概率论与数理统计

§1. 随机事件与概率

$\begin{cases} \text{必然现象} \\ \text{随机现象} \xrightarrow{\text{大量重复试验}} \text{统计规律性} \longrightarrow \text{统计概率} \end{cases}$

(随机)试验：①可重复 ②所有结果预先可知 ③每次试验恰好出现其中一种结果，不可预知。

单一可能结果 → 基本事件(样本点) $\xrightarrow{\text{全体的集合}}$ 样本空间.

概率论与集合论中的概念对应:

符 号	概 率 论	集 合 论
S	样本空间，必然事件	空间（全集）
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件（样本点）	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的余集
$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A是B的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A与B相等
$\boxed{A.B互斥}$: $A+B \longleftrightarrow A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A与B的并集
$AB \longleftrightarrow A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	A与B的交集
$A\overline{B} \longleftrightarrow A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A与B的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A与B没有公共元素

重要运算性质：

1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$

2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$

3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4) 对偶原理：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

运算顺序：对立 ⟶ 积 ⟶ 和差.

古典概型：①结果有限 ②<u>均可能</u>发生

$$P(A) = \frac{A\text{所包含的基本事件个数}}{\text{基本事件的总数}}$$

几何概型：①基本事件无穷 ②<u>均可能</u>发生.

$$P(A) = \frac{A\text{的度量(长度、面积…)}}{\text{区域}S}$$

概率的公理化定义：

1) 任一事件 A，$P(A)\geq 0$
2) $P(S)=1$
3) 互不相容事件 $A_1, A_2 \ldots A_n \ldots$
$P(A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots)=P(A_1)+\ldots+P(A_n)+\ldots$

⇒ 推论：
① $P(\emptyset)=0$
② $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$
③ $0\leq P(A)\leq 1$，$\boxed{P(\bar{A})=1-P(A)}$ 解题常用以反面求解.

一般概率加法公式：

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

※ 概率为0未必是不可能事件，概率为1也未必是必然事件.

§2. 条件概率与独立性.

条件概率 $P(A|B)$ —— 事件A与事件B发生的条件概率.
无条件概率 $P(A)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Longrightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_n)$$

条件概率同样满足概率的公理化定义

区分：$P(AB)$ & $P(A|B)$，B发生
1) 在 $P(AB)$ 中作为结果
2) 在 $P(A|B)$ 中作为条件.

全概率公式：

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是互不相容的事件且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\ldots,n)$，若对于任一事件 B，有 $A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n\supset B$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

贝叶斯公式：回溯导致B事件发生的因素

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是互不相容的事件且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\dots,n)$，若对于任一事件 B，有 $A_1+A_2+A_3+\dots+A_n \supset B$，且 $P(B)>0$，则

先验概率 —— $P(A_i)$

求↓解

后验概率 —— $P(A_i|B)$

$$\boxed{P(A_i|B)}=\frac{\boxed{P(A_i)}P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

事件的独立性

① A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\xrightarrow{P(A),P(B)>0} P(A|B)=P(A),\ P(B|A)=P(B)$

$\rightarrow \bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立

② $P(A)=0$ 或 1，则 A 与任意事件独立.

$0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1$，A,B 相互独立与互不相容不能同时成立.

$0<P(A)P(B)\neq P(AB)=0 \quad AB=\varnothing$

③ $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(AC)=P(A)P(C)$

$P(BC)=P(B)P(C)$

以上三式 ⇔ A,B,C 两两独立

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

以上四式 ⇔ A,B,C 相互独立

相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 两两独立

④ n 个事件相互独立，

$$P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

（代表 $\sum_{i=2}^{n} C_n^i = 2^n-n-1$ 个式子）

即，其中任何 m 个事件相互独立

且将其中任意个事件换成对立事件仍满足相互独立.

n 重伯努利实验 ← 重复独立实验

↓

二项概率公式：$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

泊松逼近：若 $n\to\infty$，$p\to 0$ 使得 $np=\lambda>0$，$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

互斥&相互独立

互斥：两个事件不能同时发生　　特例：对立事件.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

独立：两个事件各自发生与否与另一事件的发生无关系.

$P(AB)=P(A)P(B)$

互斥一定不独立

如何判定独立？

① A与B相互独立$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与B相互独立$\Leftrightarrow$ A与$\bar{B}$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立.

② 对独立事件组不含相同事件作运算，得到新事件仍独立.

③ $\begin{cases} P(B|A)=P(B) \\ P(A|B)=P(A) \end{cases}$

④ $P(B|\bar{A})=P(B|A) \Leftrightarrow P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=1$

⑤ $P(A)=0$或$P(A)=1$，则A与任意事件独立.

二维离散：$P_{ij}=P(i)P(j)$

二维连续：$f(x,y)=f(x)f(y)$

混合型：$\begin{cases} F(x,y)=F(x)F(y) \\ P(X\le x_0, Y\le y_0)=P(X\le x_0)P(Y\le y_0) \end{cases}$

§3. 随机变量及其分布

随机变量：随机试验E的样本空间 $S \longrightarrow X(e)$ 单值实值函数

离散型随机变量：（有限个值或可列无穷多个值）

（概率）分布列：

① 数学形式：$P(X=x_k)=p_k \ (k=1,2,\dots)$

② 表格形式：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

性质：a) $p_k \geq 0 \ (k=1,2\dots)$ b) $\sum_k p_k = 1$

几种常见的分布列：

$X \sim B(1,p)$ 1、0-1分布（伯努利分布）

$X \sim B(n,p)$ 2、二项分布 ↑ $n=1$ 时，退化为0-1分布

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \ (k=0,1,2,\dots,n)$$

$X \sim P(\lambda)$ 3、泊松分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{\lambda}}{k!},\ \lambda>0 \ (k=0,1,2,\dots,n)$$

$X \sim G(p)$ 4、几何分布（无记忆性）

$$P(X=k)=q^{k-1}p \quad (k=1,2,\dots)$$ 直到第k次才成功

$X \sim H(n,N,M)$ 5、超几何分布

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \ (k=0,1,2,\dots,l)$$

分布函数：$F(x)=P(X\leq x)$

性质：a) $0\leq F(x) \leq b$ b) $F(x)$ 单调非减

c) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$

d) $F(x)$ 是右连续的

连续型随机变量：

概率密度 $f(x) \underset{微分}{\overset{积分}{\rightleftarrows}}$ 分布函数 $F(x)$

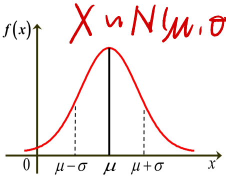
几种重要的连续型随机变量：

$X \sim U[a,b]$ 1、均匀分布（等可能…）

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 0, & 其他\end{cases} \longrightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b,\\ 1, & x\geq b.\end{cases}$$

$X \sim E(\lambda)$ 2. 指数分布（近似寿命分布…）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \longrightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 3. 正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty), \longrightarrow F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

题目计算时，常转化到标准正态分布计算.

随机变量函数的分布：

(1) 分布函数法

1. 先求Y的分布函数$F_Y(y)$

   $F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{g(X)\le y\}$ →表示成X的分布函数；

2. 求导数：$f_Y(y)=F_Y'(y)$.

(2) 公式法

定理 1 设X的概率密度$f_X(x)$，$y=g(x)$为(a,b)上严格单调可微函数$(-\infty\le a<b\le+\infty)$，则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\,|h'(y)|, & A<y<B,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$h(y)$为$g(x)$的反函数且$A=min\{g(a),g(b)\}, B=max\{g(a),g(b)\}$.

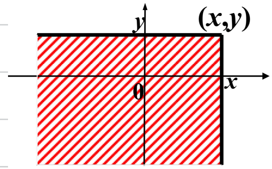
定理 2 设X的概率密度$f_X(x)$，$y=g(x)$在不相交的区间$I_1,I_2,\cdots$上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(y),h_2(y),\cdots$，且$h_1'(y),h_2'(y),\cdots$均连续，则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{n}f_X(h_i(y))\,|h_i'(y)|$$

§4 多维随机变量及其分布

n维随机向量：定义在同一个样本空间S上的n个随机变量组成的n维向量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$

(二元)分布函数：$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$



基本性质：① 恒满足$0\le F(x,y)\le 1$

② 对各自变量单调不减且右连续.

③ 对$\forall x$和y，有

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\quad F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1;$$

$$P(x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

边缘分布函数：$F_X(x)=P(X\le x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$

二维离散型随机变量

(联合)分布列：$\boxed{P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots),}$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	G	$\cdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	

➢(X,Y)分布列的性质：

(1) $p_{ij}\ge 0\quad (i,j=1,2,\cdots);$

(2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1;$

(3) $P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)\in G}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$

边缘分布列：

$$\boxed{\begin{aligned}P(X=x_i)&=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\Delta}{=}p_{i\cdot}\quad (i=1,2,\cdots),\\ P(Y=y_j)&=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\Delta}{=}p_{\cdot j}\quad (j=1,2,\cdots).\end{aligned}}$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

X与Y独立$\Leftrightarrow$

$P(X=x_i, Y=y_i)$

$=P(X=x_i)P(Y=y_i)$

离散型条件分布列：

① X在条件$Y=y_j$下的条件分布列

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots$$

② Y在条件$X=x_i$下的条件分布列

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2\cdots$$

X与Y相互独立的充要条件是

$$\begin{cases}P(X=x_i\mid Y=y_j)=P(X=x_i),\ i=1,2\cdots\\ P(Y=y_j\mid X=x_i)=P(Y=y_j),\ j=1,2\cdots\end{cases}$$

二维连续型随机变量

(联合)概率密度$f(x,y)$：$\begin{cases}F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{+\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv\\ \dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)\ \text{(连续点)}\end{cases}$

性质：1. $f(x,y)\geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1.$

3. $P((X,Y)\in G)=\iint\limits_{G}f(x,y)\,dxdy.$

边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx.$$

a. 二维均匀分布

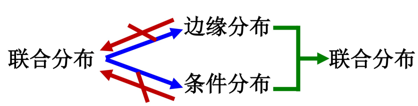
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)},&(x,y)\in G,\\ 0,&\text{其他}.\end{cases}$$

b. 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

其中μ_1，μ_2，$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$,都是常数，称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1$，$\mu_2$，$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$，$\rho$ 的二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2;\sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\rho)$.



二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

条件概率密度：

在$Y=y$条件下，随机变量X的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

在$X=x$条件下，随机变量Y的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

条件分布函数与条件概率密度间的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)du$$

X与Y相互独立的充要条件是 $\begin{cases} f_{X|Y}(x|y)=f_X(x), \\ f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y). \end{cases}$

随机变量的独立性：

① 对∀实数x, y，有$F(x,y)=F(x)F(y) \Leftrightarrow X$与$Y$相互独立.

② 离散型：$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$
连续型：$f(x,y)=f(x)f(y)$
} 相互独立

③ 条件概率：

$$\begin{cases} P(X=x_i \mid Y=y_j)=P(X=x_i) \text{ 且 } P(Y=y_j \mid X=x_i)=P(Y=y_j) \\ f_{X|Y}(x|y)=f(x) \text{ 且 } f_{Y|X}(y|x)=f(y) \end{cases}$$

eg. 二维正态分布X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

二维随机变量函数的分布

① 离散型. 列举所有可能即可.

② 连续型

分布函数法：设(X, Y)概率密度$f(x, y)$, $Z=g(X,Y)$,求Z的概率密度$f_Z(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z).$$

③ 非离散非连续. 分布函数法

④ Max & $Min(X,Y)$的分布

公式法

1）$Z=X+Y$的概率密度为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx.$$
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy.$$

当X与Y独立时

$$\left.\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx,\\ f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy.\end{aligned}\right\}\text{卷积公式}$$

2）$Z=kX+Y$的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-kx)dx.$

当X与Y独立时 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-kx)dx,$

3) $Z=X+kY$的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-ky,y)dy.$

当X与Y独立时 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-ky)f_Y(y)dy.$

4) $Z=XY$的概率密度为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{z}{y},y)\frac{1}{|y|}dy$$

当X与Y独立时
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(\frac{z}{y})f_Y(y)\frac{1}{|y|}dy$$

5）$Z=Y/X$的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,xz)|x|dx$

当X与Y独立时 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(xz)|x|dx$

$M=\max(X,Y)$分布函数为

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(\max(X,Y)\le z)$$
$$=P(X\le z,Y\le z)\overset{\text{独立}}{=}P(X\le z)P(Y\le z),$$

$\boxed{X\text{与}Y\text{独立时，}F_M(z)=F_X(z)F_Y(z).}$

$N=\min(X,Y)$的分布函数为

$$F_N(z)=P(N\le z)=P(\min(X,Y)\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$\boxed{X\text{与}Y\text{独立时，}F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].}$

设$X_1,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为
$$F_{X_i}(x_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为

$$\boxed{\begin{aligned}F_{\max}(z)&=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),\\ F_{\min}(z)&=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].\end{aligned}}$$

若$X_1,\ldots,X_n$独立同分布于相同的分布函数$F(z)$,则

$$\boxed{\begin{aligned}F_{\max}(z)&=[F(z)]^n,\\ F_{\min}(z)&=1-[1-F(z)]^n.\end{aligned}}\quad \boxed{\begin{aligned}f_{\max}(z)&=n[F(z)]^{n-1}f(z),\\ f_{\min}(z)&=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).\end{aligned}}$$

X_i是连续随机变量且有相同概率密度$f(z)$

例4 若X和Y相互独立, 它们分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布, 证明$Z=X+Y$服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

证明
$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}}{i!(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(k=0,1,\cdots)$$

结论

1. $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立且$X_i\sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,n)$则
$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim P(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n).$
2. $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立且均服$B(1,p)$,则 $X_1+X_2+\cdots+X_n\sim B(n,p).$
3. $X_1,X_2,\cdots,X_k$独立且$X_i\sim B(n_i,p)(i=1,2,\cdots,k)$则
$X_1+X_2+\cdots+X_k\sim B(n_1+n_2+\cdots+n_k,p).$

例6 设$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$,且$X$和$Y$独立,
则$Z=X+Y\sim N(0,2).$

证明 由卷积公式有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$
$x-\frac{z}{2}=\frac{t}{\sqrt{2}}$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$
即 $Z=X+Y\sim N(0,2).$

推广 设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且$X$和$Y$独立,
则$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$

一般结论 n个独立正态变量的线性组合仍为正态分布

1. 设X_1和X_2是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则（　）

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；
（B） $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；
（C）$F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数；
（D） $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

§5. 随机变量的数字特征与极限定理

数学期望：$\begin{cases} 离散型：E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \\ 连续型：E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \end{cases}$ 注意是否收敛

设 $Y=g(X)$，$g(x)$ 为连续函数，代入上述 X 即可。

二维随机变量类推即可

$\begin{cases} 离散：E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}; \\ 连续：E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy. \end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy.$$

性质：① $E(C)=C$，$E(CX)=CE(X)$

② $E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$

③ $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Rightarrow$ 充分不必要

$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2 \leq E(X-C)^2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)\geq 0$.

$\begin{cases} 离散：D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i \\ 连续：D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx. \end{cases}$

性质：① $D(C)=0$，$D(CX)=C^2D(X)$

② $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ 相互独立 充分不必要

$\Rightarrow \begin{cases} D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+\cdots+D(X_n) \\ D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)[E(Y)]^2+D(Y)[E(X)]^2. \end{cases}$

③ $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=a)=1$.

④ 一般情况下，

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2\underbrace{[E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)]}_{Cov(X_1,X_2)}$$

协方差：$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

性质：① 对称性 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

② $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

③ $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

相关系数：$\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

性质：

1. $|\rho| \le 1$;
2. $|\rho| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$.

   $\rho = 1$时，$b > 0$，正相关；$\rho = -1$时，$b < 0$，负相关

注意：独立一定不相关，但不相关不一定成立.

原点矩：$\alpha_k = E(X^k)$

中心矩：$\beta_k = E[X - E(X)]^k$.

常用的分布表：

若$X \sim B(1,p)$,则$E(X) = p, D(X) = p(1-p)$,

若$X \sim B(n,p)$,则$E(X) = np, D(X) = np(1-p)$,

若$X \sim P(\lambda)$,则$E(X) = D(X) = \lambda$, $(\lambda > 0)$,

若$X \sim G(p)$,则$E(X) = 1/p, D(X) = (1-p)/p^2$,

若$X \sim U(a,b)$,则$E(X) = (a+b)/2$,

$D(X) = (b-a)^2/12$,

若$X \sim E(\lambda)$,则$E(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2, (\lambda > 0)$,

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, (\sigma > 0)$.

大数定律：

依概率收敛：$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$是一个随机变量序列，

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \overset{P}{=} a \text{ 或 } Z_n \xrightarrow{P} a\,(n\to\infty) \Leftrightarrow \text{对}\forall \varepsilon>0,\text{有}\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} P(|Z_n - a| < \varepsilon) = 1\\ \lim\limits_{n\to\infty} P(|Z_n - a| \ge \varepsilon) = 0.\end{cases}$$

切比雪夫不等式：对$\forall$随机变量X，若$D(X)$存在，对$\forall \varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} P[|X - E(X)| \ge \varepsilon] \le \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ P[|X - E(X)| < \varepsilon] \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

切比雪夫大数定律：$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是相互独立的随机变量序列

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \ge \varepsilon\right\} = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1. \end{cases}$$

辛钦大数定律

设$X_1, X_2, \ldots$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i) = \mu, (i = 1, 2, \cdots)$，则对任给$\varepsilon > 0$，

有
$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \varepsilon\} = 0$$

或
$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

伯努利大数定律

设Y_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数，$p(0<p<1)$是事件A发生的概率，则对任给的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{Y_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{Y_n}{n} - p| < \varepsilon\} = 1,$$