

## 哈尔滨工程大学本科生考试试卷

( 2021-2022 年 第一 学期)

2021-12-30

课程编号: 201912400201 课程名称: 工科数学分析 (一) (A 卷)

## 一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 以下关于函数  $y = x \cos x$  的命题正确的个数有 \_\_\_\_ 个.

- ① 该函数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内有界  
② 该函数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内无界  
③ 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 该函数是无穷大量  
④ 当  $x \rightarrow 0$  时, 该函数是无穷小量

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 设  $f(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导的充要条件为 \_\_\_\_.

- (A)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$  存在 (B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$  存在  
(C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$  存在 (D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$  存在

3. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有任意阶导数, 且有  $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ ,  $f^{(4)}(x_0) > 0$ , 则 \_\_\_\_.

- (A)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值  
(B)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值  
(C)  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点  
(D)  $f(x_0)$  不是  $f(x)$  的极值点,  $(x_0, f(x_0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

4. 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) \leq g(x)$ , 则对任何  $c \in (0, 1)$ , 有 \_\_\_\_.

(A)  $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$

(B)  $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$

(C)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

(D)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

5. 设有广义积分①  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$  和②  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ , 则下列结论正确的是 \_\_\_\_.

- (A) ①②都收敛 (B) ①②都发散  
(C) ①收敛, ②发散 (D) ①发散, ②收敛

## 二、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - x - 6} \right)^x$  的值等于 \_\_\_\_.2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $ab =$  \_\_\_\_.3. 函数  $y = \frac{x}{1 + x^2}$  在点  $x = 0$  处的微分  $dy|_{x=0} =$  \_\_\_\_.4. 设函数  $f(x)$  的带皮亚诺余项的  $n$  阶麦克劳林展开式为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

则函数  $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$  的带皮亚诺余项的  $n$  阶麦克劳林展开式中,  $x^{2021}$  的系数  $a_{2021} =$  \_\_\_\_.5. 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$  上各点处的曲率半径的最小值为 \_\_\_\_.6. 不定积分  $\int \ln x dx =$  \_\_\_\_.7. 定积分  $\int_0^1 x^n (1 - x)^n dx =$  \_\_\_\_.8. 极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) =$  \_\_\_\_.

9. 定积分  $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx =$ \_\_\_\_\_.

10. 曲线  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$  从  $x = 1$  到  $x = e$  的弧长为\_\_\_\_\_.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{1 - \cos x}$ .

2. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定，求  $y'(0)$  与  $y''(0)$ .

3. 计算不定积分  $\int x^2 \sqrt{1 + x^3} dx$ .

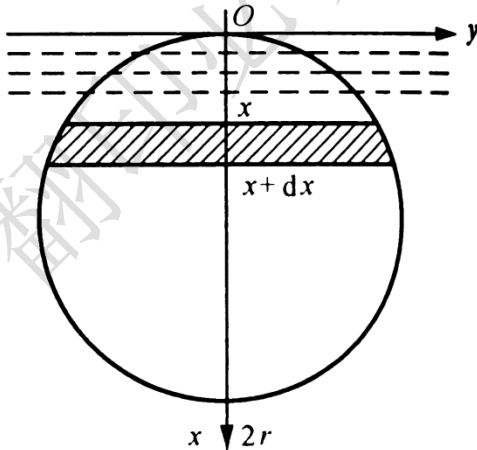
4. 计算定积分  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ .

四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 已知函数  $y = 1 + \frac{x}{(x + 3)^2}$ ，计算  $y'$  和  $y''$  并填写下表.

$y'$	
$y''$	
单调递增区间	
凹区间	
极值点	
拐点	
渐近线（需指明渐近线的类型）	

2. 如图所示，半径为  $r$ （单位:m）的球沉入水中，球的顶部与水面相切，球的密度与水相同，现将球从水中取出，使球的底部与水面相切，需作多少功（设水的密度为  $\rho$ ，重力加速度为  $g$ ）？



五、证明题（5 分）

证明：当  $x > 0$  时， $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ .