

# 2017级微积分A(上)试题

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

(2017-2018 年 第一 学期)

课程名称: 微积分 A (一) (A 卷)

## 一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 数列  $\{y_n\}$  满足  $|y_n| \leq M (M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+)$ , 则下列说法正确的是\_\_\_\_\_.

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = a$

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{M}{a}$

(C) 数列  $\{x_n y_n\}$  有界

(D) 以上三个都不对

2. 设

$$\alpha = \tan x(1 - \cos \sqrt[3]{x^2}), \quad \beta = \sqrt{\sin x^2} \ln(1 + \sqrt[3]{x}),$$

$$\gamma = (e^{\arcsin x} - 1)(\sqrt[3]{1+x} - 1),$$

则当  $x \rightarrow 0$  时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是\_\_\_\_\_.

- (A)  $\alpha, \beta, \gamma$       (B)  $\beta, \gamma, \alpha$       (C)  $\beta, \alpha, \gamma$       (D)  $\gamma, \beta, \alpha$

3. 设周期为 2 的周期函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-x)}{2x} = 2, \text{ 则曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (4, f(4))$$

处切线斜率为\_\_\_\_\_.

(A)  $-2$

(B)  $-4$

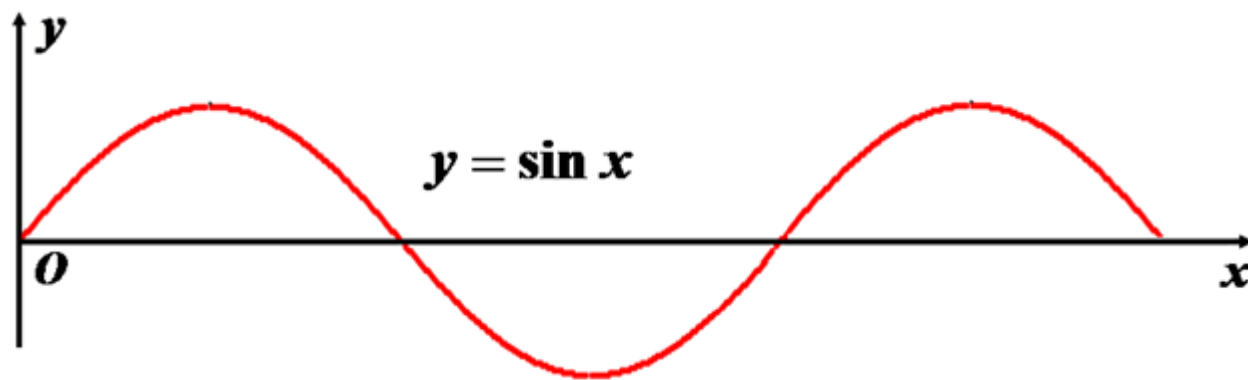
(C)  $2$

(D)  $4$

4. 设积分  $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$  ( $k = 1, 2, 3$ ), 则有\_\_\_\_\_.

(A)  $I_1 < I_2 < I_3$       (B)  $I_3 < I_2 < I_1$

(C)  $I_2 < I_1 < I_3$       (D)  $I_2 < I_3 < I_1$



$$I_1 = \int_0^{\pi} > 0, \quad I_2 = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} < 0,$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} + \left( \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} \right) > \int_0^{\pi} = I_1$$

5. 设有广义积分 ①  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$  和 ②  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ ,

则下列结论正确的是\_\_\_\_\_.

(A) ①②都收敛

(B) ①②都发散

(C) ①收敛, ②发散

(D) ①发散, ②收敛

## 二、填空题(每小题3分, 共30分)

1. 设极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$ , 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.

2. 函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的第

一类间断点是  $x =$ \_\_\_\_\_.



3. 由方程  $\cos(xy) + \ln y - 2x = 1$  确定的函数  $y = y(x)$  的微分  $dy\Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}} dx$ .

4. 函数  $f(x) = x^2 \ln(1 + 2x)$  的带皮亚诺余项的  $n$  阶麦克劳林的展开式中,  $x^{10}$  的系数  $a_{10} =$ \_\_\_\_\_.

5. 函数  $f(x) = (x - 3)e^x$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

6. 函数  $y = x + \sqrt{5} \ln(1 + x^2) (x > 0)$  图形的拐点为\_\_\_\_\_.

7. 曲线  $y = x^2(1 - x)$  在点  $(1, 0)$  处的曲率半径为

$$R = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 不定积分  $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1^2}{n}} + \frac{1}{n + \frac{2^2}{n}} + \dots + \frac{1}{n + \frac{n^2}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 求极坐标系下曲线  $r = a \left( \sin \frac{\theta}{3} \right)^3$  ( $a > 0, 0 \leq \theta \leq 3\pi$ )

的弧长为\_\_\_\_\_.

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\theta}{3} + \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}} d\theta \\ &= a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4 \frac{\theta}{3}} d\theta = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta \\ &= 3a \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{3\pi}{2} a \end{aligned}$$



### 三、计算题(40分)

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{\sin^4 x}$ .

2. 设曲线  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$  所确定,

求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

3. 计算不定积分  $\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$ .

4. 计算定积分  $\int_{-1}^1 \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

5. 计算定积分  $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ , 其中  $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$ .

#### 四、应用题 (10分)

设函数  $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + cx$ , 且  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ , 试求:

- (1)  $a$  和  $c$  之间的关系式;
- (2) 曲线  $y = f(x)$  与直线  $x = 0, x = 1$  以及  $x$  轴所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ ;
- (3)  $a$  为何值时, 该旋转体的体积  $V$  最小? 最小值是多少?

解答







## 五、证明题(5分)

设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上可导, 且  $f(1) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$ ,

试证明在  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$  使得  $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ .

**证明**

