2022 概率论与数理统计模拟测试 1 参考答案

写在前面：参考答案为笔者自行作答结果，可能有考虑疏忽之处，答案仅供参考，如有疑惑欢迎讨论，祝大家新年快乐，考试顺利！

一、选择题

1. D

解析：由协方差的可加性可得

$$Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X+Y,X)-Cov(X+Y,Y)$$
$$=Cov(X,X)-Cov(Y,Y)=D(X)-D(Y)\ \neq 0$$

因而$(X+Y)$与$(X-Y)$的相关系数ρ一定不为0，于是$(X+Y)$与$(X-Y)$一定不独立。

2. B

解析：显然由分布函数以及概率密度的性质可列出方程组：

$$a^2-3b\geq 0,4-3b=1,c=1$$
$$\int_a^2 2xdx=1$$

解得$a=\sqrt{3}$

3. C

解析：X,Y两随机变量是否独立未知，二元随机变量的正态分布、χ^2分布、F分布均需要证明其独立性。

4. A

解析：（4）（5）项正确，（1）项当且仅当$A\subseteq B$时成立，不符合题意；（2）连续型随机变量X的概率密度$f(x)$不一定是连续函数；（3）X,Y两随机变量是否独立未知，$X+Y$不一定服从正态分布；（4）二维正态分布X,Y独立与不相关等价；（5）由相关系数的性质知正确。

5. B

解析：σ未知，带公式即可得置信上限。

二、填空题

1. 0

解析：列出分布列，由X_i的分布列以及$P(X_1X_2=0)=1$可得$X_1\neq X_2$恒成立。

2. 0.2

解析：记$A=\{X\leq 1\},B=\{Y\leq -1\}$，则$P(X>1,Y>-1)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$P(A)=\ P(X>1)=\Phi(\frac{1}{\sigma})$$
$$P(B)=\ P(\ Y>-1)=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})$$

代入得$P(X>1,Y>-1)=0.2$

3. $\frac{n-1}{n+1}$，$\frac{2n}{9}$

解析：令最小数为Y，最大数为X，则$S=X-Y$，故有$E(S)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)$。易得Y的分布函数为$F_Y(y)=1-(1-y)^n$，X的分布函数为$F_X(x)=x^n$，则Y与X的概率密度

直接求导可得，再由连续型随机变量的数学期望计算方法积分可得

$$E(S)=\int_0^1 n\,x^n dx-\int_0^1 ny(1-y)^{n-1}\,dy=\frac{n-1}{n+1}$$

因为n次取数相互独立，每次取X_i大于$1/3$的概率为$2/3$，取数的过程可看作服从二项分布，故方差$D(Y)=n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2n}{9}$

4.　是

解析：检验$H_0{:}\,\sigma^2\le 0.005^2$，$H_1{:}\,\sigma^2>0.005^2$

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(9-1)0.0066^2}{0.005^2}=13.94$$

查表得$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，拒绝域$W=(\chi^2>\chi^2_{0.05}(8)=15.507)$，故不能拒绝原假设。

5.　$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$或者$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

解析：$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\bar{X}^2=A_2-\bar{X}^2\to\lim\limits_{n\to\infty}(A_2-\bar{X}^2)=\alpha_2-\alpha_1^2=D(X)$

故S^{*2}是$D(X)=\sigma^2$的相合估计，同理S^2也为$D(X)=\sigma^2$的相合估计。（答案不唯一）

三、解答：(1)全概率公式：$10\%\cdot20\%+90\%\cdot(1-0.001\%)=0.919991$

(2)贝叶斯公式：$\frac{90\%\cdot(1-0.001\%)}{10\%\cdot20\%+90\%\cdot(1-0.001\%)}=97.8\%$

(3)贝叶斯公式：$\frac{10\%\cdot80\%}{10\%\cdot80\%+90\%\cdot0.001\%}=99.99\%$

四、解答：(1)$f_X(x)=2x(0\le x\le1);0\big(\text{其余情况}\big),f_Y(y)=\frac{1+y}{2}(-1\le y\le1);0(\text{其余情况})$

(2)　$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\frac{1+y}{2}}=\frac{2}{1+y}(-1<y\le1)$

(3)　$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right\}=\frac{P(X>\frac{1}{2},\ Y>0)}{P(Y>0)}=2/3$

(4)不独立，相关

五、解答：(1)　X为离散型随机变量，Y为连续型随机变量

$$F_Z(z)=P(Y-X\le z)=0.25\cdot P(Y\le z)+0.75\cdot P(Y\le z+1)$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ 0.75+0.75z, & -1\le z<0\\ 0.25z+0.75, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge1\end{cases}$$

(2)对$F_Z(z)$求导后按照公式计算可得$D(Z)=\frac{13}{48}$

(3)　$Cov(Z,X)=0$

六、解答：(1)$f(z)=ze^{-z}(z>0);0(z\le0)$　(2)　$f(w)=9we^{-3w}(w>0);0(w\le0)$

七、解答：(1)　$\hat{\theta}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\bar{X}$　(2)　$\hat{\theta}=\frac{N}{2n}$　(3)矩估计具有无偏性，似然估计不具有无偏性。