2015年哈工大概率统计试题及答案

一、填空题：（15分）

1．0.1　　2． $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \dfrac{1}{y^2}, & y>1\end{cases}$　　3．6

4．(4.786, 6.214)．　5． $\dfrac{1}{9}$

二、选择题：（15分）

1C　2B　3A　4D　5B

三、解：（1）设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示乘坐飞机，火车，轮船，汽车四种交通工具，B 表示如期到达事件。

利用全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.05\times0.80+0.15\times0.7+0.3\times0.6+0.5\times0.9=0.775$$

5分

（2）利用Bayes公式：

$$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{0.15\times(1-0.7)}{1-0.775}=\frac{0.045}{0.225}=0.2$$

4分

四、解：（1）（1）当 $x\ge0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $y\ge0$ 时 $f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}$，所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y\ge0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立.　　　4分

（2）由于 X 与 Y 相互独立，故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}}dx, & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$ 5 分

五、 解：（1）令 U 之 $d\cdot f\ \ F(U)$

$\forall u\in R$，$F(U)=P(U\le u)=P(|X-Y|\le u)$

当 $U\le 0$ 时 $F(U)=0$ $U\ge 2$ 时 $F(\mathrm{u})=1$

$(X,Y)pdf$ 为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & , \quad 0\le x,y\le 2\\ 0 & , \quad 其它\end{cases}$$ 当 $0<u<2$ 时

$$F(u)=P(|X-Y|\le u)=\frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right]$$

$$\therefore f(u)=F'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 5 分

（2）$EU=\int_0^2 u\times\frac{1}{2}(2-u)du=\frac{1}{2}[u^2-\frac{1}{3}u^3]|_0^2=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{3}\times 8)=\frac{2}{3}$ 2 分

$$EU^2=\int_0^2 u^2\times\frac{1}{2}(2-u)du=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4]|_0^2=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\times 8-\frac{1}{4}\times 16)=\frac{8}{12}=3/4$$

$DU=EU^2-(EU)^2=3/4-(2/3)^2=11/36$ 2 分

六、解：（1）1）矩估计：$EX=\int_0^1\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1+\theta}{2}$

令 $\frac{1+\theta}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$ ，

所以θ的矩估计为：$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X} - 1$ 3 分

2)极大似然估计：

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, \theta \le x_i \le 1 \\ 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, \theta \le x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)} \le 1 \\ 0, \end{cases},$$

利用极大似然估计的定义可得：

所以θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \cdots, X_n)$

3 分

（2）因为$E\hat{\theta}_1 = E(2\overline{X} - 1) = 2E\overline{X} - 1 = 2 \times \dfrac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$

所以$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计。

令总体X的分布函数$F_X(z) = \begin{cases} 0, z \le \theta \\ \dfrac{z-\theta}{1-\theta}, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$

而$\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \cdots, X_n) = X_{(1)}$的分布函数为$F_{X_{(1)}}(z)$

则有：因为$X_1, \cdots, X_n$相互独立且与总体X同分布

$$所以 F_{X_{(1)}}(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = \begin{cases} 0, z \le 0 \\ 1 - \quad (1 - \dfrac{z-\theta}{1-\theta})^n, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} 0, z \le 0 \\ 1 - \quad (\dfrac{1-z}{1-\theta})^n, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$

则其概率密度为

$$f_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} n\dfrac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}, \theta < z < 1 \\ 0,, 其他 \end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_2=\int_\theta^1 z\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}dz=\int_\theta^1(1+z-1)\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}dz$$

$$=n\int_\theta^1\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n-1}dz-\int_\theta^1 n\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n dz$$

$$=\frac{n}{n-1+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n\Big|_\theta^1-\frac{n}{n+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n+1}\Big|_\theta^1$$

$$=1-\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-\theta)^{n+1}=1-\frac{n}{n+1}\times(1-\theta)$$

$$=\frac{n}{n+1}\theta+1-\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}\neq\theta$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，但为渐进无偏估计。 3 分

七. 解：令月初可储存此种商品为 m 件。

由题设可得 $P(X\le m)=0.99117$

于是有：$1-P(X>m)=0.99117$

即 $P(X\ge m+1)=0.00883$

于是查表可得 $m+1=13$

所以 $m=12$ 即月初可储存此种商品 12 件即可。 4 分

2016年秋季学期概率论与数理统计期末考试题答案

一．1. $\frac{7}{15}$ 2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^{-1}<y<e\\ 0, & 其他\end{cases}$ 3. 0.5 4.（19.5617，20.4383）5. 5

（3分/题，总共15分）

二．1.D 2.B 3.A 4. C 5.B

（3分/题，总共15分）

三．解：设 A=“先取出的为一等品”，

B=“后取出的为一等品”，C_i =”取出的为第 i 箱”，i=1,2.

（1）$P(A)=P(A|C_1)P(C_1)+P(A|C_2)P(C_2)=\frac{1}{2}(\frac{10}{50}+\frac{18}{30})=\frac{2}{5}$，6分

（2）

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB(C_1+C_2))}{P(A)}=\frac{P(C_1AB)+P(C_2AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(C_1)P(A|C_1)P(B|AC_1)+P(C_2)P(A|C_2)P(B|AC_2)}{P(A)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29})/\frac{2}{5}=\frac{690}{1421}=0.48557\text{，}$$ 3分

四．解(1)总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta-1}, & 1\le x\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{\theta-1}, & 1\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$，

$X_{(n)}$ 的分布函数为：$F_{X_{(n)}}(x)=[F(x)]^n$

故 $f_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}, & 1\le x\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$ 6分

(2) $EX_{(n)}=\int_1^\theta x\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}dx=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\int_1^\theta(x-1)^n dx+\int_1^\theta(x-1)^{n-1}dx]$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\frac{(\theta-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(\theta-1)^n}{n}]=\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}$$

$$EX_{(n)}^2=\int_1^\theta x^2\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}dx$$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\int_1^\theta(x-1)^{n+1}dx+\int_1^\theta 2(x-1)^{n-1+1}dx+\int_1^\theta(x-1)^{n-1}dx]]$$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\frac{(\theta-1)^{n+2}}{n+2}]+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1$$

$$DX_{(n)}^2=EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1-(\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1)^2$$

$$=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}-\frac{n^2(\theta-1)^2}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}(\theta-1)^2$$ 3 分

五．解：（1）因 $\max(X,Y)=Y$

故 $f_M(y)=f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}dx, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2e^{-y} & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$,

令解: 令 M 的分布函数 $F_M(z)$,

$F_M(z)=P(\max(X,Y)\le z)$

当 $z\le 0$ 时， $F_M(z)=0$,

当 $z>0$ 时， $F_M(z)=P(X\le z,Y\le z)=\int_0^z(\int_x^z xe^{-y}dy)dx=1-e^{-z}-ze^{-z}-z^2e^{-z}/2$.

故 $f_M(z)=F_M'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z} & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$ 4 分

（2）因 $Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$

故 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

使 $f(x,z-x)$ 不为 0 的区域为：$0<x<z-x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ z>2x\end{cases}$.

当 $z\le 0$ 时， $f_z(z)=0$,

当 $z>0$ 时， $f_z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}dx=e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-z/2}-e^{-z/2}$

故 $f_z(z)=\begin{cases} e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-z/2} & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$　　2 分

令解：$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$，不为零的区域 $0<z-y<y \Rightarrow \begin{cases} z>y \\ z<2y \end{cases}$；

(3) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}xe^{-y}dy=1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$.　　3 分

六．解：（1）矩估计：　两次分部积分可得

$EX=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx$

$=\int_0^{\infty}-\lambda x^2de^{-\lambda x}=-\lambda x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+2\lambda\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx=2\int_0^{\infty}-xde^{-\lambda x}=2(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}))=\frac{2}{\lambda}$

解得 $\lambda=\frac{2}{EX}$

故参数λ的矩估计量为：$\hat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$；　　4 分

（2）最大似然估计：

似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^2x_ie^{-\lambda x_i},x_i>0$

$=\lambda^{2n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$

对数似然：

$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，

故参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$　　5 分

七．解：(1)设 X 的分布函数为 $F_X(x)$，即 $F_X(x)=P(X\le x)$，则

当 $x\le 0$ 时，$F_X(x)=0$，

当 $x>0$ 时，

$F_X(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-P(N(x)=0)=1-\frac{(\lambda x)^0}{0!}e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$，故 X

的分布函数为：$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其概率密度函数为：$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

即 X 服从参数为 λ 的指数分布.　　2 分

(2) $P(X>2\,|\,X>1)=P(X>1)=1-F_X(1)=e^{-\lambda}$　2 分（**据指数分布具有后效性特点**）

2017 秋概率论与数理统计 A 答案

一.选择题（每道题 3 分，共 15 分）

1.A　2.B　3.B　4.C　5.D

二.填空题（每道题 3 分，共 15 分）

1.　0.2;　2.　$\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$；　3.　10;　　4.　0.95;　5.　32.917，拒绝原假设，认为各台机器生产的薄板厚度有显著差异。

三 （6 分）

解：（1）设 $B=$“主人回来树还活着”，再设 $A=$“邻居记得浇水”，则由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.9\times(1-0.1)+0.1\times(1-0.8)=0.83$$

——————3 分

（2）$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0.1\times0.8}{1-0.83}=\dfrac{8}{17}=0.471$

——————6 分

四.（9 分）**解**：（1）$S(D)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\dfrac{1}{3}$

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

——————2 分

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dx=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$$f_Y(\mathrm{y})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3dx=3(\sqrt{y}-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不相互独立.　——————5 分

（2）$Z=U+X$, 所以, $Z\in[0,2)$ ，

所以，$z\le 0$时，$F(z)=P(Z\le z)=0$；

$z\ge 2$时，$F(z)=P(Z\le z)=1$；

$0<z<1$时，$F(z)=P(Z\le z)=P(U=0,X\le z)+P(U=1,X\le z-1)$

$=P(X>Y,X\le z)+P(X\le Y,X\le z-1)$

$=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3dy$

$=\dfrac{3}{2}z^2-z^3$

$1\le z<2$时，$F(z)=P(Z\le z)=P(U=0,X\le z)+P(U=1,X\le z-1)$

$=P(X>Y,X\le z)+P(X\le Y,X\le z-1)$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

——————————9 分

五.（6 分）

解：（1）由已知得 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$，

所以，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}5x^3, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ————2 分

（2），$E(X)=\int_0^1 x\cdot 5x^4dx=\frac{5}{6}$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 5x^3dx=\frac{5(1-y^4)}{4} & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\frac{5(1-y^4)}{4}dy=\frac{5}{12}$$

或 $EY=\int_0^1 dx\int_0^x y5x^3dy=\frac{5}{12}$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy5x^3dy=\frac{5}{14}$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{14}-\frac{5}{6}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{504}$ ——————6 分

六.（9 分）

解：(1)参数 σ 的矩估计:

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0,$$

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=2\sigma^2,\quad \sigma=\sqrt{\frac{\mu_2}{2}},$$

所以参数 σ 的矩估计 $\hat{\sigma}_1=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2}}$。

参数 λ 的极大似然估计:似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}\right)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}$$

求对数

$$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

求导数，令其为零，得似然方程

$$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \square\ 0$$

解似然方程得

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

故参数σ 的极大似然估计为$\hat{\sigma}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.　　　　——————————4 分

(2) 因为$E\hat{\sigma}_2=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\sigma$，

所以$\hat{\sigma}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$是$\sigma$ 的无偏估计。　　　　——————————6 分

(3) $\ln f(x,\sigma)=-\ln(2\sigma)-\frac{|x|}{\sigma}$ ，$\frac{\partial\ln f(x,\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x|}{\sigma^2}=\frac{|x|-\sigma}{\sigma^2}$ ，

Fisher 信息量为$I(\sigma)=E(\frac{\partial\ln f(X,\sigma)}{\partial\sigma})^2=\frac{E(|X|-\sigma)^2}{\sigma^4}=\frac{D(|X|)}{\sigma^4}$，

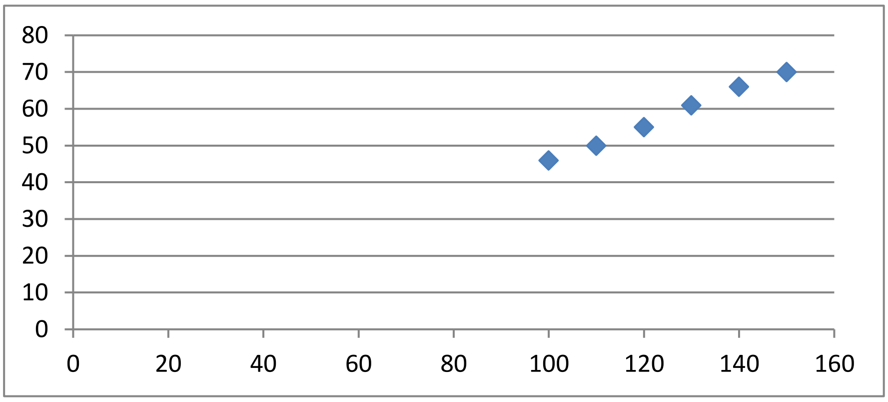
$D(|X|)=E(|X|^2)-(E|X|)^2=E(X^2)-(E|X|)^2=2\sigma^2-\sigma^2=\sigma^2$ ，

所以σ 得 C—R 方差下界为$L=\frac{1}{nI(\sigma)}=\frac{\sigma^2}{n}$

——————————9 分

七（10 分）

（1）



X 与 y 大致呈统计线性关系。　　　　——————————2 分

（ 2 ） $\bar{x}=125,\bar{y}=58,L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=1750$ ， $L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=434$ ，

$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=870$ ， $\hat{b}=\frac{L_{xy}}{L_{xx}}=0.4971$ ， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=-4.1375$

所以，回归方程为$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=-4.1375+0.4971x$ ——————————4 分

（3），$U=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\hat{b}L_{xy}=432.477$ ，$Q=L_{yy}-U=1.523$ ，$n=6$

所以，$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{Q}{n-2}}=\sqrt{\frac{1.523}{4}}=0.617$

——————————6 分

（4）b 的置信度为 0.95 的置信区间为$(\hat{b}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{L_{xx}}},\hat{b}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{L_{xx}}})$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{L_{xx}}}=t_{0.025}(4)\times 0.617\times\sqrt{\frac{1}{1750}}=0.0409$，所以置信区间为（0.4562，0.538）

——————————7 分

（5）检验$H_0:b=0,H_1:b\neq 0$

检验统计量为：$F=\frac{U}{Q/(n-2)}=(n-2)\frac{U}{Q}$ ，假设H_0成立时，$F\sim F(1,n-2)$ ，

拒绝域为$K_0=\{F\geq F_{\alpha}(1,n-2)\}$ ，$\alpha=0.05,F_{\alpha}(1,\text{n}-2)=F_{0.05}(1,4)=7.71$ ，

样本值代入得$F=4\times\frac{432.477}{1.523}=1135.856>7.71,$

拒绝原假设H_0 ，即回归方程回归显著。

——————————10 分

答案：

一、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1．$1\text{-}p$；　2. (0.1, 0.2, 0.1)；　3. $\dfrac{1}{6}$；　4. (-3, 30.8)；　5. （75.05，84.95）

二、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. C；　2. B；　3. C；　4. D；　5. B

三、（8 分）解：设 $A=\{从甲袋取的是黑球\}$；$B=\{从乙袋取的是黑球\}$；

$D=\{乙袋放入和取出的是同色球\}$

有 $P(A|D)=\dfrac{P(AD)}{P(D)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB+\bar{A}\bar{B})}=\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}}=\dfrac{9}{17}$

四、（8 分）

解：（1）当 $X\le 0$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $X>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$；

因此 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

当 $Y\le 0$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $Y>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}$；

因此 $f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$。

最终，对 $x>0$，有 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} e^{-(y-x)}, & y>x \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

对 $y>0$，有 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0<x<y \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

（2）$F_{Y|X}(y\mid 0<x<1)=\dfrac{P(0<x<1,Y\le y)}{P(0<x<1)}$

$$P(0<x<1,Y\le y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y<1 \\ 1-e^{-1}-e^{-y} & y\ge 1 \end{cases}$$

$P(0<x<1)=1\text{-}e^{-1}$

$$F_{Y|X}(y\mid 0<x<1)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \dfrac{1-e^{-y}-ye^{-y}}{1\text{-}e^{-1}} & 0\le y<1 \\ \dfrac{1-e^{-1}-e^{-y}}{1-e^{-1}} & y\ge 1 \end{cases}$$

（3）$F_z(z)=P(Y-X\le z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{x+z} e^{-y}dy\right)dx & z>0 \end{cases}=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ 1\text{-}e^{-z} & z>0 \end{cases}$

$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$。

五、(12 分）解：$EX=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} x\cdot 24xydy\right)dx=\dfrac{2}{5}, EX^2=\dfrac{1}{5}, DX=\dfrac{1}{25}$,

$EX=EY; EX^2=EY^2, EXY=\dfrac{2}{15}$

$\operatorname{cov}(X,Y)=-\dfrac{2}{75}, \rho=-\dfrac{2}{3}$

六、(8 分）解：

（1）矩估计：由 $E(X)=\int_\theta^{+\infty} x\cdot 3e^{-3(x-\theta)}dx=\dfrac{1}{3}+\theta\approx\bar{X}$，故 $\hat{\theta}_1=\bar{X}-\dfrac{1}{3}$.

MLE：似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=3^n e^{-3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$，　　$x_{(1)}\ge\theta$.

故 MLE 为 $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$.

（2）矩估计：$E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{X}) - \frac{1}{3} = E(X) - \frac{1}{3} = \theta$，故 $\hat{\theta}_1$ 为无偏估计.

MLE：$x_{(1)}$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta) = \begin{cases} 3ne^{-3n(x-\theta)}, & x > \theta; \\ 0, & x \le \theta, \end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(1)}) = \theta + \frac{1}{3n}$, $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，而 $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 - \frac{1}{3n} = X_{(1)} - \frac{1}{3n}$ 为无偏估计.

（3）$D(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{9n}$, $D(\hat{\theta}_3) = \frac{1}{9n^2}$，后者更有效.

七、（4 分）解：$P(X = k) = C_{k-1}^1 (1/4)^{k-2}(3/4)^2 = (k-1)(1/4)^{k-2}(3/4)^2$，$k = 2, 3, \cdots$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1/4)^{k-2}(3/4)^2,$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} p^2 \quad (\text{令} p = 3/4)$$

$$= p^2 \left(\sum_{k=2}^{+\infty} q^k \right)'' = \frac{2}{p} = \frac{8}{3}$$

2018-2019 秋季学期概率统计期末考试参考答案

一．填空题（3 分/题，共 15 分）

1．0.3　2.37　　3.　6.5　4. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　5.(4.412, 5.588)　((4.0, 6.0)都算对)

二．选择题（3 分/题，共 15 分）

1. A　　2.D　　3.B　　4.C　　5.C

三．（8 分）解：（1）令 A_i 表示从甲袋中取出 i 个白球（i=0,1,2）

$$B \subset S = A_0 + A_1 + A_2, B = BS = \sum_{i=0} A_i B$$

利用全概率公式可得：$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{C_3^i C_2^{2-i}}{C_5^2} \times \frac{(4+i)}{10} = 13/25$

6 分

（2）设 $A = \{从甲袋取的是2个白球\}$；$B = \{从乙袋取的是1个白球\}$；

$$D = \{乙袋放入和取出的是同色球\}$$

有 $P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(AB)}{P(\overline{A}\overline{B} + AB)} = \frac{\frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}}{\frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10} + \frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$　　2 分

四、（8 分）**解：（1）** $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx$

若 $f(x, x-z) > 0$ 必有 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < x - z < 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ z < x, \\ z > 3x - 2 \end{cases}$

当 $-2 < z < 0$ 时 $f_Z(z) = \int_0^{(z+2)/3} dz = (z+2)/3$

当 $0 < z < 1$ 时 $f_Z(z) = \int_z^{(z+2)/3} dz = 2(1-z)/3$

其它，$f_Z(z) = 0$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z+2)/3, & -2 < z < 0 \\ 2(1-z)/3, & 0 \le z < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$ 6 分

（2）$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_0^{(2-x)/2} dy = (2-x)/2, 0 < x < 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

当 $0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x)$ 时 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2(1-x)}$,

4 分

其它，$f_{Y|X}(y|x) = 0$

五.（8 分）**解：(1)**三角形区域$G=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\ge 1\}$随机变量$X$和$Y$的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 若(x,y)\in G\\ 0 & 若(x,y)\notin G\end{cases}$$

以$f_1(x)$表示X的概率密度，则当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_1(x)=0$，当$0<x<1$时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x$$

$\therefore EX=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}$　　　　$EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\dfrac{1}{2}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

同理可得　　$EY=\dfrac{2}{3}$，　　$DY=\dfrac{1}{18}$，

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

于是　$DZ=D(X-2Y)=DX+D(2Y)-2\operatorname{cov}(X,2Y)=\dfrac{1}{18}+4\cdot\dfrac{1}{18}+\dfrac{4}{36}=\dfrac{7}{18}$　　6 分

(2) $\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{-1/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}}=-1/2$　　2 分

六、（12 分）**解：**（1）矩估计：$EX=\mu_1=\int_0^\theta x\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2}{3\theta^2}x^3\Big|_0^\theta=\frac{2}{3}\theta,\theta=\frac{3}{2}\mu_1$

于是θ的矩估计为：$\hat{\theta}_1=\frac{3}{2}\overline{X}$

极大似然估计：样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$的似然函数为$L=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod_{i=1}^n x_i & 0\le\max_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$\ln L=-2n\ln\theta+n\ln 2+\sum_{i=1}^n\ln x_i,\quad \frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}=0\quad 无解$$

$\therefore$ 取$\hat{\theta}_2=\max_{1\le i\le 0}[x_i]$，由定义知$\hat{\theta}_2$为$\theta$的最大似然估计. 8 分

（2）$g(y)=G'(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$,而$X\sim F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{\theta^2} & 0\le x<\theta\\ 1 & x\ge\theta\end{cases}$

$\therefore\hat{\theta}_2\sim g(y)=\begin{cases}n(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2} & 0\le y<\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)dy=\int_0^\theta ny(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}dy=\frac{2n}{2n+1}\theta\ne\theta$，$\hat{\theta}_2=\max_{1\le i\le 0}[x_i]$不是$\theta$的无偏估计.

$E\hat{\theta}_1=E\frac{3}{2}\overline{X}=\frac{3}{2}E\overline{X}=\frac{3}{2}EX=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\theta=\theta$，所以$\hat{\theta}_1$为是$\theta$的无偏估计。 2 分

（3）若取$\hat{\theta}_3=\frac{2n+1}{2n}\max_{1\le i\le n}\{x_i\}=\frac{2n+1}{2n}\hat{\theta}_2$

因为$E(\hat{\theta}_3)=\frac{2n+1}{2n}E(\hat{\theta}_2)=\theta$，$\therefore\hat{\theta}_3$为$\theta$的无偏估计量.

$D\hat{\theta}_1=\mathrm{D}(\frac{3}{2}\overline{X})=(\frac{3}{2})^2D(\overline{X})=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot nDX=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n}(EX^2-(EX)^2)$

$=\frac{9}{4n}(\frac{1}{2}\theta^2-(\frac{2}{3}\theta)^2)=\frac{9}{4n}\cdot\frac{1}{18}\theta^2=\frac{1}{8n}\theta^2$

$E\hat{\theta}_2^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2g(y)dy=\int_0^\theta ny^2(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}dy=\frac{2n}{2n+2}\theta^2$

$D(\hat{\theta}_2)=E\hat{\theta}_2^2-(E(\hat{\theta}_2))^2=\frac{2n}{2n+2}\theta^2-(\frac{2n}{2n+1}\theta)^2=\frac{2n((2n+1)^2-2n(2n+2))}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2=\frac{n\theta^2}{(n+1)\ (2n+1)^2}$

所以，$D\hat{\theta}_3=D(\frac{2n+1}{2n}\hat{\theta}_2)=(\frac{2n+1}{2n})^2D\hat{\theta}_2=(\frac{2n+1}{2n})^2\frac{n\theta^2}{(n+1)\ (2n+1)^2}=\frac{\theta^2}{4n(n+1)}$

利用数学归纳法容易证明： $n>1, D\hat{\theta}_1=\frac{1}{8n}\theta^2\geq D\hat{\theta}_3=\frac{\theta^2}{4n(n+1)}$ 2 分

所以，$\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 较有效。

七.（4 分）解：（1）由题设：若第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验，则必有 $k\geq r$，

设（$X=k$) 表示第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验这一事件

于是（$X=k$) 发生当且仅当前面 $k-1$ 次射击试验中有 $r-1$ 次命中，$k-r$ 次未命中，而第 k 次试验的结果为命中。

利用试验的独立性：

$$P(X=k)=(C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-1-(r-1)})p=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}, k=r, r+1, r+2, \cdots$$ **2 分**

（2）令 X_i 表示第 $i-1$ 次命中之后到第 i 次命中所历经的贝努里试验的次数（i=1,2，….r）

于是 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 独立同分布（i.i.d），$X_1\sim G(p)$,则有：

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_r,$$

$$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=rE(X_1)=\frac{r}{p}$$ **2 分**

$$DX=D(X_1+X_2+\cdots+X_r)=rD(X_1)=\frac{rq}{p^2}$$

2020年秋季概率统计C考试答案（2021-1-3）

一．1.D，　2.A，　3. B，　4. C，　5. D，

二．1. $\frac{5}{12}$，　2. $f_Y(y)=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$　，　3. $\geq\frac{11}{12}$，　4. $F(1,3)$　，　5.（17.02,18.98），

三．解：设 $B=$（从乙袋中取到白球），$A_1=$（从甲袋中取到两个白球），

$A_2=$（从甲袋中取到一个白球和一个红球），$A_3=$（从甲袋中取到两个红球），

（1）$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{6}\times\frac{7}{11}+\frac{5}{9}\times\frac{6}{11}+\frac{5}{18}\times\frac{5}{11}=\frac{53}{99}$　　4，　6 分

（2）$P(A_1\mid\bar{B})=\frac{P(A_1)P(\bar{B}\mid A_1)}{1-P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{11}}{\frac{46}{99}}=\frac{3}{23}$　　3 分

四．解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$　　3 分

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　5 分

（2）其一：$Z=max\{X,Y\}=Y$，

故　$f_Z(z)=f_Y(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z)\mathrm{d}x=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$　　4 分

其二：

$F_Z(z)=P(X\leq z,Y\leq z)==\begin{cases}\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y e^{-y}\mathrm{d}x=\int_0^z ye^{-y}\mathrm{d}y=1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$　　2 分

故　$f_Z(z)=F_z'(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$　.　　4 分

五．解：（1）其一： $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$ 2 分

$$f_x(z-y)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{\pi^2}, & 0<z<1, 0<y<z\\ \dfrac{2y}{\pi^2}, & 1\le z<\pi, z-1<y<z\\ \dfrac{2y}{\pi^2}, & \pi\le z<\pi+1, z-1<y<\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2}{\pi^2}, & 0<z<1\\ \dfrac{2z-1}{\pi^2}, & 1\le z<\pi\\ 1-\dfrac{(z-1)^2}{\pi^2}, & \pi\le z<\pi+1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 7 分

其二：$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^3}{3\pi^2}, & 0\le z<1\\ \dfrac{1}{\pi^2}(z^2-z+\dfrac{1}{3}), & 1\le z<\pi\\ -\dfrac{(z-1)^3}{3\pi^2}+z-\dfrac{\pi}{3}, & \pi\le z<\pi+1\\ 1, & z\ge\pi+1\end{cases}$$ 4 分

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2}{\pi^2}, & 0<z<1\\ \dfrac{2z-1}{\pi^2}, & 1\le z<\pi\\ 1-\dfrac{(z-1)^2}{\pi^2}, & \pi\le z<\pi+1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 7 分

(2)其一： $E(Y)=\int_0^{\pi}\dfrac{2y^2}{\pi^2}\mathrm{d}y=\dfrac{2\pi}{3}$， $E(U+V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\pi}{3}$

2 分

其二： $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{y^2}{\pi^2}, & 0<y<\pi\\ 1, & y\ge\pi\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$F_U(u)=P(X\le u,Y\le u)=P(X\le u)P(Y\le u)=F_X(u)F_Y(u)$$

$$f_U(u)=F_U'(u)=f_X(u)F_Y(u)+F_X(u)f_Y(u)=\begin{cases}\dfrac{3u^2}{\pi^2}, & 0<u<1\\ \dfrac{2u}{\pi^2}, & 1\le u<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(U)=\int_0^1\frac{3u^3}{\pi^2}\mathrm{d}u+\int_1^\pi\frac{2u^2}{\pi^2}\mathrm{d}u=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{12\pi^2}$$

$$F_V(v)=1-P(X>vP(Y>v)=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

$$f_V(v)=F_V'(v)=f_X(v)(1-F_Y(v))+(1-F_X(v))f_Y(v)=\begin{cases}1+\dfrac{2v}{\pi^2}-\dfrac{3v^2}{\pi^2}, & 0<v<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(V)=\int_0^1 v(1+\frac{2v}{\pi^2}-\frac{3v^2}{\pi^2})\mathrm{d}v=\frac{1}{2}-\frac{1}{12\pi^2}$$

$$E(U+V)=E(U)+E(V)=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}$$ 2 分

六．解： $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 1 分

(1)① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2}=\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$ 2 分

$\theta=\frac{2}{\pi}\left[E(X)\right]^2 \qquad \hat{\theta}_1=\frac{2}{\pi}(\bar{X})^2$ 3 分

② $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^n(\frac{x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}})=(\prod_{i=1}^n x_i)\bullet\theta^{-n}\bullet e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}}$， $x_i>0$ 4 分

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}=0$$ 5 分

$$\hat{\theta}_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

（2） ① $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=2\theta,\ \ D(X)=2\theta-\frac{\pi\theta}{2}$

$E(\hat{\theta}_1)=\frac{2}{\pi}E(\bar{X}^2)=\frac{2}{\pi}\{D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2\}=\frac{2}{\pi}\{\frac{D(X)}{n}+[E(X)]^2\}=\frac{4-\pi+n\pi}{n\pi}\theta\neq\theta$ 1 分

故 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的有偏估计

修正 $\hat{\theta}_1$ 为 $\hat{\theta}_3=\frac{n\pi}{4-\pi+n\pi}\hat{\theta}_1$，而 $\hat{\theta}_3$ 为 θ 的无偏估计 2 分

② $E(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=\theta$

故 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计 3 分

（3） $\hat{\theta}_2\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}E(X_i^2)]=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=\theta,(n\to\infty)$

故 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的相合估计。 1 分

七．解： $F_z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=$
$=P(X=0)P(Y\le z)+P(X=1)P(Y\le z-1)+P(X=2)P(Y\le z-2)$ 1 分

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y^2, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$ 2 分

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{4}z^2, & 0\le z<1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}(z-2)^2, & 2\le z<3\\ 1, & z\ge 3\end{cases}$$ 4 分