2022 年度概率论与数理统计模拟题2参考答案

一、填空题

1. 【答案】$\frac{5}{8}$.

因为 B 与 C 相互独立，有$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

又因 A 与 B 互不相容, A与C 互不相容，有

$$P(AB)=P(AC)=P(ABC)=0.$$

$$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$
$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-\frac{1}{9}-0+0}=\frac{5}{8}.$$

2.【答案】$\mu\sigma^2+\mu^3$
解：因为 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,
所以 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 X,Y 相互独立.
则 $E(XY^2)=EX\cdot E(Y^2)=EX\cdot\left[DY+(EY)^2\right]=\mu(\mu^2+\sigma^2)=\mu\sigma^2+\mu^3$.

3.【答案】$\frac{2}{3}$
解 由随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，可知$X$的分布函数

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases} EX=\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}$$
$$=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

故应填$\frac{2}{3}$.

4.【答案】$1-\frac{1}{\mathrm{e}}$

解 由于 $X\sim E(1), a>0$, 则由指数分布的分布函数有

$$P\{Y\le a+1|Y>a\}=\frac{P\{Y>a,Y\le a+1\}}{P\{Y>a\}}=\frac{P\{a<Y\le a+1\}}{1-P\{Y\le a\}}$$
$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-(a+1)}-(1-\mathrm{e}^{-a})}{1-(1-\mathrm{e}^{-a})}=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-a-1}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

5.【答案】$(8.2,10.8)$

解 μ 的置信区间为 $\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

已知 $\bar{x}=9.5$,置信上限为 10.8,则 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=1.3$, 所以置信下限为 8.2.

故应填 $(8.2,10.8)$.

二、选择题

1.【答案】C.

【解析】 $D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)$

由 $X-U(0,3)$, $D(X)=\frac{(3-0)^2}{12}=\frac{3}{4}$；

$$Y\sim P(2),\quad D(Y)=2$$

所以 $D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=9$, 选（C）.

2.【答案】D.

【解析】由题意 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

$$且f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}},-\infty<y<+\infty,$$

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty$

$$又E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1$$

又因为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2+2x^2-2xy}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2-xy\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{2}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}},-\infty<y<+\infty$$

故 $Y\sim N(0,2), D(Y)=2$;
所以

$$\rho_{xy}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1-0}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{选 (D).}$$

3.【答案】D
【解析】 A,B,C 中恰有一个事件发生即 $(A\cup B\cup C)-(AB\cup BC\cup AC)$. 因为 $P(AB)=0$, 故 $P(ABC)=0$. 所以恰有一个事件发生可以只考虑 $(A\cup B\cup C)-(BC\cup AC)$ 的概率

$$P\big((A\cup B\cup C)-(BC\cup AC)\big)=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AC)-P(BC)-P(AC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

答案选(D).

4.【答案】A
解 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可知, $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 所以 $\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0.5$. 又已知 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 (x)\,\mathrm{d}x=0.3$.
所以, $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.2$. 故应选 A.

5.【答案】D
解 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时可接受 H_0, 则检验统计量 $|Z|\le U_{0.025}$, 则 $|Z|\le U_{0.005}$.
故应选 D.

三、

解: (1) 设 B = “取出的一个球是白球”, 再设 A_i = “取到了第 i 箱”, $i=1,2,3$, 则 由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\right)=\frac{53}{120}$$

(2) $P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{53}{120}}=\frac{1}{15}\times\frac{120}{53}=\frac{8}{53}$
四、解：(1) 利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2+z-\frac{1}{2}z^2}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}e^{-\frac{1}{4}z^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z^2\right.}d\left(\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2\left(\sqrt{2}\right)^2z^2}}$$

故有: $Z\sim N(0,2)=N(0,1^2+1^2)$

(2) 若 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立 n 个正态变量, $X_i\sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$
$\left(i=\overline{1,n}\right)$, 则 $Z=b+\sum_{i=1}^{n}a_i X_i$ 亦为 正态变量 $(a_1,\cdots,a_n$ 不全为 0） 且

$$Z\sim N\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$$

五、

解:$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)Y\sim U[0,1]\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$
$$=P(X=0)P(Y\le z)+P(X=1)P(Y\le z-1)+P(X=2)P(Y\le z-2)$$
$$=\frac{4}{9}F_Y(z)+\frac{4}{9}F_y(z-1)+\frac{1}{9}F_Y(z-2)$$
$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z\quad, & 0\le z<1\\ \frac{4}{9}+\frac{4}{9}(z-1)=\frac{4}{9}z, & 1\le z<2\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}\quad, & 2\le z<3\\ 1\quad, & z\ge 3\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z, & 0\le z<2\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2\le z<3\\ 1, & z\ge 3\end{cases}$$

$$EZ=E(X+Y)=EX+EY=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

六、解:

(1) 由题设 $\begin{cases}EX=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\\ DX=EX^2-(EX)^2=\frac{(\theta_1-\theta_2)^2}{12}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2EX \\ \theta_2 - \theta_1 = 2\sqrt{3}\sqrt{EX^2 - (EX)^2} \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} \theta_1 = EX - \sqrt{3}\sqrt{EX^2 - (EX)^2} \\ \theta_2 = EX + \sqrt{3}\sqrt{EX^2 - (EX)^2} \end{cases}$

于是 θ_1, θ_2 矩估计为 $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \bar{x} - \sqrt{3}s^* \\ \hat{\theta}_2 = \bar{x} + \sqrt{3}s^* \end{cases}$ $s^* = \sqrt{s^{*2}}$

（2）似然函数 $L(x_1, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_1 - \theta_2)^n}, & \theta_1 \le x_1 \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \le x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)} \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

∴ 利用似然估计定义:

θ_1, θ_2 似然估计为 : $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = x_{(1)} \\ \hat{\theta}_2 = x_{(n)} \end{cases}$

七、

解: 令 $A.$ 表示器皿产生了甲类细菌而没有产生乙类细菌事件, 而 A_i 表示产 生了 i 个细菌的事件 ($i = 1,2,3, \ldots$) 。

于是有:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i A$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A|A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} = e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}} - 1\right) = e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{-\lambda}$$