1.5章　递归方程的渐进性

递归方程的渐进性

❐ 合并排序的复杂性

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

解决方法

❐ Substitution方法(代入法):
- 对时间复杂度进行预测，将预测结果代入递归方程，如果不产生矛盾，那么可能是解
- 然后用归纳法证明.

❐ Recursion-tree方法(递归树法):
- 把递归方程用树的形式展开
- 然后用估计和的方法来求解.

❐ Master方法(主定理法):
- 求解型为T(n)=aT(n/b)+f(n)的递归方程

Substitution方法

$T(n)=4T(n/2)+O(n)$

预测时间复杂度为O(n²)，即 T(n) = c n²，代入递归方程：

左边=cn^2

右边=$4c\ (n/2)^2+O(n)=cn^2$

左右相等，预测成立.

利用归纳法证明。

Substitution方法

$T(n)=2T(n/2)+n$

（1）猜测 n² 和 n，均不行，猜测nlogn

左边 = c n logn

右边 = 2c n/2 log n/2 = c n (logn - 1) = c n log n

左右相等，可能是解，用归纳法证明。

（2）根据几个已知的计算结果来猜

T(2) = 2 T(1) + 2 = 2 = 2 log 2

T(4) = 2 T(2) + 4 = 8 = 4 log 4

T(8) = 2 T(4) + 8 = 24 = 8 log8

…

T(n) = n logn

Substitution方法

$T(n)=2T(n/2)+n$

假设：猜测是正确的

证明：存在常数 c 和 N，使得所有n ≥N，T(n)≤c(nlogn)。

假设结论对于n/2成立。

T(n) = 2T(n/2)+n ≤ cnlog(n/2)+n ≤ cnlogn – cn +n

= cnlogn + (1-c) n

当 c ≥ 1 时，得 T(n) ≤ c(nlogn).

所以，结论对于n成立。

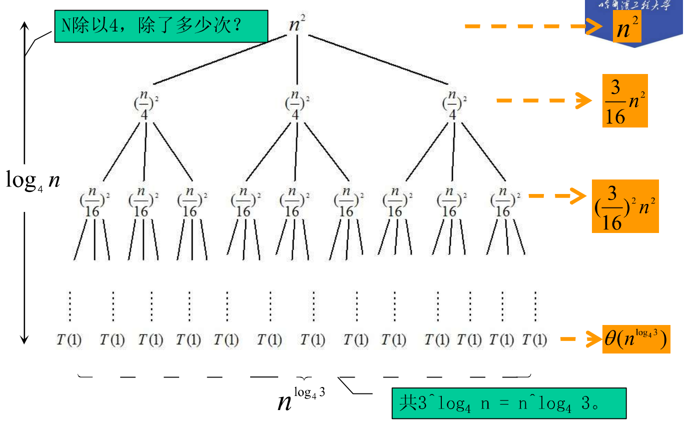
Recursion-tree方法

❐ 以树的形式循环地展开递归方程

❐ 把递归方程转化为和式

❐ 然后使用求和技术求解

例：$T(n)=n^2+3T(\frac{n}{4})$



例：$T(n)=n^2+3T(\frac{n}{4})$

$$T(n)=n^2+\frac{3}{16}n^2+(\frac{3}{16})^2n^2+\ldots+(\frac{3}{16})^{\log_4 n-1}n^2+\theta(n^{\log_4 3})$$

$$=\sum_{i=0}^{\log_4 n-1}(\frac{3}{16})^i n^2+\theta(n^{\log_4 3})$$

$$<\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{3}{16})^i n^2+\theta(n^{\log_4 3})$$

$$=\frac{1}{1-(3/16)}n^2+\theta(n^{\log_4 3})$$

$$=\frac{16}{13}n^2+\theta(n^{\log_4 3}) \qquad =O(n^2)$$

Recursion-tree方法

$$T(n)=n^2+3T(n/4)$$

证明：假设对于$n/4$有 $T(\frac{n}{4})=O((\frac{n}{4})^2)\le cn^2/16$

$$T(n)\le n^2+\frac{3}{16}cn^2=cn^2-\frac{13}{16}cn^2+n^2$$

当$c\ge\frac{16}{13}$时 $T(n)\le cn^2$

Master方法

目的：求解 $T(n)=aT(n/b)+f(n)$ 型方程，$a\ge 1, b>0$ 是常数，$f(n)$ 是正函数

方法：记住三种情况，则不用笔纸即可求解上述方程.

Master方法

定理 2.4.1 设 $a\ge 1$ 和 $b>1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数集上的函数 $T(n)=aT(n/b)+f(n)$. $T(n)$ 可以如下求解：

(1). 若 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$，$\varepsilon>0$ 是常数，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a})$.

(2) 若 $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3)若 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$，$\varepsilon>0$ 是常数，且对于某个常数$c<1$和所有充分大的n有 $af(\frac{n}{b})\le cf(n)$，则 $T(n)=\theta(f(n))$

Master方法

*直观地：我们用 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 比较

(1). 若 $n^{\log_b a}$ 大，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a})$

(2). 若 $f(n)$ 大，则 $T(n)=\theta(f(n))$

(3). 若 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 同阶，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)=\theta(f(n)\lg n)$.

更进一步：

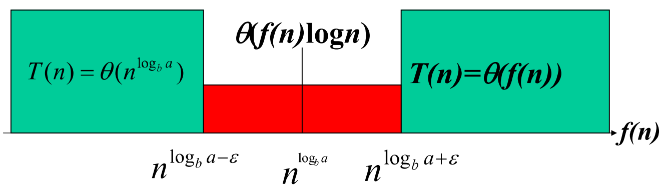
(1). 在第一种情况，$f(n)$不仅小于$n^{\log_b a}$，必须多项式地小于，即对于一个常数$\varepsilon>0$，$f(n)=O(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}})$.

f(n)的上界除以一个多项式都是它上界

(2). 在第三种情况，$f(n)$不仅大于$n^{\log_b a}$，必须多项式地大于，即对一个常数$\varepsilon>0$，$f(n)=\Omega(n^{\log_b a}\cdot n^{\varepsilon})$.

f(n)的下界除以一个多项式都是它下界

Master方法



对于红色部分，Master定理无能为力

例 1. 求解 $T(n)=9T(n/3)+n$.

$a=9,\ b=3,\ f(n)=n,\quad n^{\log_b a}=\theta(n^2)$

$\because f(n)=n=O(n^{\log_b a-\varepsilon}),\quad \varepsilon=1$

$\therefore T(n)=\theta(n^{\log_b a})=\theta(n^2)$

例 2. 求解 $T(n)=T(2n/3)+1$.

$a=1,\ b=3/2,\ f(n)=1,\quad n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2}1}=n^0=1$

$\because f(n)=1=\theta(n^{\log_b a})$

$\therefore T(n)=\theta(n^{\log_b a}\log n)=\theta(\log n)$

例3. 求解$T(n)=3T(n/4)+n\log n$

$a=3,\ b=4,\ f(n)=n\log n,\quad n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=O(n^{0.793})$

(1) $f(n)=n\log n\ge n^{\log_b a+\varepsilon},\quad \varepsilon=0.2$

(2) 对所有n，$af(n/b)=3\times\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}\le 3\times\frac{n}{4}\log n=cf(n)$，$c=\frac{3}{4}$

于是，$T(n)=\theta(f(n))=\theta(n\log n)$

例4. 求解$T(n)=2T(n/2)+n\log n$

$a=2,\ b=2,\ f(n)=n\log n,\quad n^{\log_b a}=n$

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a})$ 但不存在$\varepsilon>0$,使得 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

$f(n)$ 大于 $n^{\log_b a}$，但不多项式大于$n^{\log_b a}$，Master定理不适用

$f_1(n) = n\log n \qquad f_2(n) = n^{1+\varepsilon}$

求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{n^{1+\varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{\varepsilon}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{2^{\log n^{\varepsilon}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{2^{\varepsilon \log n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{2^{\varepsilon} 2^{\log n}} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m}{2^{m}} = 0$

$\log n \to n^{\varepsilon>0} \to (a>1)^n \to n!$

$(\log n)^{k>1}$和$n^{\varepsilon>0}$比较如何？