秩}(B^T A B) = \text{秩}(PB)^T (PB) = \text{秩}(PB)$$

由于矩阵 P 可逆, 所以

$$\text{秩}(B^T A B) = \text{秩}(B)$$

方法 2: 构造齐次线性方程组

$$BX = 0 \text{ 及 } B^T A B X = 0$$

若 $BX = 0$, 则 $B^T A B X = 0$. 若 $B^T A B X = 0$, 则 $X^T B^T A B X = 0$, 即 $(BX)^T A (BX) = 0$.

由矩阵 A 正定知, $BX = 0$.

若不然, 由正定定义, 若 $BX \neq 0$, 则 $(BX)^T A (BX) > 0$, 矛盾. 所以 $BX = 0$.

因此, 方程组 $BX = 0$ 及 $B^T A B X = 0$ 同解, 所以秩($B^T A B$) = 秩(B).

