一、函数项级数：

1、定义1：设定义在区间I上的一列函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 称形如 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为定义在I上的函数项级数。

2、定义2：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$\forall x\in I$，对每一个确定的 $x_0\in I$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点，反之，称 x_0 为发散点。

注 ① 由所有收敛点构成的集合称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域；由所有发散点构成的集合称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散域。

② 在收敛域上，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和为$x$的函数，记作$S(x)$，称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数，即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$S(x)$的定义域为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域。

③ 称$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的前n

设部分和函数，在收敛域上，$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

称 $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$

为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} (S(x) - S_n(x))$

$= S(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) - S(x) = 0$

10.3

例1：设 $a_n>0$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 ______

例2：求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$ 的收敛域.

练习1：求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n^n}$ 的收敛域.

例3 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛域.

练习2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0, b>0)$ 的收敛半径

$R=$ ______.

例4. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{2n-1}$

练习3：求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

10.4：

例1 将e^x展开成x的幂级数

例2：将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

例3：将 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在 $x=1$ 处展开成 Taylor 级数.

练习：1. $f(x)=\arctan x^2$ 展开为 x 的幂级数，并指出收敛域.

2. $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数为 ________

3. 已知 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f''(0)=$ ________

10.5:

例1. 计算 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的近似值，精确到 10^{-4}

例2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!2^n}$

上次课总结：1. Abel定理的证明

2. 求幂级数的收敛域 K

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ 考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在

$x = \pm R$ 处的敛散性 $\Rightarrow K$.

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \rho|x-x_0| < 1$

$\Rightarrow x_0 - \frac{1}{\rho} < x < x_0 + \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ 考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在 $x = x_0 + \frac{1}{\rho}$

$x = x_0 - \frac{1}{\rho}$ 的敛散性 $\Rightarrow K$

上次课总结：1. 幂级数求和函数

① 先求导再积分：$S(0)$，$S'(x)$，$S(x)-S(0)$

$$=\int_0^x S'(t)\,dt$$

② 先积分再求导：$\left(\int_0^x S(t)\,dt\right)'=S(x)$

注 ① $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ ② $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$\forall x\in(-1,1)$

③ 和函数的定义域为幂级数的收敛域.

2、函数展开成幂级数：间接展开法.

常用展开式：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \forall x\in(-1,1)$$