第一章 函数与连续

一、选择题

20 级

1. 设数列 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n=2k+1 \\ \dfrac{1}{n}, & n=2k \end{cases}$，则__D__.

(A) 当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无穷大量　　(B) 当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无穷小量

(C) 数列 $\{x_n\}$ 有界　　(D) 数列 $\{x_n\}$ 无界

2. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 和 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则__A__.

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

19 级

1. 根据函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$__B__，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$.

(A) $\delta=\dfrac{1}{2}\varepsilon$　　(B) $\delta=\dfrac{1}{3}\varepsilon$　　(C) $\delta=\varepsilon$　　(D) $\delta=\dfrac{2}{3}\varepsilon$

2. 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则__A__.

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$　　(B) $a=1,b=1$

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-1,b=1$

18 级

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是__D__.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. 设 $\alpha_1 = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$，$\alpha_2 = \sqrt[3]{1 + x\sin^2 x} - 1$，$\alpha_3 = \sqrt{x}(\cos\sqrt{x} - 1)$，当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小按低阶到高阶的排序是___B______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$　　(C) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

4. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$ 等于___C_____.

(A) $\int_0^{\mathrm{e}} \ln(1+x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$

(C) $\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x}$　　(D) $\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{e}} \ln(1+x)\mathrm{d}x}$

17 级

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，数列 $\{y_n\}$ 满足 $|y_n| \le M(M>0, \forall n \in \mathbb{Z}^+)$，则下列说法正确的是___C______.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{M}{a}$

(C) 数列 $\{x_n y_n\}$ 有界　　(D) 以上三个都不对

2. 设

$$\alpha = \tan x(1 - \cos\sqrt[3]{x^2}),\ \beta = \sqrt{\sin x^2}\ln(1 + \sqrt[3]{x}),\ \gamma = (\mathrm{e}^{\arcsin x} - 1)(\sqrt[3]{1+x} - 1),$$

则当 $x \to 0$ 时，以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是____B_____.

(A) α,β,γ　　(B) β,γ,α　　(C) β,α,γ　　(D) γ,β,α

16 级

1. 下列命题中，正确的是____B____.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = A^2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = A^2$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义，且满足 $|f(x)| \le x^2$， $\forall x \in (-1,1)$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的____C____.

(A) 间断点　　(B) 连续而不可导的点

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$　　(D) 可导的点，但 $f'(0)\ne 0$

15 级

1．已知 a,b,c 是实数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an+c}{bn+c}=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bn^2-c}{cn^2-b}=3$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+c}{cn^2+a}$ 的值为___D___.

(A) 2　　(B) 3　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) 6

14 级

1．以下关于数列收敛的性质描述，正确的是__D____.

(A) 若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 有界，则 $\{a_nb_n\}$ 收敛

(B) 若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_nb_n\}$ 发散

(C) 若 $\{a_n\}$ 发散，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_nb_n\}$ 发散

(D) 若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 有界，则 $\{a_nb_n\}$ 有界

13 级

1．以下关于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的叙述，正确的是___C____.

(A) $x=1,\ x=2$ 都是第一类间断点

(B) $x=1,\ x=2$ 都是第二类间断点

(C) $x=1$ 是第一类间断点， $x=2$ 是第二类间断点

(D) $x=1$ 是第二类间断点， $x=2$ 是第一类间断点

2. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}=$____D____.

(A) 0　　(B) $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

3. 当 $x\to 0$ 时， $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+2t}\,\mathrm{d}t-x^2$ 是 x^4 的____C____.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　(D) 等价无穷小

12 级

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的___C___.

(A) 连续点　　(B) 可去间断点

(C) 第一类跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

2．设 $x_n \le z_n \le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ __C___.

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定等于零

(C) 不一定存在　　(D) 一定不存在

10 级

1. 当 $\boldsymbol{x\to 0^+}$ 时，与 $\sqrt{\boldsymbol{x}}$ 等价的无穷小量是（ B ）.

(A) $\mathbf{1-e^{\sqrt{x}}}$ (B) $\mathbf{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$ (C) $\mathbf{1-\cos\sqrt{x}}$ (D) $\mathbf{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}$

2. 设函数 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}}$ 有无穷间断点 $\boldsymbol{x=0}$、可去间断点 $\boldsymbol{x=1}$，则常数 $\boldsymbol{a,b}$ 的值为（ B ）.

(A) $\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=1}$ (B) $\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=e}$

(C) $\boldsymbol{a}$ 任意，$\boldsymbol{b=1}$ (D) $\boldsymbol{a}$ 任意，$\boldsymbol{b=e}$

09 级

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{2}\sin x\right)^{\frac{a}{x}}, & x>0\\ e^{x+1}, & x\le 0\end{cases}$ 为连续函数，则__A__。

(A) $a=2$ (B) $a=1$ (C) $a=0$ (D) $a=\dfrac{1}{2}$

2. 已知 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 ax^b 为等价无穷小，则__B__。

(A) $a=2,b=3$ (B) $a=\dfrac{1}{2},b=3$

(C) $a=1,b=3$ (D) $a=-2,b=2$

二、填空题

20 级

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a-b=$__5__.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的第一类可去间断点是 $x=$__-1__.

19 级

1. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\le 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点是__$x=0$__.

8. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=$__$\dfrac{3}{4}$__.

18 级

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 的值等于__2__.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x\text{-}1)}$ 有可去间断点 $x=1$，则 $a=$__e__.

17 级

1. 设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-(\dfrac{1}{x}-a)e^x\right]=1$，则常数 $a=$__2__.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$____0____.

9. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\frac{1^2}{n}}+\dfrac{1}{n+\frac{2^2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{n^2}{n}}\right)=$__$\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\arctan 1$_.

16 级

1. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+6}{1-x}=5$，则 a 的值为___-7_____.

2. 当 $x\to0$ 时，无穷小 $2\sin x-\sin 2x$ 与 x^m 等价，则 $m=$____3____.

15 级

1. 设极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{kx})^{4x+1}=e^2$，则 $k=$___4___.

14 级

1．若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan kx}{\ln(1+\frac{x}{8})}=4$，则 $k=$___$\dfrac{1}{2}$_____.

13 级

1. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$_____$e^{-1}$_____.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{x^2}, & x\neq0\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $k=$_____-12_____.

12 级

1. 当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$__-4___.

11 级

1. 极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 的值为__$e^{-\frac{1}{2}}$___。

10 级

1. 已知 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}a-e^{\frac{x}{x-1}}, & x\leq0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}}$ 为连续函数，则 $\boldsymbol{a=}$____1____.

09 级

1. 函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)\cos x}{\sin\pi x}$ 的可去间断点为 $x=$_____1____。

三、计算题

20 级

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^2}$.

解答: 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}}{2x}$ ....4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{2}$ ....2 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ ....2 分

19 级

1. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^t-1-t)^2\mathrm{d}t}{x\sin^4 x}$.

解答: 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1-x)^2}{5x^4}$ ....2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\mathrm{e}^x-1-x)(\mathrm{e}^x-1)}{20x^3}$ ....2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\mathrm{e}^x-1-x)x}{20x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{10x^2}$ ....2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{20x}=\dfrac{1}{20}.$ ....2 分

18 级

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

解答: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$ ....2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{x^2}}{2x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}}$ ....4 分

$=\dfrac{1}{2}.$ ....2 分

17 级

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\sin^4 x}$.

解答: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\sin^4 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{x^4}$$ ....2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{4x^3}$$ ....4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{4x^3}=\frac{1}{4}.$$ ....2 分

16 级

1. 计算极限. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解答: $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$$ ....3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$ ....3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$ ....2 分

15 级

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x\ln(1+x^2)}$.

解答: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x\ln(1+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$ ....4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sec^2 x}{6x}\text{ 或 }\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}.$$ ....4 分

14 级

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}-3x}{1-\cos x}$

解答: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}-3x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{\frac{1}{2}x^2}$ ....3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}+e^{-x}-3}{x}$ ....3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}4e^{2x}-e^{-x}=3$. ....2 分

13 级

1. （6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

解答：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$ …………..3 分

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}$ ……………..2 分

$=-\dfrac{4}{\pi^2}$ ……………..1 分

12 级

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x})$.

解答：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x-e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{-x}}{2}=\dfrac{3}{2}$.

4. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+py'+qy=\cos x$，其中 p 和 q 为常数，且 $y(0)=y'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$.

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{y'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{y''(x)}$

由 $y''+py'+qy=\cos x$ 得 $y''=\cos x-py'-qy$，由 $\cos x, py', qy$ 的连续性知 y 有二阶连续导数,从而 $y''(0)=\lim\limits_{x\to 0}y''(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-py'-qy)=1-0-0=1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{y''(x)}=2$.

11 级

1. 在 $(-2\pi,2\pi)$ 内讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点并分类。

解答：$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 在 $(-2\pi,2\pi)$ 内可能的间断点为 $x=-\pi,0,\pi$，

因为 $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$，

所以 $x=-\pi,\pi$ 为第二类无穷间断点；

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，所以$x=0$为第一类可去间断点。

3. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$。

解答：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$。

10 级

1. 计算极限$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}$.

解答：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

所以$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

09 级

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[\frac{1}{3}(2+\cos x)]}{\mathrm{e}^x-\sin x-1}$。

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[\frac{1}{3}(2+\cos x)]}{\mathrm{e}^x-\sin x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\frac{1}{3}(\cos x-1)]}{\mathrm{e}^x-\sin x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(\cos x-1)}{\mathrm{e}^x-\sin x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^2}{\mathrm{e}^x-\sin x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{3}x}{\mathrm{e}^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{3}}{\mathrm{e}^x+\sin x}=-\dfrac{1}{3}$。

四、证明

13 级

（3 分）用$\varepsilon-\delta$语言证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，限制$0<|x-1|<1$，即$0<x<2$，要使；

$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}=\dfrac{|x-1|}{3(2x+1)}\le\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$，……….2 分

只要$\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$，即$0<|x-1|<3\varepsilon$，取$\delta=\min(1,3\varepsilon)$，即可。 ……....1 分

12 级

1.（3 分） 用数列极限$\varepsilon-N$定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+n+1}=0$.

证明：$\left|\frac{n+4}{n^2+n+1}-0\right|=\frac{n+4}{n^2+n+1}<\frac{5n}{n^2}=\frac{5}{n}$

故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n+4}{n^2+n+1}-0\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n^2+n+1}=0$.

11 级

1.（4 分）用极限的"$\varepsilon-\delta$"语言证明：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$。

证明：不妨设 $|x-1|<1$，则此时有

$$\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|<\frac{|x-1|}{2}$$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

成立。故 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$。

10 级

3. 利用 $\boldsymbol{\varepsilon-N}$ 语言，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$.

证明： $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{5}{\varepsilon}],n>N,$

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{2n+3}{2(2n^2-1)}<\frac{2n+3}{2n^2-1}<\frac{2n+3n}{2n^2-n^2}=\frac{5}{n}<\varepsilon$$

09 级

3. 用极限的"$\varepsilon-N$"语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$。（3 分）

证明： $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，则当 $n>N$ 时……….1 分

$$|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})|=|\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)|$$

$$=|\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}|\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\frac{\pi}{2n}\le\frac{2}{n}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$。

第二章 导数

一、选择

17 级

3. 设周期为 2 的周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，即 $f(x+2)=f(x)$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2)-f(2-x)}{2x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4,f(4))$ 处切线斜率为__D__.

(A) -2　　(B) -4　　(C) 2　　(D) 4

16 级

3. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$A$ 是常数，α 是 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的含义是: __C__.

(A) $\Delta y\approx A\Delta x$　　(B) Δy 与 Δx 成比例

(C) $\Delta y=(A+\alpha)\Delta x$，$A$ 与 Δx 无关　　(D) $\Delta y=A\Delta x+\alpha$，$A$ 与 Δx 无关

15 级

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$\mathrm{d}y$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的微分，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=$__B__.

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) ∞

14 级

2．设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的_B_.

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 不能确定是连续点还是间断点

13 级

4. 设函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$__A__.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

12 级

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$__A__.

(A) $3f'(a)$　　(B) $2f'(a)$

(C) $f'(a)$　　(D) $\dfrac{1}{3}f'(a)$

09 级

3. 函数 $f(x)=x|x(x-1)|$不可导点的数目是__B__。

(A) 0　　　　(B) 1　　　　(C) 2　　　　(D) 3

二、填空

20 级

3. 由方程 $x=y^y$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y\Big|_{x=1}=$__1__$\mathrm{d}x$.

19 级

2. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$__$-1$__.

3. 由方程 $\ln\dfrac{x^2}{y}+xy^2=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y=$__$\dfrac{2y+xy^3}{x-2x^2y^2}\mathrm{d}x$__.

4. 若 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$，则 $f^{(27)}(\dfrac{\pi}{2})=$__0__.

18 级

3. 已知 $y=f\left(\dfrac{2}{x+2}\right)$，$f'(u)=\arctan u^2$，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$__$-\dfrac{\pi}{8}$__$\mathrm{d}x$.

4. 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$__$\dfrac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$__.

17 级

3. 由方程 $\cos(xy)+\ln y-2x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$__2__$\mathrm{d}x$.

16 级

3. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为__$y=\dfrac{1}{2}x+1$__.

4. 设 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ $(0<x<1)$，则 $\mathrm{d}y=$__$-\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$__.

5. 设 $f(x)=x^2\sin x$，则 $f^{(2017)}(0)=$__$-2017\cdot2016$ 或 -4066272;__.

15 级

2. 设函数 $f(x)=(x-a)g(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 点某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=3$，则 $f'(a)=$__3__.

3. 设 $\mathrm{e}^y-y\sin x=\mathrm{e}$，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$__$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$__$\mathrm{d}x$.

14 级

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a)-f(a-x)}{2x}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线斜率为$\boxed{2}$.

3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=\underline{\dfrac{1-\ln x}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

13 级

3. 设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\Lambda\ (x+n)$，则 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=0}=$______$n!\,\mathrm{d}x$______.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-f(1-\sin x)}{x}=$______6____.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^y+y=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______$-\mathrm{e}$______.

11 级

2. 已知 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 的值为____2______。

3. 设 $y=\ln(2+x)$，则 $y^{(4)}\big|_{x=0}=$________2________。

10 级

2. 已知函数 $\boldsymbol{y=x^{\frac{2}{x}}}$，则微分 $\mathbf{d}\,\boldsymbol{y}\,|_{x=1}=$___2___$\mathbf{d}\,\boldsymbol{x}$.

09 级

2. 已知函数 $f(x)=x^x+x$，则微分 $df(x)|_{x=1}$ 的值为___$\underline{2dx}$___。

三、计算

20 级

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_1^t u\ln u\,\mathrm{d}u\\ y=\displaystyle\int_1^{t^2} u^2\ln u\,\mathrm{d}u\end{cases}$ $(t>0)$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解答: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t^4\ln t^2\cdot(2t)}{t\ln t}=4t^4$, ...4 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})_t'}{x_t'}=\dfrac{16t^3}{t\ln t}=\dfrac{16t^2}{\ln t}$. ....4 分

19 级

2. 设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u\\ y=[f(t^2)]^2\end{cases}$ 所确定，函数 $f(x)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解答: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{2f(t^2)\cdot f'(t^2)\cdot 2t}{f(t^2)}=4tf'(t^2)$, ...4 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})_t'}{x_t'}=4\dfrac{f'(t^2)+2t^2f''(t^2)}{f(t^2)}$. ....4 分

18 级

2. 设曲线由参数方程$\begin{cases} x = t^2 + 3t + 5 \\ e^y t - y = 0 \end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$和$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解答：$x_t' = 2t + 3$，$y_t' = \dfrac{e^y}{1 - e^y t} = \dfrac{e^y}{1-y}$； ....2 分

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{(1 - e^y t)(2t+3)} = \dfrac{e^y}{(1-y)(2t+3)}$； ....2 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{e^y y_t'(2t+3)(1-y) - e^y[-y_t'(2t+3) + 2(1-y)]}{(2t+3)^3(1-y)^2}$； ....2 分

当$t = 0$时，$y = 0$，$y'\big|_{t=0} = 1$，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \dfrac{3 - (-3+2)}{27} = \dfrac{4}{27}$. ....2 分

17 级

2. 设曲线$y = y(x)$由参数方程$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解答：利用参数方程求导公式，有

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \dfrac{t}{2}$； ....4 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(\dfrac{dy}{dx})_t'}{x_t'} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \dfrac{1+t^2}{4t}$. ....4 分

15 级

2. 设函数$y = y(x)$由方程$e^{-y} + x(y - x) = 1 + x$所确定，求$y'(0)$与$y''(0)$.

解答：方程两边对x求导，得

$$e^{-y}(-\frac{dy}{dx}) + (y - x) + x(\frac{dy}{dx} - 1) = 1 \qquad (*)$$

由所给方程得$x = 0$时$y = 0$，所以$y'(0) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -1$. ....4 分

(*)式两边对x求导，得

$$e^{-y}(-\frac{dy}{dx})^2 - e^{-y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 1 + \frac{dy}{dx} - 1 + x\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

将$x = 0$，$y = 0$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -1$代入上式得

$$y''(0)=\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-3.\quad \text{...4 分}$$

15 级

2. 设参数方程 $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t^2-t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解答: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1-t^2)'=-2t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(t^2-t)'=2t-1$,

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2t-1}{-2t}=-1+\frac{1}{2t};\quad \text{...4 分}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{(-1+\frac{1}{2t})'}{-2t}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{-2t}=\frac{1}{4t^3}.\quad \text{..................................4 分}$$

14 级

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t+3\\ y=1-y\mathrm{e}^t\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解答：原方程组可化为 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t+3\\ y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}\end{cases}$，则 ....2 分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}}{\mathrm{e}^t}=-\frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^2},\quad \text{...............................2 分}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=-\frac{1}{4}\quad \text{...1 分}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_t'}{x_t'}=\frac{\frac{2\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^3}}{\mathrm{e}^t}=\frac{2}{(1+\mathrm{e}^t)^3},\quad \text{................................2 分}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{4}\quad \text{..1 分}$$

13 级

4. （7 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\displaystyle\int_0^t\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解答：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\frac{1}{(1+t^2)^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t(1+t^2)}$ …………..3 分

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_t'}{x_t'}=\frac{-\frac{1+3t^2}{2t^2(1+t^2)^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+3t^2}{4t^3(1+t^2)}\ \text{…………..3 分}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\frac{1}{2}$$ ……………..1 分

12 级

2. 已知$\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\dfrac{1}{3}t^3+t-2 \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解答：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t^2+1}{\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}=(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(2t)}{\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}=3t(t^2+1)$$

3. 已知方程 $\mathrm{e}^{x+y}-xy=1$ 确定了二阶可导函数 $y=y(x)$，求$y''(0)$.

解答：易知 $y(0)=0$，方程两边对 x 求导得， $(1+y')\mathrm{e}^{x+y}-y-xy'=0$

将 $x=0,y=0$ 代入解得 $y'(0)=-1$

对 $(1+y')\mathrm{e}^{x+y}-y-xy'=0$ 两边再对 x 求导得

$$(1+y')^2\mathrm{e}^{x+y}+y''\mathrm{e}^{x+y}-2y'-xy''=0,$$

以 $y(0)=0,y'(0)=-1$ 代入得 $y''(0)=-2$.

11 级

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$确定，其中常数 $a>0$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解答：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)_t'}{x_t'}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}。$$

10 级

2. 已知函数 $\boldsymbol{y=y(x)}$ 是由方程 $\mathbf{arctan}\,\boldsymbol{\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}}$ 确定的隐函数，求 $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}$.

解答：方程两边同时对 x 求导：$\dfrac{y-xy'}{x^2+y^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{x+y}$ ，即 $\dfrac{dy}{dx}=1-2\dfrac{x}{x+y}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\frac{x+y-x(1+y')}{(x+y)^2}=\frac{-2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$$

09 级

2. 设二阶可导的函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=g(x+y)$ 确定，其中函数 g 具有二阶导数，且其一阶导数不等于

1，求 $\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解答：方程两边同时对 x 求导： $y'=g'\cdot(1+y')$

故 $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{g'}{1-g'}$， ………4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{g''\cdot(1+y')(1-g')-g'(-g'')(1+y')}{(1-g')^2}=\frac{g''\cdot(1+y')}{(1-g')^2}$$

代入 $y'=\frac{g'}{1-g'}$， 整理得： $y''=\frac{g''}{(1-g')^3}$。

第 3 章 微分中值定理

一、选择

20 级

3. 设函数 $f(x)=(x^2-1)^3$，则___B___.

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 (B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 (D) $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值

4. 曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 对应于 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点处的曲率半径为___C___.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

19 级

3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(a-x)^2}=-1$，则___A___.

(A) 点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(B) 点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) 点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的驻点，但不是极值点

(D) 点 $x=a$ 不是 $f(x)$ 的驻点

18 级

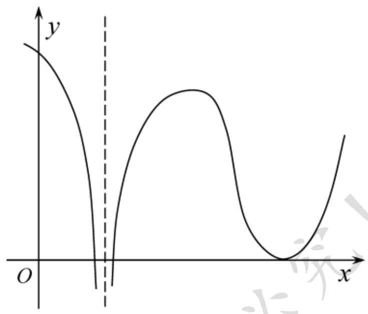
3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$___D___.

(A) 不可导 (B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

15 级

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则__B__.



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

12 级

4．已知方程 $x^4-4x=a$ 有两个不等实根，则当且仅当__D__.

(A) $a<0$　　(B) $a>0$

(C) $a<-3$　　(D) $a>-3$

11 级

4. 已知 $f''(x), g''(x)$ 存在且 $f(x_0)=g(x_0)=0, f'(x_0)g'(x_0)>0$，则__D__。

(A) $(x_0, f(x_0)g(x_0))$ 为 $f(x)g(x)$ 的拐点；

(B) 在 x_0 点 $f(x)g(x)$ 切线斜率大于 0；

(C) x_0 为 $f(x)g(x)$ 的极大值点；

(D) x_0 为 $f(x)g(x)$ 的极小值点。

5. 下列说法**错误**的是__D__。

(A) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续、非负且 $f(x)$ 至少有一点不为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(B) 如果函数 $f(x)$ 连续且为偶函数，则函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数；

(C) 如果函数 $f(x)\neq 0$ 且可导，则 $(\ln|f(x)|)'=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$；

(D) 如果 $f'(x)<0$， $f''(x)<0$，自变量增量 $\Delta x>0$，则在 x 点函数值增量 $\Delta y>\mathrm{d}y$。

10 级

3. 设 $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x+q}$，其中常数 $\boldsymbol{q\in(-2,2)}$，则 $\boldsymbol{f(x)}$ 的零点的个数为　（ C ）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

10 级

5. 下列说法正确的是　（ A ）.

(A) 已知数列 $\boldsymbol{\{x_n\}}$ 单调递增，非负函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 单调递减，则数列 $\boldsymbol{\{f(x_n)\}}$ 收敛

(B) 设函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 连续，且满足 $\boldsymbol{m\le f(x)\le M}$，其中 $\boldsymbol{m, M}$ 为常数，则

$$\boldsymbol{m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)}$$

(C) $\boldsymbol{\int e^x(1+e^x)^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\alpha}(e^x+1)^{1+\alpha}+C}$

(D) 设函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 连续，若 $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$ 是曲线 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 的拐点，则 $\boldsymbol{f(x_0)}$ 不是 $\boldsymbol{f(x)}$ 的极值

09 级

5. 下列说法正确的是__D__。

(A) 若函数 $f(x)$ 的导函数为奇函数，则 $f(x)$ 的原函数也是奇函数

(B) 若函数 $f(x)$ 连续且 $f'(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内单调增加

(C) 若函数 $f(x), g(x)$ 连续，且 $f(x)\ge g(x)$，则 $\int_0^x f(x)dx\ge\int_0^x g(x)dx$

(*D*) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 满足 $f'(x) > f(x)$ 且 $f(a)f(b) < 0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有惟一的零点

二、填空

20 级

4. 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 3 阶泰勒公式中 $(x-4)^2$ 的系数为____ $-\dfrac{1}{64}$ ____.

5. 函数 $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ 的单调递增区间是___ $[-1,1]$ _____.

6. 函数 $y = xe^{-x}$ 图形的拐点为___ $(2, 2e^{-2})$ _____.

19 级

5. 设 $f(x) = x^2 \cos 2x$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林展开式为___ $x^2 + o(x^3)$ ______.

6. 函数 $f(x) = (x+1)^2(x-2)$ 图形曲线的拐点为____ $(0,-2)$ ____.

7. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $x =$ __ $-\dfrac{b}{2a}$ ____点处的曲率最大.

18 级

5. 设函数 $f(x)$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林展开式为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

则 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林的展开式中，则 x^n 前的系数 $a_n =$ ___ $\dfrac{1}{(n-1)!}(n \geq 1)$ _____.

6. 曲线 $y = \dfrac{e^x}{x+3}$ 的凸区间为_____ $(-\infty, -3)$ _______.

7. 曲线 $y = 4x - x^2$ 在其顶点处的曲率为_____ 2 _____.

17 级

4. 设函数 $f(x)$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林的展开式为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

则函数 $f(x) = x^2 \ln(1+2x)$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林的展开式中，系数 $a_{10} =$ ___ -32 ______.

5. 函数 $f(x) = (x-3)e^x$ 的单调递增区间是_ $\underline{(2,+\infty)}$ $\underline{或}$ $\underline{[2,+\infty)}$ _.

6. 函数 $y = x + \sqrt{5}\ln(1+x^2)\,(x>0)$ 图形的拐点为____ $\underline{(1, \sqrt{5}\ln 2 + 1)}$ ____.

7. 曲线 $y = x^2(1-x)$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率半径为 $R =$ __$\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$____.

15 级

6. 函数 $\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处的 3 阶泰勒 Taylor 多项式 $P_3(x) =$ ____ $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$ ____.

15 级

4．函数 $f(x) = xe^x$ 带有皮亚诺型余项的 3 阶麦克劳林展式为 $f(x) =$ _ $x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$;_.

5. 抛物线 $y=4x-x^2$ 在其顶点处的曲率为___2_____.

14 级

4．函数 $f(x)=e^{\sin x}$ 的 n 阶麦克劳林公式中 x^3 的系数为___0____.

5. 已知点(1,3)是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $b-a=$____6____.

13 级

6. 设函数 $f(x)=e^{2x}$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的三阶麦克劳林公式为_____$\underline{e^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}$.

7. 曲线 $f(x)=xe^{-x}$ 的拐点为___$(2,2e^{-2})$____.

12 级

2. 曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+\ln x$ 的拐点是____$\underline{(1,\frac{1}{2})}$____.

4. 函数 $f(x)=x\arctan x$ 在点 $x=1$ 的 3 阶泰勒公式中，$(x-1)^2$ 前的系数为__$\underline{\frac{1}{4}}$____.

11 级

4. 设 $a>0$，当 $a=$_$\underline{e^{-1}}$__时，方程 $\ln x = ax$ 有唯一实根。

10 级

3. 函数 $\boldsymbol{y = xe^x}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 阶麦克劳林公式中，含 $\boldsymbol{x^n}$ 项的系数是__$\underline{\frac{1}{(n-1)!}}$___.

09 级

4. 函数 $f(x)=\frac{x}{2+x}$，则 $f^{(n)}(0)$ 的值为__$\underline{(-1)^{n+1}n!\,2^{-n}}$_，其中 n 为正整数。

三、计算

13 级

5. （7 分）求函数 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ 的单调区间、极值.

解答： $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ …………..1 分

所以减区间是 $(-2,-1)$，$(-1,0)$ …………..2 分

增区间为 $(0,+\infty)$，$(-\infty,-2)$，…………..2 分

极大值为 $f(-2)=-4$，极小值为 $f(0)=0$。…………..2 分

12 级

4. 求 $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$ 的单调区间和极值.

解答： $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(x^2+x-2)$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-2,1$，…………………….……………………………2 分

当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时， $f'(x)<0$，当 $-2<x<1$ 时， $f'(x)>0$，故单调递减区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递增区间为 $(-2,1)$；……………………..…………3 分

$f(-2)=-\mathrm{e}^2$ 为极小值， $f(1)=5\mathrm{e}^{-1}$ 为极大值. …………………………………3 分

11 级

3. 已知方程 $\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t=f(x)$ 确定了连续函数 $y=f(x)$，

（1）求 $f'(x)$ 和函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（2）求 $f''(x)$ 和函数 $y=f(x)$ 凹凸区间及拐点。

解答：（1）因为 $f(x)$ 连续，所以 $\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t$ 可导， $f'(x)=\mathrm{e}^{f^2(x)}>0$，故 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$。 ……………………………………………..……....2 分

（2） $f''(x)=2f(x)f'(x)\mathrm{e}^{f^2(x)}=2f(x)\mathrm{e}^{2f^2(x)}$。 ……………………..……....2 分

令 $f''(x)=0\Rightarrow f(x)=0$，因为 $f(x)\uparrow$，所以 $f(x)$ 与 x 一一对应，又由于 $f(0)=0$，所以 $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$（也可由 $\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow x=0$）。

所以 $x>0,\ f''(x)>0$， $x<0,\ f''(x)<0$，凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$，拐点为 $(0,0)$。 ………………………………………………...……....3 分

10 级

4. 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\int_0^{x^2}\mathbf{e}^{-t^2}\mathbf{d}t$，求

（1） $y=\Phi(x)$ 的单调区间； （2） $y=\Phi(x)$ 的凹凸区间.

解答： $\Phi'(x)=2xe^{-x^4}$； $\Phi''(x)=2e^{-x^4}(1-4x^4)$ ……4 分

令 $\Phi'(x)=0$，得驻点 $x=0$

令 $\Phi''(x)=0$，得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $\Phi'(x)<0$，函数单调减区间 $(-\infty,0]$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $\Phi'(x)>0$，函数单调减区间 $[0,+\infty)$；

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 时， $\Phi''(x)<0$，函数凸区间 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

当 $x\in(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 时， $\Phi''(x)>0$，函数凹区间 $x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$。 ……4 分

09 级

1. 设函数 $y=(x^2-3)^2$，计算 y' 及 y'' 并填写下表（写出计算过程）。

单增区间		凹区间	
单减区间		凸区间	
极值点		拐点	

解答： $y'=4x(x^2-3)$； $y''=12(x^2-1)$，

令 $y'=0$，得驻点 $x=0$ 以及 $x=\pm\sqrt{3}$， ………1 分

令 $y''=0$，得 $x=\pm 1$ ………1 分

当 $x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ 时， $y'>0$，函数单调递增，………1 分

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ 时， $y'<0$，函数单调递减，………1 分

故 $x=0$ 为函数的极大值点， $x=\sqrt{3}$ 及 $x=-\sqrt{3}$ 为函数的极小值点，………1 分
当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时， $y''>0$，函数图形为凹，………1 分
当 $x\in(-1,1)$ 时， $y''<0$，函数图形为凸，………1 分
故拐点为 $(1,4)$ 及 $(-1,4)$。………1 分
所填表格如下：

单增区间	$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$	凹区间	$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
单减区间	$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$	凸区间	$x\in(-1,1)$
极值点	极大值点: $x=0$ 极小值点: $x=\sqrt{3}$； $x=-\sqrt{3}$	拐点	$(1,4)$； $(-1,4)$

四、证明

20 级

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$， $f(1)=1$. 证明:

（1）存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=1-c$.

（2）存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证明: （1）设 $g(x)=f(x)+x$，显然 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 并且 $g(0)=0$， $g(1)=2$,故存在 $c\in(0,1)$，使得 $1=g(c)=f(c)+c$, 即 $f(c)=1-c$. ....2 分

（2）分别在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 应用拉格朗日中值定理，可得存在 $\xi\in(0,c)$ 和 $\eta\in(c,1)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c}{c},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-(1-c)}{1-c}=\frac{c}{1-c},$$

故存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$. ....4 分

19 级

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)$ 非负, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

证明: 做辅助函数 $F(x)=x\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(x)$ 在[0,1]上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并且 $F(0)=0,F(1)=0$，可知 $F(x)$ 在 [0,1] 上满足罗尔定理，于是存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即：$\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. ....6 分

18 级

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),$$

(1) 证明：存在$\eta\in(0,2)$，使$f(\eta)=f(0)$.

(2) 证明：存在$\xi\in(0,3)$，使$f''(\xi)=0$.

证明: (1) 设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\le x\le 2)$，则$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)$.

根据拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(0,2)$，使$F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$，即$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta)$. 由题设知$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$，故$f(\eta)=f(0)$. ....2 分

(2) $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$介于$f(x)$在$[2,3]$上的最大最小值之间，根据连续函数介值定理，存在$f(\zeta)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$. 由题设知$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，故$f(\zeta)=f(0)$. 由于$f(0)=f(\eta)=f(\zeta)$且$0<\eta<\zeta\le 3$，根据罗尔定理，存在$\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\zeta)$，使$f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$，从而存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得$f''(\xi)=0$. ......3 分

17 级

设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且满足$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，试证明在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证明：由于$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，则由积分中值定理$\exists\xi_1\in[0,\frac{1}{2}]$，使得

$$f(1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\xi_1 f(\xi_1)=0. \quad ....2 分$$

令$F(x)=xf(x)$，则$F(1)=f(1), F(\xi_1)=\xi_1 f(\xi_1)=f(1)$，对函数$F(x)$在$[\xi_1,1]$上应用罗尔定理，则$\exists\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$使得$F'(\xi)=0$，即$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，故结论成立. ....3 分

16 级

已知函数$f(x)$具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明：存在点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=0$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，故由罗尔定理知，至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，使 $f'(x_0)=0$. ....3 分

函数 $f'(x)$ 在 $[0,x_0]$ 连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，$f'(0)=f'(x_0)=0$，故由罗尔定理，至少存在点 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$ 使 $f''(\xi)=0$. ....2 分

15 级

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$F(x)=\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$，$F(1)=f(1)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

证明：对 $F(x)=\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$ 由拉格朗日中值定理可知 $\exists\eta\in(0,1)$，使得

$$F(1)=F(1)-F(0)=F'(\eta)=\eta^2 f(\eta)$$ ....2 分

设 $G(x)=x^2 f(x)$，显然 $G(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上可导，并且 $G(\eta)=G(1)$，故由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得

$$G'(\xi)=\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$$

整理即得 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$. ....3 分

14 级

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证明：构造辅助函数，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\le x\le\pi)$．其满足在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 上可导．$F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=F(\pi)=0$，由题设，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

即：$\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$.

令 $G(x)=\int_0^x F(t)\sin t\,\mathrm{d}t$，显然 $G(\pi)=G(0)=0$，对 $G(x)$ 应用罗尔定理，可知 存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $G'(\xi)=F(\xi)\sin\xi=0$，即 $F(\xi)=0$.

综上可知

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0,\ \xi\in(0,\pi).$$ ....3 分

在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，知存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0,$$

即在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. ....2 分

13 级

2.（5 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且

$$f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

试证：（1）至少存在一点$\eta\in(a,b)$使得$f(\eta)=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$；

（2）至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=0$.

证明:（1）设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，由拉格朗日中值定理知，$\exists\eta\in(a,b)$使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)\Rightarrow f(\eta)=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$ ……………3 分

（2）由于$f(a)=f(\eta)=f(b)$，故由罗尔定理知，$\exists\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

再由罗尔定理知，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使得$f''(\xi)=0$

……………..2 分

12 级

2.（4 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(1)=0$，

且$\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0$。

证明:（1）$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=0$；　　　（2）存在$\eta\in(0,1)$,使的$F(\eta)=0$；

（3）存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

（1）$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=0-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$；　……..…1 分

（2）令$G(x)=\int_0^x F(x)\mathrm{d}x$，则$G(0)=G(1)$，故由罗尔定理知，存在$\eta\in(0,1)$，使得$G'(\eta)=F(\eta)=0$；　……..……………………………………………………..…1 分

（3）因为$F(0)=F(\eta)=F(1)$，所以由罗尔定理知$\exists\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,1)$，使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.　……..………………………..…1 分

令$T(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，$T(\xi_1)=T(\xi_2)=0$，由罗尔定理知$\exists\xi\in(0,1)$，使得$T'(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)-\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$.　……..………………...…………1 分

11 级

（6 分）已知函数$f(x)$在$[0,1]$有二阶导数，且$f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1)=0$，证明：

（1）存在$\xi_1,\xi_2\in(0,1),\xi_1\neq\xi_2$，使得$f'(\xi_1)=f(\xi_1)$，$f'(\xi_2)=f(\xi_2)$；

（2）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=f(\eta)$。

证明:（1）设$F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$有二阶导数，且$F(0)=F(\frac{1}{2})=F(1)=0$，在$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$上分别由罗尔定理知$\exists\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$，$\exists\xi_2\in(\frac{1}{2},1)$使得

$$F'(\xi_1)=0，\ F'(\xi_2)=0。$$

$$即\ \mathrm{e}^{-\xi_1}f'(\xi_1)-\mathrm{e}^{-\xi_1}f(\xi_1)=0，\ \mathrm{e}^{-\xi_2}f'(\xi_2)-\mathrm{e}^{-\xi_2}f(\xi_2)=0。$$

所以存在$\xi_1,\xi_2\in(0,1),\ \xi_1<\xi_2$，使得$f'(\xi_1)=f(\xi_1)$，$f'(\xi_2)=f(\xi_2)$；

……………………...……....3 分

（2）令$G(x)=\mathrm{e}^{x}[f'(x)-f(x)]$，则$G(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上具有一阶导数且$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，由罗尔定理知存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$使得

$$G'(\eta)=0\ 即\ \mathrm{e}^{\eta}[f''(\eta)-f(\eta)]=0$$

所以存在$\eta \in (0,1)$，使得 $f''(\eta) = f(\eta)$。 ……………………………………....3 分

10 级

1. 当 $\boldsymbol{x > 0}$ 时，证明不等式：$\boldsymbol{e^x - x > 2 - \cos x}$.

证明：$f(x) = e^x - x - 2 + \cos x$， $f(0) = 0$；

$f'(x) = e^x - 1 - \sin x$， $f'(0) = 0$ ； ……2 分

$f''(x) = e^x - \cos x > 0$ ……2 分

所以 $f'(x) > f'(0) = 0$；$f(x) > f(0) = 0$。 ……1 分

2. 已知函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{[0,1]}$ 上有二阶导数，$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$， $\boldsymbol{f(0) = f(1) = 0}$.

（1）证明：存在 $\boldsymbol{\xi \in (0,1)}$，使得 $\boldsymbol{f(\xi) = 0}$；

（2）证明：存在 $\boldsymbol{\eta \in (0,1)}$，使得 $\boldsymbol{f''(\eta) = \dfrac{2\eta f'(\eta)}{1+\eta^2}}$.

证明：(1)令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$，则 $F(1) = F(0) = 0$，

由罗尔定理：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $F'(\xi) = f(\xi) = 0$。 ……1 分

(2) $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$，由罗尔定理：

存在 $\eta_1 \in (a,\xi), \eta_2 \in (\xi, b)$，使得 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$

令 $G(x) = \dfrac{f'(x)}{1+x^2}$， ……3 分

则 $G(\eta_1) = G(\eta_2) = 0$，由罗尔定理：存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0,1)$，使得 $G'(\eta) = 0$，

即 $f''(\eta)(1+\eta^2) - 2\eta f'(\eta) = 0$，即 $f''(\eta) = \dfrac{2\eta f'(\eta)}{(1+\eta^2)}$. ……1 分

09 级

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$，且 $f''(x) > 0$，证明： $f(x) \ge x$。（4 分）

证明： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，

由于 $f(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$，即 $f(0) = 0$。……….1 分

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$。……….1 分

情形 1：若 $x = 0$，则 $f(0) \ge 0$

情形 2：若 $x \ne 0$，则 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2} f''(\xi) x^2 \ge x$，其中 ξ 介于 $0, x$ 之间。……….2 分

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$， $f(1) + f(3) = 0$。证明：至少存在一点 $\xi \in (0,3)$，使 $f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$ 成立。（4 分）

证明：令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$，则 $F(1) = F(0) = 0$，

由罗尔定理：存在 $\xi_1 \in (0,1)$，使得 $F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0$。……….1 分

$f(1) + f(3) = 0 \Rightarrow f(1) \le 0, f(3) \ge 0$ 或者 $f(1) \ge 0, f(3) \le 0$，

因 $f(x)$ 连续，由连续函数零点定理：存在 $\xi_2 \in [1,3]$，使得 $f(\xi_2) = 0$。……….1 分

令 $G(x) = e^{2x} f(x)$，则 $G(\xi_1) = G(\xi_2) = 0$，……….1 分

由罗尔定理：存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$，使得 $G'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.……….1 分

第 4 章 不定积分

一、选择

19 级

4. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$ __A__.

(A) $2x\cos 2x - \sin 2x + C$　　(B) $2x\sin 2x - \cos 2x + C$

(C) $2x\sin 2x + \cos 2x + C$　　(D) $x\sin 2x - \cos 2x + C$

二、填空

20 级

7. 不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}} =$ __ $\sqrt{2x} - \ln(\sqrt{2x}+1) + C$ __.

18 级

8. 不定积分 $\int x^2(\mathrm{e}^{x^3} + \mathrm{e}^{-x^3})\mathrm{d}x =$ __ $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{x^3} - \mathrm{e}^{-x^3}) + C$ __.

17 级

8. 不定积分 $\int \mathrm{e}^x(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x =$ __ $\mathrm{e}^x - 2\sqrt{x} + C$ __.

16 级

7. 设 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = x^2 + C$，则 $f(x) =$ __ $\mathrm{e}^{2x} + C$ __.

15 级

6. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则积分 $\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}\,x =$ __ $-\frac{1}{2}x^2 + C$ __.

13 级

8. 若函数 $f(x)$ 连续，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则不定积分 $\int \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x =$ __ $-F\left(\frac{1}{x}\right) + C$ __.

三、计算

20 级

3. 计算不定积分 $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解答：原式 $= \int \ln\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)$ ....2 分

$$= \ln x \cdot \ln\ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \ln x \cdot \ln\ln x - \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$ ……………………………………………4 分

$$= \ln x \cdot \ln\ln x - \ln x + C$$

$$= \ln x(\ln\ln x - 1) + C.$$ ……………………………………………2 分

19 级

3. 计算不定积分$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \mathrm{d}x$.

解答: 令 $x = t^6$，$\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$，则 ……………………………………………2 分

原式$\displaystyle= \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)} \mathrm{d}t$ ……………………………………………2 分

$$= \int \frac{6t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= 6(t - \arctan t) + C$$ ……………………………………………3 分

$$= 6(x^{\frac{1}{6}} - \arctan x^{\frac{1}{6}}) + C.$$ ……………………………………………1 分

18 级 3. 计算不定积分$\displaystyle\int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$.

解答: $\displaystyle\int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$

$$= \int \ln(1+\mathrm{e}^x) \mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})$$ ……………………………………………2 分

$$= -\mathrm{e}^{-x} \ln(1+\mathrm{e}^x) + \int \frac{1+\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$$ ……………………………………………4 分

$$= x - (\mathrm{e}^{-x}+1)\ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$ ……………………………………………2 分

17 级

3. 计算不定积分$\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x$.

解答：令$\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，得$\begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=0\end{cases}$. 即

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$ ....3 分

因此$\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$ ....5 分

16 级

3. 计算不定积分$\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解答：$\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(1+x)\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$ ....4 分

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C.$$ ....4 分

15 级

3. 计算积分$\int x^2\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$.

解答：$\int x^2\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}(-x^3)$$ ....4 分

$$=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x^3}+C.$$ ....4 分

14 级

3. 计算积分$\int\ln^2 x\mathrm{d}x$.

解答：$\int\ln^2 x\mathrm{d}x$

$=x\ln^2 x-\int 2\ln x\mathrm{d}x$ ....3 分

$=x\ln^2 x-2(x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x)$ ....3 分

$=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)+C=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$ ....2 分

13 级

2.计算不定积分$\int\arctan\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解答：$\int \arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{1}{x} - \int x\mathrm{d}\arctan(\frac{1}{x})$ …………..3 分

$$= x\arctan\frac{1}{x} + \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$ ……………..2 分

$$= x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$ ……………..1 分

12 级

1. 计算不定积分 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$.

解答：$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{(x^2-1)^2-2}$$ ……………………………………………………3 分

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right| + C$$ …………………………………………….…3 分

11 级

1. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$。

解答：设 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$， ….…….….….….….….….……2 分

原式 $= \int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\cdot\sec t}\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$$ ………….…………….………….…………….……………4 分

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$ ……………………..….…..……………………………1 分

2. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

解答：令 $\mathrm{e}^x = t$，则

原式 $= \int \frac{\arctan t}{t^2}\mathrm{d}t$ ………………….……………….……………………2 分

$$= -\int \arctan t\,\mathrm{d}\frac{1}{t}$$

$$= -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$ ……………………….…………….……………...2 分

$$= -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{t}\arctan t + \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$ …………….………………….....2 分

$$= -\mathrm{e}^{-x}\arctan \mathrm{e}^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C$$ ……………………...…....1 分

10 级

1. 计算积分 $\int \boldsymbol{\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x}$.

解答：$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})$ ……2 分

$=2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C$ ……4 分

09 级

2. 计算积分$\int \dfrac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx$。

解答：$\int \dfrac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx \underline{x=\sin t} \int \dfrac{\sin^2 t}{(\cos t)^3}\cos t dt=\int \tan^2 t dt$ ………4 分

$=\int (\sec^2 t-1)dt=\tan t-t+C=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+C$。………3 分

3. 计算积分$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}dx$。

解答：$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}dx=\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}dx$………3 分

$=\int \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}d\,\mathrm{e}^x=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})+C$。………4 分

第 5 章 定积分

一、选择

20 级

5. 设有反常积分① $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ 和② $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$，则下列结论正确的是__A____.

(A) ①②都收敛　　(B) ①②都发散

(C) ①发散, ②收敛　　(D) ①收敛, ②发散

19 级

5. 设有广义积分① $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 和② $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$，则下列结论正确的是__D___.

(A) ①②都收敛　　(B) ①②都发散

(C) ①发散, ②收敛　　(D) ①收敛, ②发散

18 级

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\le g(x)$，则对任何 $c\in(0,1)$,有__D___.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_{c}^{1} f(t)\mathrm{d}t \ge \int_{c}^{1} g(t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_{c}^{1} f(t)\mathrm{d}t \le \int_{c}^{1} g(t)\mathrm{d}t$

17 级

4. 设积分 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则有___C_____.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_2<I_3<I_1$

5. 设有广义积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 和② $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$，则下列结论正确的是___C_____.

(A) ①②都收敛　　(B) ①②都发散

(C) ①收敛, ②发散　　(D) ①发散, ②收敛

16 级

4. 下列无穷积分发散的是____A____.

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(p>1)$

15 级

3. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(x)\le g(x)$，且对任何 $c\in(0,1)$，则有___C___.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(x)\mathrm{d}x\le\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_c^1 f(x)\mathrm{d}x\le\int_c^1 g(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_c^1 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_c^1 g(x)\mathrm{d}x$

4. 下列广义积分收敛的是___D____.

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

14 级

3. $\int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1+x^3}-\frac{x\cos x}{1+x^2})\mathrm{d}x=$____B_____.

(A) 0　　(B) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　(C) $\frac{8\sqrt{2}}{9}$　　(D) $\frac{4}{9}$

4．下列反常积分收敛的是____D_____.

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　(B) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$　　(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

13 级

5．设 $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则_____A______.

(A) $1>I_1>I_2$　　(B) $I_1>I_2>1$

(C) $1>I_2>I_1$　　(D) $I_2>I_1>1$

11 级

2. 下列广义积分**发散**的是___C____。

(A) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$　　(B) $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$　　(D) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

10 级

4. 下列广义积分收敛的是　　　（ D ）.

$(A)\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　$(B)\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}\mathrm{d}x$　$(C)\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　$(D)\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

09 级

4. 下列广义积分收敛的是 C 。

(A) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$　　(B) $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)}$

(C) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$　　(D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

二、填空

20 级

8. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$ $\frac{2}{\pi}$.

9. 设函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x=$ $\frac{4}{\pi}-1$.

19 级

9. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$ $2(1-2\mathrm{e}^{-1})$.

18 级

9. 定积分 $\int_{-5}^{5}\frac{x^{2018}\sin^{2019}x+2}{\sqrt{25-x^2}}\mathrm{d}x=$ 2π .

16 级

9. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\,(x>0)$ 的单调减少区间为 $(0,\frac{1}{4})$ 或 $(0,\frac{1}{4}]$; .

15 级

7. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+x^8\sin^9 x)\,\mathrm{d}x=$ 2 .

14 级

6. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$ $\frac{\pi}{4}$.

7．函数 $f(x)=\int_1^x (t-1)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ 的单调增加区间为____$\underline{(1,+\infty)}$ 或 $\underline{[1,+\infty)}$；______.

13 级

9. $\int_{-2}^{2}(1+\frac{x^3}{1+x\sin x})\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=$____ 2π ____.

12 级

3. 已知函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}f(x)|_{x=1}=$______$\underline{\frac{2}{\mathrm{e}}\mathrm{d}x}$______.

11 级

5. 定积分 $\int_0^{\pi}(\sin^3 2x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$ 的值为$\underline{\frac{3}{8}\pi}$____。

10 级

4. 已知定积分 $\int_1^2 (x+c)\cos^{2011}(x+c)\mathrm{d}x=0$ ，则常数 $c=$__ $\underline{-\frac{3}{2}}$ ___.

09 级

3. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3\sin^2 x+\cos^3 x\right)dx$ 的值为____$\underline{\frac{4}{3}}$____。

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$ 的值为____$\underline{\ln(1+\sqrt{2})}$___。

三、计算

20 级

4. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(\sin x^3+\cos x)\mathrm{d}x$.

解答：由于是 $\sin^2 x\cdot\sin x^3$ 奇函数，$\sin^2 x\cos x$ 是偶函数，于是

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin x^3\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$$ ....4 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{2}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$ ....4 分

5. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解答：设 $A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x+2A$，从而 ....2 分

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2A)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2Ax\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+2A$$ ....4 分

解得 $A=-\dfrac{1}{2}$，故 $f(x)=x-1$． ....2 分

19 级

4. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$．

解答：由于 $\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，$\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，于是

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$ ....4 分

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^1\mathrm{d}x-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4-\pi.$$ ....4 分

5. 设函数 $f(x)$ 连续且 $f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$．

解答：设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=B$，则 $f(x)=x^2-Bx+2A$，故

...............2 分

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2-Bx+2A)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{B}{2}+2A$$ ....2 分

$$B=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-Bx+2A)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}-2B+4A$$ ....2 分

于是有 $\begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\ B=\dfrac{4}{3}\end{cases}$，所以 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$． ....2 分

18 级

4. 计算反常积分 $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$．

解答：$I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$； ....2 分

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}(\sqrt{x-1}=t)$$

$$= 2\arctan t\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$ ……………………………………………………2 分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}\ (\sqrt{x-1}=t)$$

$$= 2\arctan t\,\Big|_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$$ ………………………………………2 分

所以 $I=\pi$. ……………………………………………………………………………2 分

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导数，$f'(\pi)=3$，且 $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\cos x\mathrm{d}x = 2$，求 $f'(0)$.

解答: $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\cos x\mathrm{d}x$

$$= \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}\sin x + \int_0^\pi \cos x\mathrm{d}f'(x)$$ ……………………………………………2 分

$$= \{[f(x)\sin x]\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x\} + \{[f'(x)\cos x]\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x\}$$

$$= -f'(\pi) - f'(0) = 2;$$ ……………………………………………………………4 分

故 $f'(0) = -2 - f'(\pi) = -2-3 = -5$. ……………………………………………2 分

17 级

4. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解答: $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 2\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$ ……………………………………………4 分

对积分 $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$，令 $x=\tan t$，$\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\mathrm{d}t = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此 $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}$ . ...4 分

5. 计算定积分 $I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

解答: 采用分部积分法:

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}$$ ....2 分

$$=2f(x)\sqrt{x}\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}f(x)$$ ....2 分

$$=2f(1)-0-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x)=\mathrm{e}^{-1}-1.$$ ....4 分

16 级

4. 计算定积分 $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$.

解答: 令 $\sqrt{1-x}=u$，则 $x=1-u^2$，$\mathrm{d}x=-2u\mathrm{d}u$ ....2 分

$$原式=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2u}{u-1}\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{u-1+1}{u-1}\mathrm{d}u$$ ....4 分

$$=1-2\ln 2.$$ ....2 分

15 级

4. 计算积分 $\int_1^4\cos(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$.

解答: 令 $\sqrt{x}-1=t$ 即 $x=(t+1)^2$，则 $\mathrm{d}x=2(t+1)\mathrm{d}t$， ....2 分

$$\int_0^4\cos(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1(t+1)\cos t\mathrm{d}t$$ ....2 分

$$=2\int_0^1(t+1)\mathrm{d}\sin t$$

$=2(t+1)\sin t\big|_0^1-2\int_0^1\sin t\mathrm{d}t$

$=4\sin 1+2\cos 1-2.$ ……………………………………………………………4 分

14 级

4. 计算积分$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$.

解答：令$t=\sqrt{2-x}$，则$t^2=2-x$，$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$，则 ………………………………2 分

原式$=\int_{\sqrt{3}}^{1}\frac{2-t^2}{t}(-2t)\mathrm{d}t$ ……………………………………………………………2 分

$=\int_{\sqrt{3}}^{1}(2t^2-4)\mathrm{d}t$ ……………………………………………………………2 分

$=\frac{2t^3}{3}-4t\Big|_{\sqrt{3}}^{1}=\frac{6\sqrt{3}-10}{3}.$ ……………………………………………………2 分

13 级

3. （6 分）计算反常积分$\int_0^{+\infty}\min(\mathrm{e}^{-x},\frac{1}{2})\mathrm{d}x$.

解答：原式$=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ …………..4 分

$=\frac{1}{2}\ln 2-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{e}^{-\ln 2}=\frac{1}{2}(\ln 2+1)$ …………..2 分

6. （7 分）已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0\end{cases}$，计算定积分$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解答：设 $u=x-1$，…………..1 分

当$x=0$时，$u=-1$；当$x=2$时，$u=1$，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\text{ …………..1 分}$$

$=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}+\ln(1+x)\Big|_0^1$ …………..4 分

$=\int_{-1}^{0}(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x})\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\ln 2=\ln(1+\mathrm{e})$ …………..2 分

12 级

2. 计算定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解答：令$u=\arcsin x$，则$x=\sin u$，$\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cos^2 u\mathrm{d}u$ ……………………………………………………………3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cos 2u\mathrm{d}u$

$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\mathrm{d}\sin 2u$

$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}(u\sin 2u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}(\cos 2u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$ ……………………………3 分

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求$a$的值.

解答：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2a}{x+a}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}\right]^{\frac{-2a}{x+a}x}=\mathrm{e}^{-2a}$，…………2 分

$\int_a^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\int_a^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x)=-\int_a^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}=-(x\mathrm{e}^{-2x})\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$=a\mathrm{e}^{-2a}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2a}$. ……………………………3 分

$a+\dfrac{1}{2}=1$，$a=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………1 分

11 级

3. 已知方程$\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t=f(x)$确定了连续函数$y=f(x)$，

（1）求$f'(x)$和函数$y=f(x)$的单调区间；

（2）求$f''(x)$和函数$y=f(x)$凹凸区间及拐点。

解答：（1）因为$f(x)$连续，所以$\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t$可导，$f'(x)=\mathrm{e}^{f^2(x)}>0$，故$y=f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$。 ………………………………………………….2 分

（2）$f''(x)=2f(x)f'(x)\mathrm{e}^{f^2(x)}=2f(x)\mathrm{e}^{2f^2(x)}$。 …………………………….2 分

令$f''(x)=0\Rightarrow f(x)=0$，因为$f(x)\uparrow$，所以$f(x)$与$x$一一对应，又由于$f(0)=0$，所以$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$（也可由$\int_0^x \mathrm{e}^{f^2(t)}\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow x=0$）。

所以$x>0,\ f''(x)>0$，$x<0,\ f''(x)<0$，凹区间为$(0,+\infty)$，凸区间为$(-\infty,0)$，拐点为$(0,0)$。 ……………………………………………………….3 分

4. 设$I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x$，其中$n$是正整数，

（1）计算I_n；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$。

解答：（1）$I_n=\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$ ………………..2 分

$=\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n-1+n[\sin(nx)\mathrm{e}^x\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x]$

$=\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n-n^2I_n$，……………………………………………….2 分

所以$I_n=\dfrac{1}{1+n^2}[\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n-1]$； ……………………………………………1 分

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n^2}[\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n-1]=0$。 ……………………………………….2 分

10 级

3. 已知函数$\boldsymbol{y=y(x)}$由参数方程$\begin{cases}x=t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\\ \int_0^y \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u=\int_1^t(1+u^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\end{cases}$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解答：$\int_0^y \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u=\int_1^t(1+u^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u$两边对$t$求导：

$e^{y^2}y_t' = (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}$，故 $y_t' = e^{-y^2}(1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}$ ……3 分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^{-y^2}(1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}}{(1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}} = e^{-y^2};$$ ……3 分

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{d(e^{-y^2})}{dx} = e^{-y^2}(-2y)\frac{dy}{dx} = -2ye^{-2y^2}。$$ ……2 分

4. 设 $\boldsymbol{\Phi(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt}$，求

（1）$\boldsymbol{y=\Phi(x)}$ 的单调区间；（2）$\boldsymbol{y=\Phi(x)}$ 的凹凸区间.

解答：$\Phi'(x) = 2xe^{-x^4}$；$\Phi''(x) = 2e^{-x^4}(1-4x^4)$ ……4 分

令 $\Phi'(x)=0$，得驻点 $x=0$

令 $\Phi''(x)=0$，得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\Phi'(x)<0$，函数单调减区间 $(-\infty,0]$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\Phi'(x)>0$，函数单调减区间 $[0,+\infty)$；

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 时，$\Phi''(x)<0$，函数凸区间 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

当 $x\in(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 时，$\Phi''(x)>0$，函数凹区间 $x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$。 ……4 分

3. 设 $\boldsymbol{f''(x)}$ 在 $\boldsymbol{[0,1]}$ 连续，且 $\boldsymbol{f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5,}$ 计算积分 $\boldsymbol{\int_0^1 x f''(2x)\mathrm{d}x}$.

解答：$\int_0^1 x f''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x) = \frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$ ……4 分

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$。 ……2 分

2. 计算积分 $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x}$.

解答：$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx \xlongequal{x=\sec t} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan t}{(\sec t)^4}\tan t\sec t dt$ ……2 分

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan t}{(\sec t)^4}\tan t\sec t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t d(\sin t) = \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$。 ……4 分

09 级

3. 设 $\begin{cases} x = \int_0^t e^{u^2}du \\ y = \int_0^{t^2} ue^u du \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{t^2e^{t^2}2t}{e^{t^2}} = 2t^3$； ………4 分

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})_t'}{x_t'} = \frac{6t^2}{e^{t^2}} = 6t^2e^{-t^2}。$$ ………4 分

4. 已知函数 $f(x) = \int_0^{1-x} e^{t(2-t)}dt$，求

（1） $f'(x)$；　　　（2）计算 $\int_0^1 f(x)dx$。

解答：(1) $f'(x) = -e^{1-x^2}$；………3 分

(2) $\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx$

$= \int_0^1 xe^{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$。………4 分

第 6 章　定积分的应用

一、选择

19 级

10. 曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 自 $x=0$ 到 $x=\frac{1}{2}$ 这一段的弧长为__ $\ln 3-\frac{1}{2}$ ______.

12 级

5. 设 $a>0$，心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围图形面积是___B___.

(A) πa^2　　　(B) $\frac{3}{2}\pi a^2$

(C) $2\pi a^2$　　　(D) $\frac{5}{2}\pi a^2$

二、填空

20 级

10. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ ($a>0$)的弧长为___ $8a$ _____.

18 级

10. 求极坐标系下曲线 $r=\sin\theta$ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)的弧长为____ $\frac{\pi}{2}$ ____.

17 级

10. 求极坐标系下曲线 $r=a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^3$ ($a>0$，$0\le\theta\le 3\pi$)的弧长为__ $\frac{3}{2}\pi a$ ______.

16 级

8. 曲线 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ 相应于区间 $[1,3]$ 上的一段弧的长度为____ $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$ ____.

15 级

8. 曲线 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 自 $t=0$ 至 $t=\pi$ 这一段弧的弧长为__ $\frac{1}{2}\pi^2$ __.

14 级

8. 曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(0\le x\le 1)$ 的弧长 $s=$ ___$\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$_______.

13 级

10. 对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 相应于 θ 从 0 到 π 的一段弧的长度为__$\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi}-1)$__.

12 级

5. 曲线 $y=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的弧长 $s=$ __$\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}$ 或 sh1 _.

10 级

5. 心形线 $\boldsymbol{r=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)}$ 的全长为___8____.

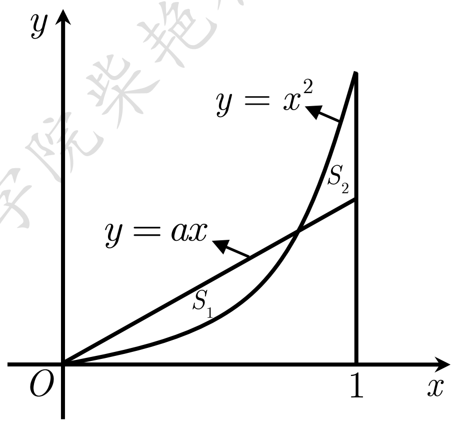
三、应用

20 级

如图所示，直线 $y=ax\,(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形为 S_1（其面积也记为 S_1），它们与 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2（其面积也记为 S_2）. 图形 S_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1，图形 S_2 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2.

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值;

（2）当 S_1+S_2 达到最小时，求 V_1+V_2.



解答: （1） 直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 交点为 $(0,0)$ 和 (a,a^2). ....1 分

$$S_1=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6},$$ ....1 分

$$S_2=\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1-a^3}{3}-\frac{a(1-a^2)}{2}=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6},$$ ....1 分

故 $S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$. 令 $S(a)=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$，则令 $S'(a)=-\frac{1}{2}+a^2=0$，可得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又

$S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$，故 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S_1+S_2 达到最小，并且最小值为

$$S_1+S_2=S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$ ....2 分

（2） 当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2-(x^2)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}x^2-x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\pi(\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{\sqrt{2}}{40})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi,$$

$$V_2=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1[(x^2)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1(x^4-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi[\frac{1}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{8})-\frac{1}{6}(1-\frac{\sqrt{2}}{4})]$$

$$=(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{2}}{60})\pi,$$

故 $V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi+(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{2}}{60})\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{30}\pi$. ....4 分

19 级

设 D 为曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x-2y-4=0$ 所围成的平面图形，求:

(1) D 的面积 S；

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V.

解答：曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x-2y-4=0$ 的交点为 $(2,1)$ 和 $(4,4)$. ....2 分

（1） $D=\int_2^4(\frac{3x-4}{2}-\frac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$； ....3 分

（2）$V=\pi\int_2^4[(\frac{3x-4}{2})^2-(\frac{1}{4}x^2)^2]\mathrm{d}x=\frac{8}{5}\pi$. ....4 分

18 级

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$y\geq 0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解答: 因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，所以 $c=0$，从而

$y=ax^2+bx$. ....2 分

抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为

$S=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$. ....2 分

令 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，得 $b=\frac{8-6a}{9}$. ....1 分

该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$$

$=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(\frac{8-6a}{9})^2+\frac{a}{2}(\frac{8-6a}{9})]$. ....3 分

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi[\frac{2a}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{6a-8}{81}+\frac{1}{18}(8-12a)]=0$，得 $a=-\frac{5}{3}$，于是 $b=2$.

...................2 分

17 级

设函数 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+cx$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$，试求:

(1) a 和 c 之间的关系式;

(2) 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0,x=1$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V；

(3) a 为何值时，该旋转体的体积 V 最小？最小值是多少?

解答: (1) 由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$，则

$$2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \ \frac{3}{2}ax^2+cx \ \ \mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{c}{2},$$

即 $a+c=4$. ....2 分

(2) $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$，故旋转体的体积为:

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}\ \ a^2+10a+160 \ \ . \qquad \text{..............................4 分}$$

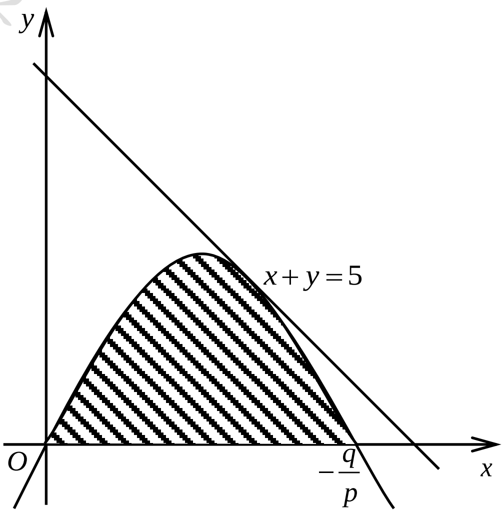
(3) 令 $V'(a)=\dfrac{\pi}{30}\ \ 2a+10\ \ =0$，得 $a=-5$，由于 V 为 a 的二次多项式，有唯一的最小值点，因此 $a=-5$ 时 V 取得最小值，最小值为:

$$V\Big|_{\text{最小}}=\frac{\pi}{30}\ \ 25-50+160\ \ =\frac{9}{2}\pi. \qquad \text{................................4 分}$$

16 级

已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S. 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？求出此最大值.

解答: 依题意知，抛物线如图所示，求得它与 x 轴的交点横坐标为 $x_1=0$，$x_2=-\dfrac{q}{p}$，故此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为



$$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\mathrm{d}x=\frac{q^3}{6p^2}. \qquad \text{.......4 分}$$

因直线与抛物线相切，故它们有唯一公共点. 由方程组

$$\begin{cases} x+y=5, \\ y=px^2+qx, \end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$，其判别式必等于零，因而有 $p=-\dfrac{1}{20}(1+q)^2$. ……....2 分

从而得 $S(q)=\dfrac{200q^3}{2(q+1)^2}$，令 $S'(q)=\dfrac{200q^3(3-q)}{3(q+1)^2}=0$ 得驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$; 当 $q>3$ 时，

$S'(q)<0.$ 于是当 $q=3$ 时，$S(q)$ 取得极大值，即最大值．此时 $p=-\dfrac{4}{5}$，从而最大值为 $S=\dfrac{225}{32}.$ ……………………………………………4 分

15 级

设 D_1 是抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积 V_2；

（2）问 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

解答：（1）$V_1=\pi\int_a^2(2x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$； ……………………………………………3 分

$$V_2=\int_0^a 2\pi x\cdot 2x^2\mathrm{d}x=\pi a^4 \text{ 或 } D_2=\int_0^{2a^2}\pi[a^2-(\sqrt{\frac{y}{2}})^2]\mathrm{d}y=\pi a^4.$$ …………3 分

（2）设 $V_1+V_2=V(a)$，则 $V(a)=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$

令 $V'(a)=-4\pi a^4+4\pi a^3=0$ 得唯一合理驻点 $a=1$， ……………………………2 分

由问题的实际意义知 V_1+V_2 得最大值一定存在，故当 $a=1$ 时，V_1+V_2 取最大值，最大值为 $V(1)=\dfrac{129\pi}{5}.$ ……………………………………………………………………2 分

14 级

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于 A 点，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形.

(1) 求该平面图形的面积 S;

(2) 当 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最大？并求最大体积.

解答：(1) 由 $\begin{cases} y=ax^2(a>0,x\ge 0) \\ y=1-x^2 \end{cases}$ 可得 A 点的坐标为 $(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}},\dfrac{a}{a+1})$，所以直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}x$， ……………………………………………………………………2 分

$$S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left(\frac{a}{\sqrt{a+1}}x-ax^2\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2\sqrt{a+1}}x^2-\frac{1}{3}ax^3\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{a}{6(a+1)^{\frac{3}{2}}}$$

……………………………………………3 分

(2) $V(a)=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left[\left(\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}x\right)^2-(ax^2)^2\right]\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi a^2}{15(a+1)^{\frac{5}{2}}}$ ………………………………2 分

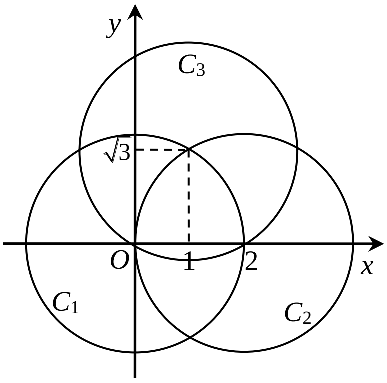
令 $V'(a)=\dfrac{4a-a^2}{15(a+1)^5}=0$ 得唯一符合条件的驻点 $a=4$，又有 $a<4$ 时，$V'(a)>0$，$a>4$ 时，$V'(a)<0$，所以当 $a=4$ 时，该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最大，最大体积为 $V(4)=\dfrac{32\pi}{3\cdot 5^{\frac{7}{2}}}$. ……………………………………………………………3 分

13 级

如图， 设三条曲线为 $C_1: x^2+y^2=4;$ $C_2: (x-2)^2+y^2=4;$ $C_3: (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，试求：

（1）由 C_1,C_2,C_3 所围公共部分图形的面积；

（2）由 C_1,C_2 所围公共部分图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.



解答：（1） $S=S_\Delta+3S_{弓}$，用极坐标， $(x-2)^2+y^2=4$ 即 $r=4\cos\theta.$

$S_{弓}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}.$…………..2 分

所以 $S=S_\Delta+3S_{弓}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}+3(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3})=2(\pi-\sqrt{3}).$…………..2 分

（2）设由 C_1,C_2 所围公共部分图形的边界曲线方程分别为 $x_1=\sqrt{4-y^2}$， $x_2=2-\sqrt{4-y^2}$，则由微元法有

$$\mathrm{d}V=\pi(x_1^2-x_2^2)\mathrm{d}y=\pi[4-y^2-(2-\sqrt{4-y^2})^2]\mathrm{d}y=4\pi(\sqrt{4-y^2}-1)\mathrm{d}y$$

…………..2 分

$$V=4\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(\sqrt{4-y^2}-1)\mathrm{d}y=8\pi\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{4-y^2}-1)\mathrm{d}y=\frac{16}{3}\pi^2-4\sqrt{3}\pi$$

…………..2 分

12 级

设平面图形 D 由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x+y=2$ 所围成，

求：（1）D 的面积 S；（2） D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V .

解答：由 $\begin{cases}y=x^2\\x+y=2\end{cases}$ 得交点为 $(-2,4)$ 和 $(1,1)$

（1） $S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x$ ……………………………………………….…………1 分

$=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$ ……….…………………………………...…2 分

（2） $V=\pi\int_{-2}^{1}[(2-x)^2-x^4]\mathrm{d}x$ ……….…………………………………........…2 分

$=\pi\int_{-2}^{1}(4-4x+x^2-x^4)\mathrm{d}x$

$=\pi\left(4x-2x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{72}{5}\pi$ ……….………….………………...…2 分

11 级

设曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与直线 $y=1$ 和直线 $x=1$ 所围的平面图形为 S，

（1）求 S 的面积；

（2）求 S 绕 x 轴所形成的旋转体体积；

（3）求 S 绕直线 $x=1$ 轴所形成的旋转体体积。

解答：（1）S 的面积为 $A=\int_0^1(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$； ....……………………….2 分

（2）S 绕 x 轴所形成的旋转体体积

$V_1=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^{2x}-1)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-3)$； ……………….………………3 分

（3）由微元法 $dV_2=\pi(1-x)^2\mathrm{d}y$，所以 S 绕直线 $x=1$ 轴所形成的旋转体体积为

$V_2=\int_1^{\mathrm{e}}\pi(1-x)^2\mathrm{d}y$，令 $y=\mathrm{e}^x$ ……………………………………2 分

$=\int_0^1\pi(1-x)^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\pi(2\mathrm{e}-5)$。 ……………………………………1 分

另解：$V_2=\int_0^1 2\pi(1-x)(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x$

$=\pi(2\mathrm{e}-5)$

10 级

已知抛物线 $\boldsymbol{y=2-x^2}$、直线 $\boldsymbol{y=x}$ 以及 $\boldsymbol{y}$ 轴在第一象限围成了平面图形 $\boldsymbol{D}$，求

（1）$\boldsymbol{D}$ 的面积； （2）$\boldsymbol{D}$ 绕 $\boldsymbol{y}$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解答：(1) $S=\int_0^1(2-x^2-x)dx=\dfrac{7}{6}$； ……3 分

(2) 方法 1：$V=\int_0^1 2\pi x(2-x^2-x)dx=\dfrac{5}{6}\pi$； ……4 分

方法 2：$V=\int_0^1\pi y^2dy+\int_1^2\pi(2-y)dy=\dfrac{5}{6}\pi$。 ……4 分

09 级

已知直线 $y=x$ 与抛物线 $y=\sqrt{x}$ 围成一平面图形。求

（1）此平面图形的面积；（2 分）

（2）此平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积；（3 分）

（3）此平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的表面积。（2 分）

解答：(1) $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\dfrac{1}{6}$； ……….2 分

(2) $V=\int_0^1\pi((\sqrt{x})^2-x^2)dx=\dfrac{1}{6}\pi$； ……….3 分

(3) $S=\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+(\sqrt{x})'^2}dx+\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+(x)'^2}dx$

$=\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}dx+\int_0^1 2\pi x\sqrt{2}dx=\int_0^1\pi\sqrt{1+4x}dx+\pi\sqrt{2}$

$=\dfrac{1}{4}\int_0^1\pi\sqrt{1+4x}d(1+4x)+\pi\sqrt{2}=\dfrac{1}{6}\pi(5^{\frac{3}{2}}-1)+\pi\sqrt{2}$。 ………2 分