

## 2022 概率论与数理统计模拟测试 1

写在前面：本套试题意在帮助同学整体梳理一遍本学期所学，难度较低，题型与考点可能与最终考试存在较大差异，仅供参考。预祝同学们取得一个优异的成绩！

### 一、选择题

1. 已知随机变量 $(X, Y)$ 服从二维正态分布，且 $D(X) \neq D(Y)$ ，则( )

- A、 $X$ 与 $Y$ 一定独立  
B、 $X$ 与 $Y$ 一定不独立  
C、 $(X + Y)$ 与 $(X - Y)$ 一定独立  
D、 $(X + Y)$ 与 $(X - Y)$ 一定不独立

2. 随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ x^2 - 3b, & a < x \leq 2 \\ c, & x > 2 \end{cases}$$

则 $a$ 的值为( )

- A、 $-\sqrt{3}$       B、 $\sqrt{3}$       C、1      D、0

3. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$ ， $Y \sim N(0, 1)$ ，则必有( )

- A、 $X + Y$ 服从正态分布  
B、 $X^2 + Y^2$ 服从 $\chi^2$ 分布  
C、 $X^2, Y^2$ 都服从 $\chi^2$ 分布  
D、 $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 $F$ 分布

4. 下面表述正确的有( )个

- (1) 设 $A, B$ 为任意两个随机事件，则 $A + (B - A) = B$   
(2) 连续型随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x)$ 是连续函数  
(3) 设随机变量 $X, Y$ 均服从一维正态分布，则随机变量 $X + Y$ 也服从正态分布  
(4) 设随机变量 $(X, Y)$ 服从二维正态分布，且 $X$ 与 $Y$ 不相关，则它们独立  
(5) 设 $XY$ 的相关系数为1，则存在常数 $a, b$ ，使 $Y = aX + b$

- A、2      B、3      C、4      D、5

5. 从一批灯泡中随机地抽取 $n$ 只做寿命试验，测得寿命(单位:小时)分别为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ， $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。设灯泡的寿命服从正态分布，则灯泡寿命均值的置信水平为0.95的置信上限为( )

- A、 $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1)$       B、 $\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1)$   
C、 $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)$       D、 $\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)$

## 二、填空题

1. 设随机变量 $X_i, i = 1, 2$ 的分布列为 $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.25, P(X_i = 0) = 0.5$ , 满足 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$ , 则 $P(X_1 = X_2) =$ \_\_\_\_\_

2. 设随机变量 $X, Y$ 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ , 且 $P(X \leq 1, Y \leq -1) = 0.2$ , 则 $P(X > 1, Y > -1) =$ \_\_\_\_\_

3. 在区间 $(0, 1)$ 上随机独立地取出 $n$ 个数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 记最大数和最小数之间距离为 $S$ , 用 $Y$ 表示 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 大于 $1/3$ 的个数, 则 $E(S) =$ \_\_\_\_\_,  $D(Y) =$ \_\_\_\_\_

4. 某种导线的电阻 $X$ 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$ 未知, 要求电阻的标准差不得大于 $0.005$ 。现从中抽取9根导线测其电阻, 测得样本标准差 $s = 0.0066$ , 问在 $\alpha = 0.05$ 水平上这批导线的电阻(是/否)合格

5. 总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的相合估计为\_\_\_\_\_

三、新型冠状病毒的密切接触者是指与确诊或高度疑似病例有过共同的生活或工作的人。包括办公室的同事, 学校里一个班级的学生及班主任老师, 同一教室、宿舍的同事、同学, 同机的乘客, 以及其它形式的直接接触者包括病毒病人的陪护、乘出租车、乘电梯等直接接触者等等。新型冠状病毒可以通过咽拭子进行核酸检测, 但因各种干扰因素影响, 检测结果存在一定比例的假阳性和假阴性。所谓假阴性, 是指受测试者是感染者但核酸检测结果为阴性, 假阳性是指受测试者不是感染者但核酸检测结果为阳性。在我国公布的数据中, 密切接触者被感染的概率是10%, 核酸检测中假阴性比例为20%, 假阳性的比例0.001%。现对一密切接触者进行核酸检测, 求(1)此人的检测结果为阴性的概率; (2)若此人的检测结果为阴性, 此人未被感染的概率; (3)若此人的检测结果为阳性, 此人已被感染的概率。

四、已知 $(X, Y)$ 在以点 $(0, 1)$ 、 $(1, -1)$ 、 $(1, 1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布。求(1)边缘密度 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$ ; (2)条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$ ; (3)  $P\left\{X > \frac{1}{2} \mid Y > 0\right\}$ ; (4)  $X, Y$ 是否独立? 是否相关? 为什么?

五、已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 其分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

记 $Z = Y - X$ , 其概率分布函数为 $F_Z(z)$ , 求(1) $F_Z(z)$ ; (2)  $D(Z)$ ; (3)  $Cov(Z, X)$ .

六、设随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求(1) $Z = X + Y$ 的密度函数；(2) $W = (X + Y)/3$ 的密度函数。

七、设总体 $X$ 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - 2\theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ 是未知参数， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，记 $N$ 为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 中小于1的个数。求(1) $\theta$ 的矩估计量；(2) $\theta$ 的极大似然估计量；(3)验证上述两个估计量是否具有无偏性。

命题人：计算学部讲师团概率论命题组

命制时间：2022.11.27