上节课重点总结：

1. 偏导数的几何意义

2、$z=f(x,y)$： $f_{xy}=f_{yx}$ 的条件

3. ① 可微 $\Leftrightarrow$ $\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y + o(\rho)$，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

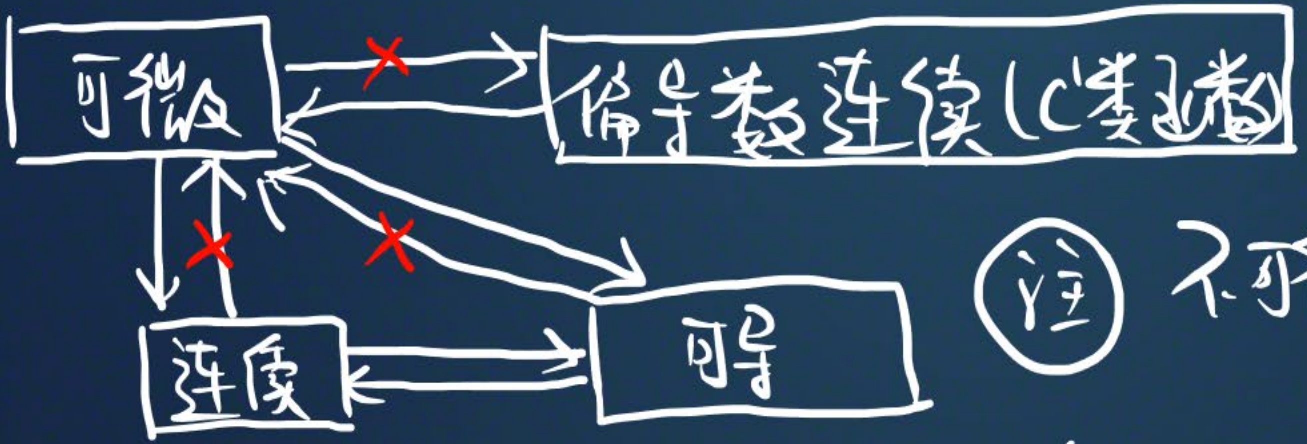
② 全微分 $dz = f_x \Delta x + f_y \Delta y$

③ 可微 $\Rightarrow$ 连续

可微 $\Rightarrow$ 可导

上次课总结:

1.



注 不可微 $\Rightarrow$ 偏导数不连续.

2. $z=f(x,y) \Rightarrow dz=f_x dx+f_y dy$

$u=f(x,y,z) \Rightarrow du=f_x dx+f_y dy+f_z dz$.

3. 外函数可微，内函数可导 $\Rightarrow$ 链式法则可用

{ 明变量，中间变量，因变量的关系图.

③ 分叉用加，分段用乘;

单路全导　叉路偏导

上节课总结：1. 7.4节：例13，练习1，2，3，4.

2. $F(x,y,z)=0$，$F(x,y,z)$可微 $\Rightarrow$

$$
\begin{cases}
F_x\neq 0 \Rightarrow \text{确定隐函数 } x=x(y,z):\ x_y=-\dfrac{F_y}{F_x},\ x_z=-\dfrac{F_z}{F_x} \\
F_y\neq 0 \Rightarrow \text{确定隐函数 } y=y(x,z):\ y_x=-\dfrac{F_x}{F_y},\ y_z=-\dfrac{F_z}{F_y} \\
F_z\neq 0 \Rightarrow \text{确定隐函数 } z=z(x,y):\ z_x=-\dfrac{F_x}{F_z},\ z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}
\end{cases}
$$

答疑：$\begin{cases} u=f(ux,\ v+y) \\ v=g(u-x,\ v^2y) \end{cases}$，$f,g\in C^1$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$

解：记 $p=ux$，$q=v+y$ $\quad s=u-x$，$t=v^2y$

$$F(x,y,u,v)=u-f(p,q) \quad G(x,y,u,v)=v-g(s,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-f_p\cdot x & -f_q \\ -g_s & 1-g_t\cdot 2vy \end{vmatrix}$$

$$=(1-xf_p)(1-2vy\,g_t)-f_q g_s$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -f_p\cdot u & -f_q \\ g_s & 1-g_t\cdot 2vy \end{vmatrix}=g_s f_q-uf_p(1-2vy\,g_t)$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - x f_p & -u f_p \\ -g_s & g_s \end{vmatrix} = g_s(1 - x f_p) - u g_s f_p$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{g_s f_q - u f_p(1 - 2vy g_t)}{(1 - x f_p)(1 - 2vy g_t) - f_q g_s}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{g_s(1 - x f_p) - u g_s f_p}{(1 - x f_p)(1 - 2vy g_t) - f_q g_s}$$

上节课总结：1、空间曲线：① 可微 ⇒ 切线存在

$$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \Rightarrow \text{切向量 } \vec{\tau}=\{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\}$$

$$\Gamma:\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \Rightarrow \text{切向量 } \vec{\tau}=\{1,\ y'(x),\ z'(x)\}$$

$$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{切向量 } \vec{\tau}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

⇒ 切线与法平面方程

2、空间曲面 注 可微 $\Rightarrow$ 切平面存在.

Σ: $F(x, y, z) = 0$ $\Rightarrow$ 法向量 $\vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\}$

Σ: $z = f(x, y)$ $\Rightarrow$ 法向量 $\vec{n} = \{-f_x, -f_y, 1\}$ (上).

或 $\vec{n} = \{f_x, f_y, -1\}$ (下).

$\Rightarrow$ 切平面与法线方程.

练习1：已知 $z=f(x,y)$ 的法线方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，其中 $f\in C^1$，$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______

A. $-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ B. $-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ C. $-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ D. $-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$

练习2：设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则（ ）

A. $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{3,1,1\}$

C. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

D. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$

上节课总结：1. 方向导数的定义：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z}{\rho}$

2. 函数可微分，求任意方向的方向导数：$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta$

3. 梯度（注：函数可微分 $\Rightarrow$ 梯度存在）

$z=f(x,y)$：　$\mathrm{grad} f=\{f_x, f_y\}$

$u=f(x,y,z)$：　$\mathrm{grad} f=\{f_x, f_y, f_z\}$

4. 方向导数的最大值（或沿梯度方向的方向导数）

$$\frac{\partial f}{\partial l}_{max}=|\mathrm{grad} f(x,y)|=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$$

$$\left(\text{or }=|\mathrm{grad} f(x,y,z)|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}\right)$$

例11 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$ 则（　　）

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

D. 根据条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

例5 设$u=2x^2+y^2+z^2$在点$P(1,1,1)$处沿梯度方向的方向导数为______

分析：

$$u_x(p) = 4x\big|_{x=1} = 4$$

$$u_y(p) = 2y\big|_{y=1} = 2$$

$$u_z(p) = 2z\big|_{z=1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \, \mathrm{grad}\, u(p)}\bigg|_p = |\mathrm{grad}\, u(p)| = \sqrt{u_x^2(p)+u_y^2(p)+u_z^2(p)}$$

$$= \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}$$

上节课总结：1. 求 $z=f(x,y)$ 的极值

① 求驻点 ② 求 $A=f_{xx}$ $B=f_{xy}$ $C=f_{yy}$ ③ 判别 $AC-B^2$ 的符号

2、求条件极值：① 建立目标函数 $f(x,y)$

$g(x,y)=k$

② $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \Rightarrow \begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=k \end{cases} \Rightarrow$ 极值点 (x,y)

注 一个限制条件：∇f 与 ∇g 共线

两个限制条件：∇f，∇g，∇h 共面

3. 若 $f(x,y) \in C(D)$，求 $f(x,y)$ 在 D 上的最值.

D为有界闭区域

① 在 D 内，求 f(驻点…)，f(不可导点…)

② 在 D 的边界上，求 $f(x,y)$

③ $M = \max\{f$(D 的边界)，f(D 内驻点)，f(D 内不可导点)$\}$

(or $m = \min$)

练习：根据二重积分的性质，比较 $\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D \ln^2(x+y)\,d\sigma$ 的大小，其中 D 为三角形闭区域，三角形的三个顶点分别为 (1, 0)，(1, 1)，(2, 0)。

练习2：利用二重积分的性质估计 $\iint\limits_D xy(1-x-y)\,d\sigma$ 的范围，其中 D 为：$0\le x\le 1$　$0\le y\le 1$