概率论与数理统计

Probability and Statistics

—概率论与数理统计教学组—

哈尔滨工程大学

第3章 多维随机变量及其分布

习 题 课

学习要点

- 知识点总结
- 典型习题

一、知识点总结

- 二维随机变量
  - 定义，主要类型：离散、连续
  - 独立性：定义，判断的充要条件
- 概率分布
  - 分布函数：联合分布函数，边缘分布函数
  - 离散型：联合分布律，边缘、条件分布律
  - 连续型：联合概率密度，边缘、条件概率密度
  - 随机变量函数的分布
    - 离散型
    - 连续型
      - 分布函数法
      - 公式法：$X \pm Y, XY, \dfrac{X}{Y}$
    - $\max(X,Y), \min(X,Y)$
- 常见分布：二维均匀分布、二维正态分布

二、典型习题

例 1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y),$$

则 $A=$_____, $B=$_____, $C=$_____.

解

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1, \qquad (1)$$

$$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0, \qquad (2)$$

$$F(x,-\infty)=A(B-\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0. \qquad (3)$$

由(2),(3)得 $B=C=\dfrac{\pi}{2}$, 带入(1)得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$.

例 2 D 是由 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^2$ 围成的平面区域，(X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为________.

解 $S_D=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln e^2=2$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 $f_X(2)=\dfrac{1}{4}$.

例 3 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$________.

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

解 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-x-4y}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4\mathrm{e}^{-x-4y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.$$

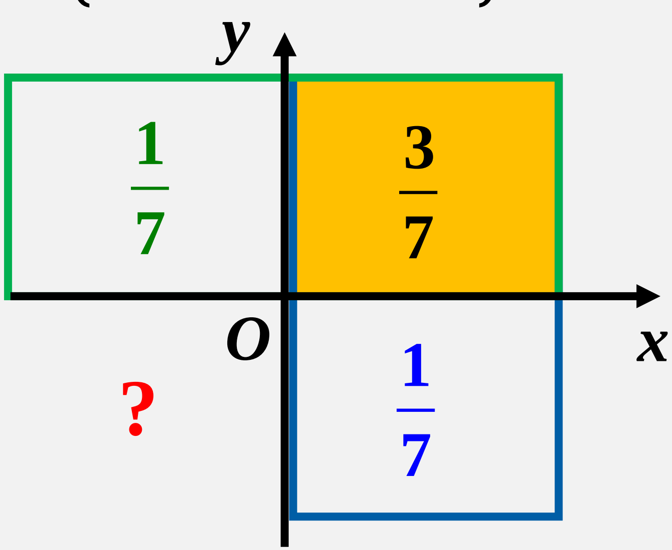
应选 A.

例 4 设随机变量 X 与 Y 满足 $P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\geq 0\}=$ ________.

(A) $\dfrac{16}{49}$ (B) $\dfrac{5}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{40}{49}$

解

$$P\{\max(X,Y)\geq 0\}=1-P\{\max(X,Y)<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}.$$



$$=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}.$$

例5 设随机变量X与Y相互独立，下表列出了(X,Y)的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

解 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$,

由X与Y相互独立，$P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{X=x_1\}\cdot P\{Y=y_1\}$

故$P\{X=x_1\}=\frac{1}{4}$.

根据联合分布律边缘分布律的关系，可将表填写完整.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

例 6 已知随机变量 X_1 与 X_2 的分布律如下

X_1	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$,

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$,

且 $P\left\{X_1 \cdot X_2 = 0\right\} = 1$, 求:

(1) (X_1, X_2) 的联合分布律; (2) 问 X_1 与 X_2 是否独立?

解 如图列出 (X_1, X_2) 的联合分布律与边缘分布律:

由 $P\left\{X_1 \cdot X_2 = 0\right\} = 1$,

知 $P\left\{X_1 \cdot X_2 \neq 0\right\} = 0$,

故填表.

X_2 \ X_1	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
0				$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

由X_1与X_2的边缘分布律，将表填完整，得到(X_1,X_2) 的联合分布律.

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

由于$0=P\{X_1=-1,X_2=1\}\neq P\{X_1=-1\}\cdot P\{X_2=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$,

故X_1与X_2不独立.

例 7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

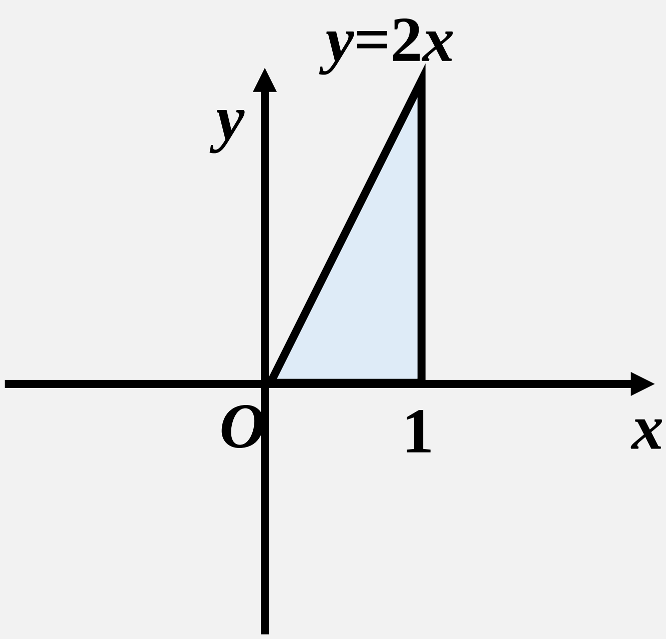
$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1,0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数A;

(2) 求边缘概率密度$f_Y(y)$及条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 求概率$P\{X+Y<1\}$;

(4) 求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

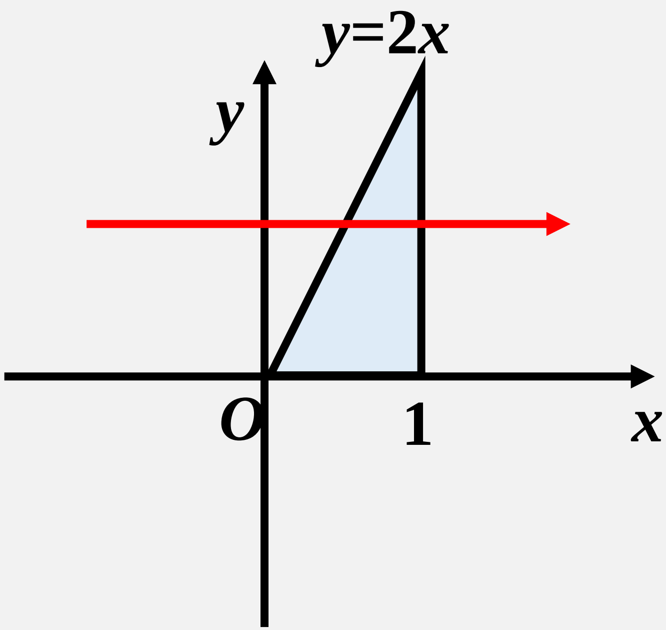


解 (1) 因$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,

有$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2x} A\mathrm{d}y=A$, 故$A=1$.

例 7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



(2) 求边缘概率密度 $f_Y(y)$及

条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;

解 (2) 边缘概率密度

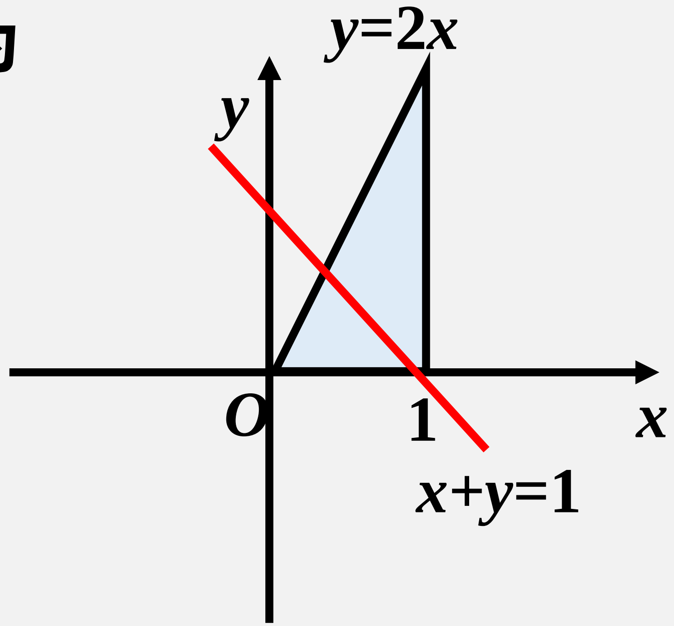
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_{y/2}^{1} 1\mathrm{d}x, & 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}=\begin{cases} 1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在$0<y<2$时： $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & \dfrac{y}{2}<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例 7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 求概率$P\{X+Y<1\}$;

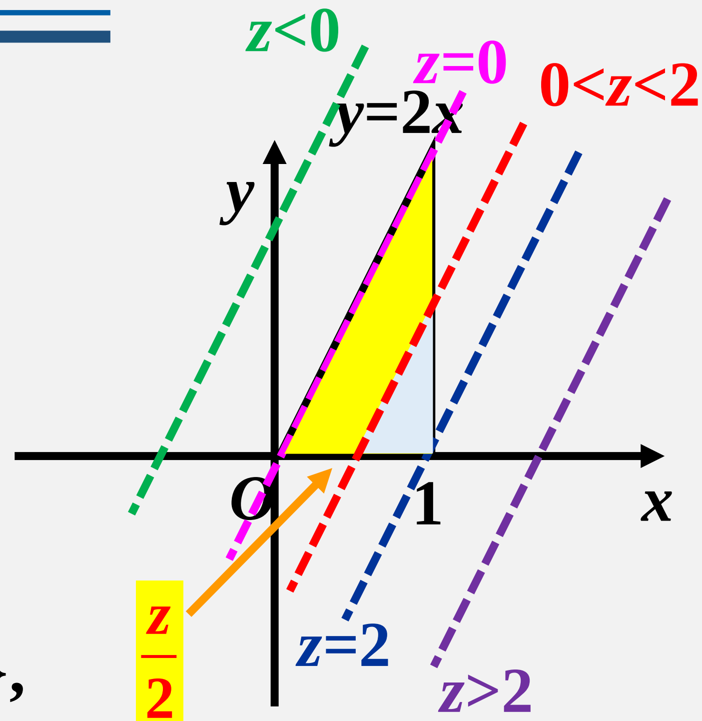


解 (3) $P\{X+Y<1\}=\int_0^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1-y}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}.$

例 7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.



解 (4) 令$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$,

$2x-y\le z$

$\Rightarrow y\ge 2x-z$

$z=0, z=2$

为分界线

当$z\le 0$时, $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$;

当$z\ge 2$时, $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1$;

当$0<z<2$时, $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=S_D$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{z}{2})\cdot 2(1-\frac{z}{2})=z-\frac{1}{4}z^2.$$

例 7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(4) 求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解 (4) 即分布函数为:

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0, \\ z-\dfrac{1}{4}z^2, & 0<z<2, \\ 1, & z\ge 2. \end{cases}$$

故所求的概率密度为:

$$f_Z(z)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}z, & 0<z<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 8 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，其分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

，

求 $U=\max(X,Y)$， $V=\min(X,Y)$， $W=XY$ 的分布律.

解 U,V,W 的所有可能取值均为0,1，其中，

$$P\{U=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

$$P\{V=1\}=P\{\min(X,Y)=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

$$P\{W=1\}=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

U	0	1
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$

V	0	1
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

W	0	1
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

例 9 设某商品一周的需求量 X 是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

并设各周的需求量是相互独立的，试求

(1) 两周需求量的概率密度函数;

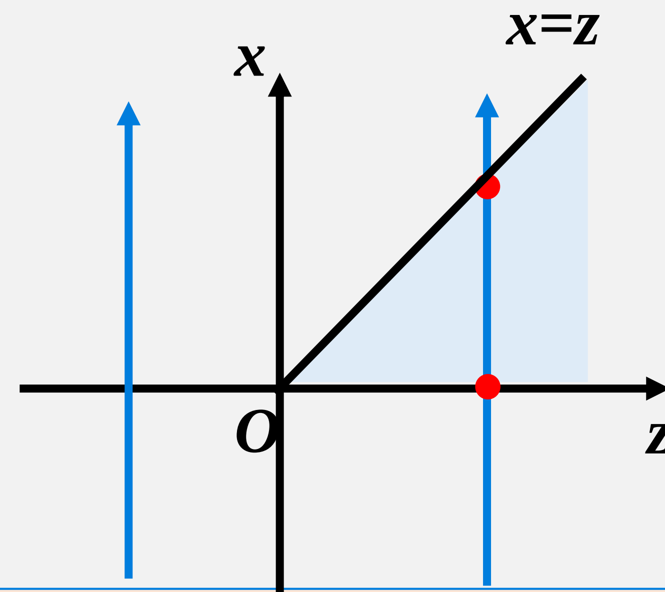
(2) 三周需求量的概率密度函数.

分析：两周需求量为$2X$，三周需求量为$3X$，**对吗?**

解 (1) 设随机变量Y 也表示该商品某一周的需求量，则Y 与 X 独立同分布，设 Z 表示该商品两周需求量，则 $Z=X+Y$.

例 9 **设某商品一周的需求量 X 是一个随机变量，其概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$



并设各周的需求量是相互独立的，试求

(1) **两周需求量的概率密度函数；**

解 (1) $Z=X+Y$,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-$$

当$z\le 0$**时，** $f_Z(z)=0$,

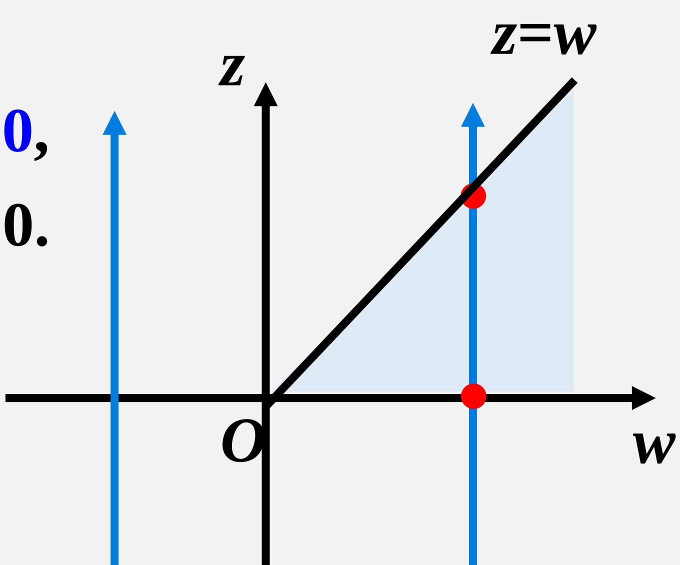
当$z>0$**时，** $f_Z(z)=\int_0^z xe^{-x}\cdot(z-x)e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}z^3e^{-z}.$

即 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

$\Rightarrow 0<x<z$

(2) 求三周需求量的概率密度函数.

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



解 (2) 设随机变量W表示该商品三周需求量，则 $W=Z+X$,

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,w-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(z)$$

即 $f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{120}w^5e^{-w}, & w>0,\\ 0, & w\le 0.\end{cases}$

$\Rightarrow 0<z<w$

当$w\le 0$时， $f_W(w)=0$,

当$w>0$时， $f_W(w)=\displaystyle\int_0^w \frac{1}{6}z^3e^{-z}(w-z)e^{-(w-z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{120}w^5e^{-w}.$

谢谢您的观看

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY