形式语言与自动机讲座

上下文无关文法
下推自动机
上下文无关文法性质
图灵机

上下文无关文法

- 设计文法
- 文法化简与转化成CNF
- 文法歧义性的判断与消除

设计文法

① 000 $\boxed{11\,00}$ 111

A

S→0S1 | A

A→1A0 | ε.

- 例1 $L = \{0^i 1^j 0^j 1^i | i, j \geq 0\}$
- 例2 The set of all strings with twice as many 0's as 1's.
- 例3 $L = \{a^i b^j c^k | i \neq j \text{ or } j \neq k\}$

i<j A_1 j<k B_1

i>j A_2 j>k. B_2

② S→S0S0S1S | S0S1S0S | S1S0S0S | ε.

S→0S0S1 | 0S1S0 | 1S0S0 | ε. 1SS

③. S→ A_1C | A_2C | AB_1 | AB_2

A_1→ aA_1b | A_1b | b.

A_2→ aA_2b | aA_2 | a

B_1→ bB_1c | B_1c | c

B_2→ bB_2c | bB_2 | c

C→Cc | ε

A→Aa | ε.

文法化简及CFG转化为CNF

化简顺序：

- 消除空产生式
- 消除单元产生式
- 消除非产生的无用符号
- 消除非可达的无用符号

文法化简及CFG转化为CNF

$A \to \varepsilon$　$S \to AB$

$B \to \varepsilon$

确定“可空变元”

1. 如果 $A \to \varepsilon$, 则 A 是可空的;
2. 如果 $B \to \alpha$ 且 α 中的每个符号都是可空的, 则 B 是可空的.

替换产生式

将含有可空变元的一条产生式 $A \to X_1X_2\cdots X_n$,
用一组产生式 $A \to Y_1Y_2\cdots Y_n$ 代替, 其中:

1. 若 X_i 不是可空的, Y_i 为 X_i;
2. 若 X_i 是可空的, Y_i 为 X_i 或 ε;
3. 但 Y_i 不能全为 ε.

确定“单元对”

$A \to BC$ X

如果有 $A \overset{*}{\Rightarrow} B$, 则称 $[A,B]$ 为单元对.

1. $A \to B \in P$, 则 $[A,B]$ 是单元对;
2. 若 $[A,B]$ 和 $[B,C]$ 都是单元对, 则 $[A,C]$ 是单元对.

消除单元产生式

1. 删除全部形为 $A \to B$ 的单元产生式;
2. 对每个单元对 $[A,B]$, 将 B 的产生式复制给 A.

消除无用符号: 删除全部含有“非产生的”和“非可达的”符号的产生式

计算“产生的”符号集

1. 每个 T 中的符号都是产生的;
2. $A \to \alpha \in P$ 且 α 中符号都是产生的, 则 A 是产生的. (也包括 $\alpha = \varepsilon$ 时)

计算“可达的”符号集

1. 符号 S 是可达的;
2. $A \to \alpha \in P$ 且 A 是可达的, 则 α 中符号都是可达的.

文法化简及CFG转化为CNF

定理 21 (乔姆斯基范式 CNF)

每个不带 ε 的 *CFL* 都可由这样的 *CFG* G 定义, G 中每个产生式都形为

$$A \to BC \quad 或 \quad A \to a$$

其中 A, B 和 C 都是变元, a 是终结符.

CFG 转为 CNF 的方法

1. 将产生式
$$A \to \boxed{X_1X_2\cdots X_m} \quad (m \geq 2)$$
中每个终结符 a 替换为新变元 C_a, 并增加新产生式
$$C_a \to a$$

2. 引入新变元 $D_1, D_2, \cdots, D_{m-2}$, 将产生式
$$A \to B_1B_2\cdots B_m \quad (m > 2)$$
替换为一组级联的产生式
$$A \to B_1D_1$$
$$D_1 \to B_2D_2$$
$$\cdots$$
$$D_{m-2} \to B_{m-1}B_m$$

文法化简及CFG转化为CNF

- 例 $S \rightarrow ASB|C|\varepsilon$

  $A \rightarrow aAS|a$

  $B \rightarrow SbS|A|bb$

  $C \rightarrow aC|CB$

① 空: S.
$S \rightarrow ASB|C|AB.$
$A \rightarrow aAS|a|aA$
$B \rightarrow SbS|A|bb|Sb|bS|b.$
$C \rightarrow aC|CB.$

② [S.C] [B.A]

$S \rightarrow ASB|AB|aC|CB$
$A \rightarrow aAS|a|aA$
$B \rightarrow SbS|aAS|a|aA|bb|Sb|bS|b$
$C \rightarrow aC|CB$

③ 有: A. B. S.
$S \rightarrow ASB|AB$
$A \rightarrow aAS|a|aA$
$B \rightarrow SbS|aAS|a|aA|bb|Sb|bS|b$
可达: S. A. B

④. $S \rightarrow AD_1|AB$
$D_1 \rightarrow SB$
$A \rightarrow C_aD_2|a|C_aA.$
$C_a \rightarrow a$
$D_2 \rightarrow AS$
$B \rightarrow SD_3|C_aD_2|a|C_aA|C_bC_b|SC_b|C_bS|b$
$D_3 \rightarrow C_bS$
$C_b \rightarrow b$

文法歧义性的判断与消除

$T=\{if, b, else, A\}$

$V=\{S\}$

- 例 $S \rightarrow \boxed{if\ b}\ S \mid if\ b\ S\ \boxed{else}\ S \mid A$

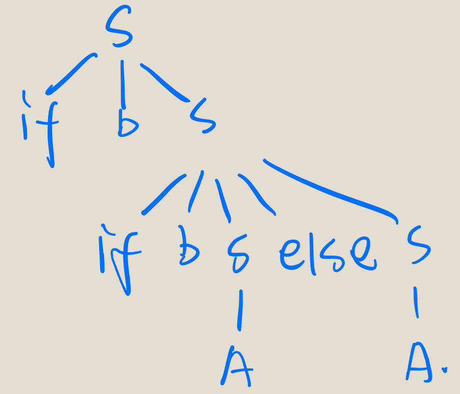
条件

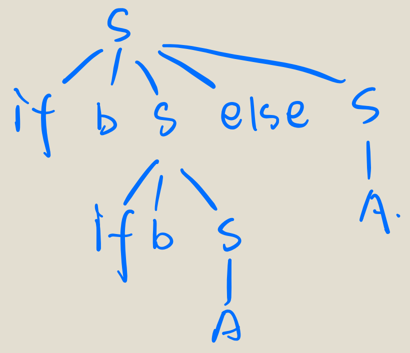
a

b

if b if b A else A

aacbc

① 

② 

消除：

$S \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow if\ b\ S_1\ else\ S_1 \mid A$

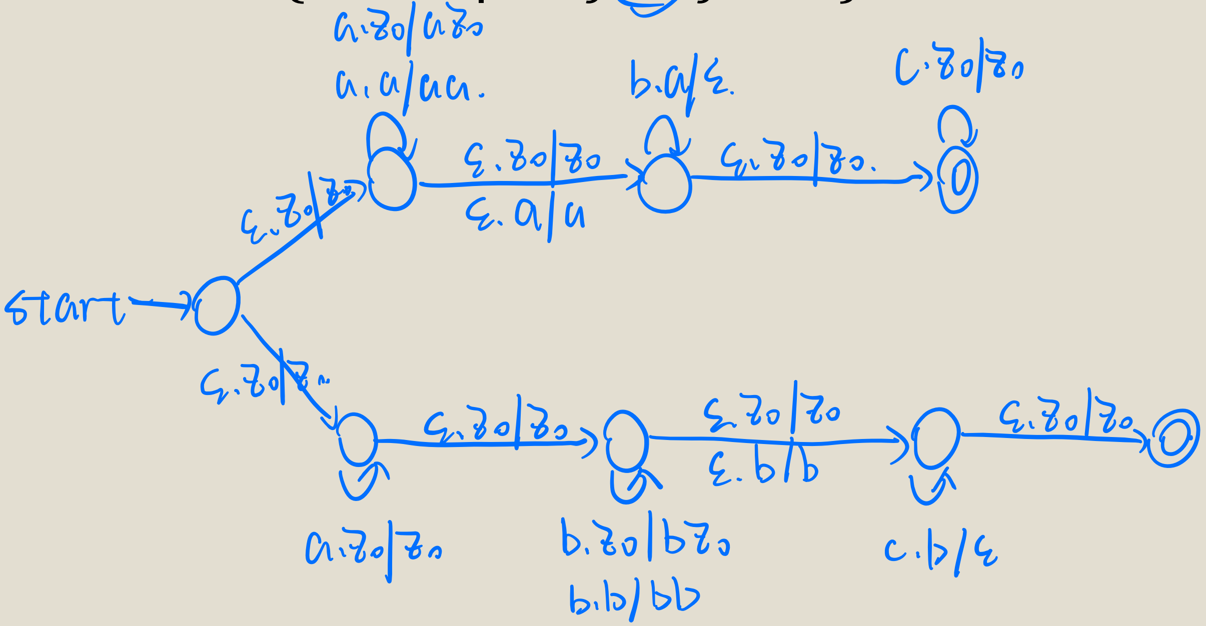
$S_2 \rightarrow if\ b\ S \mid if\ b\ S_1\ else\ S_2$

下推自动机

- 设计PDA
- PDA与CFG转化
- 设计DPDA

设计PDA

- 例1 $L = \{a^i b^j c^k | i = j \text{ or } j = k\}$



设计PDA

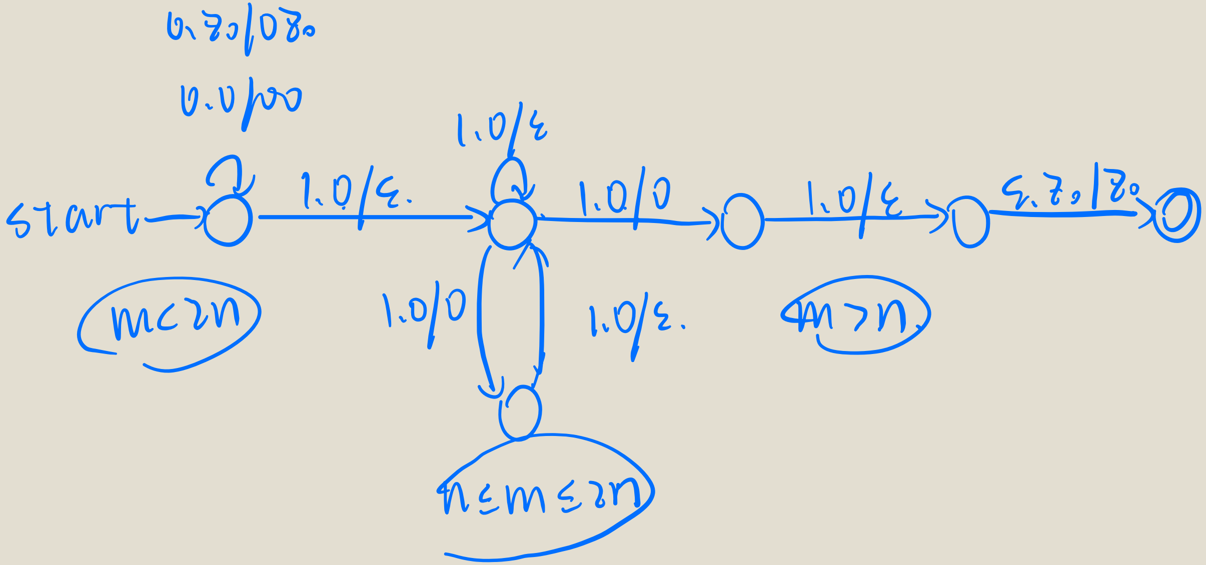
$n=m$.　$m>2n$.　2个1弹1个0.

$n \le m \le 2n$.

$1<m<2$

- 例2 $L = \{0^n1^m | n < m < 2n\}$

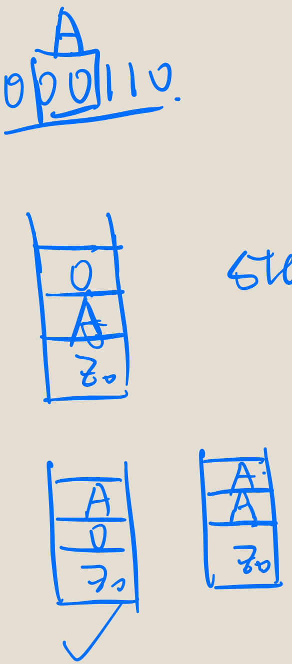
$n \ge 2$.　$m \ge 3$.



设计PDA

$\boxed{0^{2n}1^n}$

- 例3 The set of all strings of 0’s and 1’s with twice as many as 0’s as 1’s



用1弹2个0

$0, Z_0/0Z_0$

$0, 0/A$

$1, A/\varepsilon$

$0, A/0A$

$1, 0/1$

$0, 0/00$

用0弹1.

$1, Z_0/11Z_0$

$1, 1/111$

$0, 1/\varepsilon$

$\varepsilon, Z_0/\varepsilon$

PDA与CFG转化

构造与文法等价的 PDA

如果 CFG $G = (V, T, P', S)$, 构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \varnothing),$$

其中 δ 为:

1. $\forall A \in V$:

$$\delta(q, \varepsilon, \boxed{A}) = \{(q, \boxed{\beta}) \mid \boxed{A \to \beta} \in P'\},$$

2. $\forall a \in T$:

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\},$$

那么 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{N}(P)$.

ω

构造与 PDA 等价的 CFG

如果 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$, 那么构造 CFG $G = (V, \Sigma, P', S)$,
其中 V 和 P' 为

1. $V = \{[qXr] \mid q, r \in Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$;
2. 对 $\forall r \in Q$, 构造产生式 $S \to [q_0 Z_0 r]$;
3. 对 $\forall (p, \boxed{Y_1 Y_2 \cdots Y_n}) \in \delta(q, a, X)$, 构造 $|Q|^n$ 个产生式

ε.

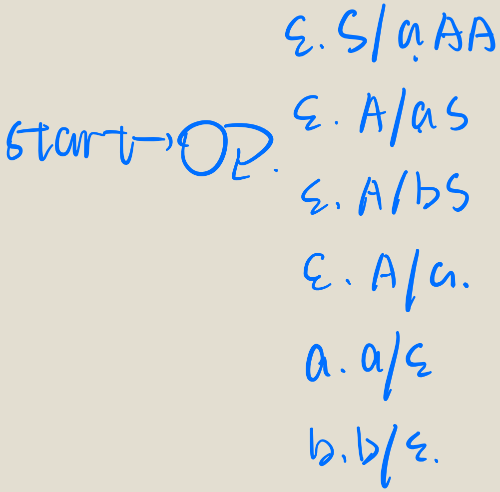
$$[qXr_n] \to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n]$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X, Y_i \in \Gamma$, 而 $r_i \in Q$ 是 n 次 $|Q|$ 种状态的组合;
若 $n = 0$, 为 $[qXp] \to a$.

CFG->PDA

例

$$\boxed{S} \to aAA$$
$$A \to aS|bS|a$$



PDA->CFG

$[q, r]$

初始状态q 栈底：Z_0.

例：(1) $\delta(q, 0, Z) = \{(q, X)\}$

(2) $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$

(3) $\delta(q, 1, X) = \{(r, X)\}$

(4) $\delta(r, 0, X) = \{(r, \varepsilon)\}$

(0). $S \to [q Z_0 \_]$

(1). $[q Z \_] \to 0 [q X \_]$

(2) $[q X \_] \to 0 [q X \_][\_ X \_]$

(3). $[q X \_] \to 1 [r X \_]$

(4) $[r X r] \to 0$

(0) $S \to [q Z_0 q]$

$S \to [q Z_0 r]$

(1) $[q Z q] \to 0 [q X q]$

$[q Z r] \to 0 [q X r]$

(2) $[q X q] \to 0 [q X q][q X q]$

$[q X q] \to 0 [q X r][r X q]$

$[q X r] \to 0 [q X q][q X r]$

$[q X r] \to 0 [q X r][r X r]$

(3) $[q X q] \to 1 [r X q]$

$[q X r] \to 1 [r X r]$

(4) $[r X r] \to 0$.

$S \to [q Z r]$

$[q Z r] \to 0 [q X r]$

$[q X r] \to 0 [q X r][r X r]$

$[q X r] \to 1 [r X r]$

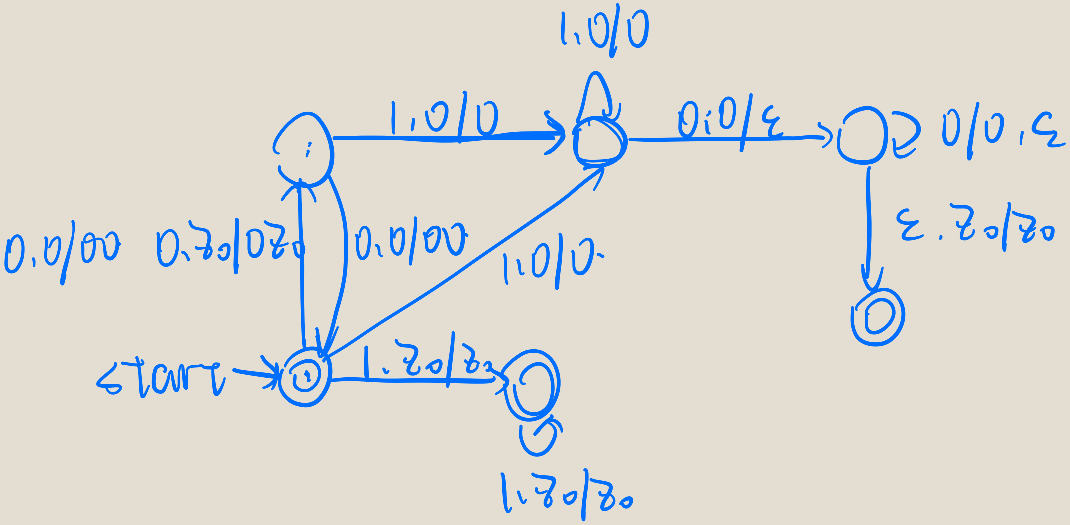
$[r X r] \to 0$

设计DPDA

- 例 $L = \{0^n 1^m 0^n \mid n \text{ and } m \text{ are arbitary}\}$

0^{2n}

$\cancel{X}$, $m, n \geq 0$.



上下文无关文法的性质

- 泵引理
- 运用性质判断某个语言是否为CFL 封闭性.

泵引理

定理 34

如果语言 L 是 CFL, 那么存在正整数 N, 它只依赖于 L, 对 $\forall z \in L$, 只要 $|z| \geq N$, 就可以将 z 分为五部分 $z = uvwxy$ 满足:

1. $vx \neq \varepsilon$ (或$|vx| > 0$);
2. $|vwx| \leq N$;
3. $\forall i \geq 0$, $uv^iwx^iy \in L$.

泵引理

- 例 $L = \{a^n b^n c^i | i \le n\}$

$z = a^N b^N c^N$

① vwx 含有 c　　$uv^2wx^2y \notin L$

$|vwx| \le N$

②. vwx 不含有 c　　vwx　　$uwy \notin L$

上下文无关语言的封闭性

满足.

- 代换 字符 → 语言 (集合).
- 并
- 连接
- 闭包
- 同态 字符 → 字符串
- 逆同态
- 反转

- ! 交
- ! 补

不

※ • 但上下文无关语言与正则语言的交为上下文无关语言

上下文无关语言的封闭性

- 例1 Prove or disprove: if L1 is CFL and L1 ∪ L2 is also CFL, then L2 must be CFL.

$L_1 = \{a^i b^n c^n \mid n \geq 1, i \geq 1\}$

$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1, i \geq 1\}$

$L_1 \cup L_2 = L_1$

- 例2 Prove:for every context free language L,the language $L^{`} = \{0^{|w|} | w \in L\}$is also context free.

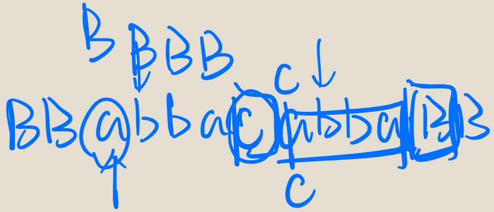
$L: \Sigma.$ $L': \Gamma = \{0\}$

$h: \Sigma \to \Gamma$ 对 $\forall a \in \Sigma$ 有 $h(a) = 0.$

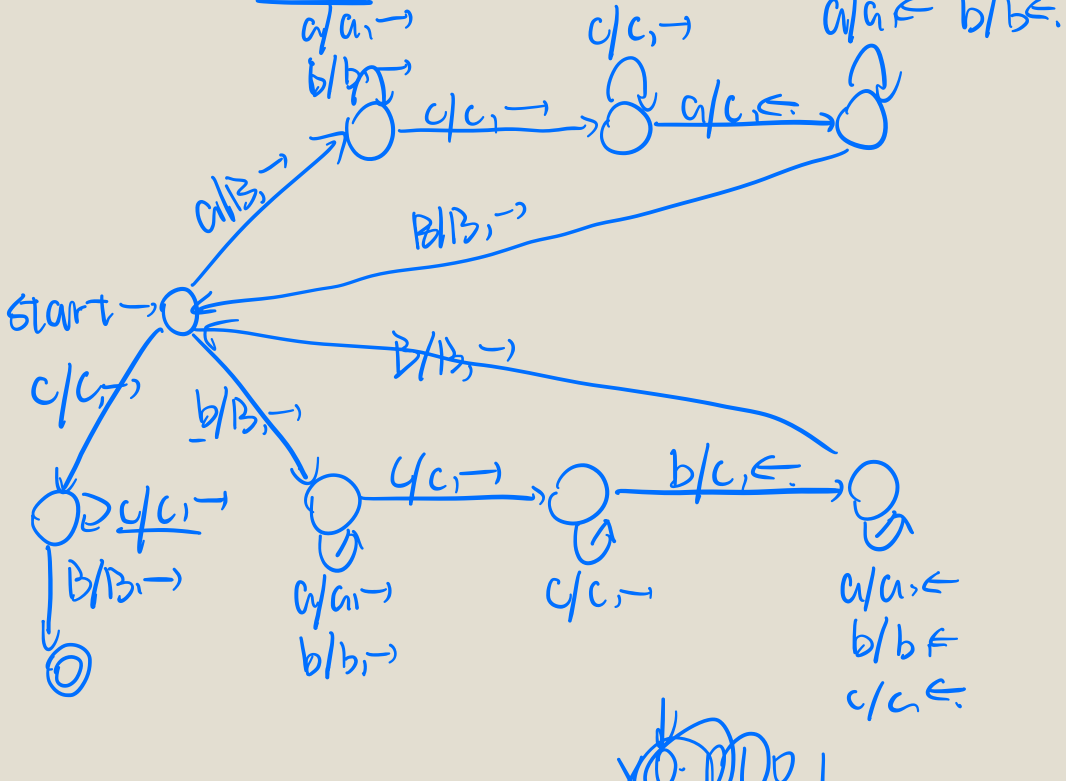
图灵机

- 设计图灵机

设计图灵机



- 例1 $L = \{wcw | w \in \{a, b\}^*\}$



设计图灵机

X0100

BB BB101BB

一进制

- 例2 Design a Turing Machine that computes the following function f:0^n->Binary(n).Where integer $n \geq 1$ and binary(n) is the binary representation of n.For example: f(0^3) = 11, f(0^5) = 101.