2022 年秋概率论与数理统计 C 试题及答案

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设事件 A ，B 都不发生的概率为 0.3,且 $P(A)=0.4$,则 B 发生而 A 不发生的概率为________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x^3e^{-x^2}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 $Y=2X+3$ 的概率密度为________.

3. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X>1)=$________.

4. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布，$Y\sim N(1,4)$，且 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，根据切比晓夫不等式有：$P(-4+2Y\leq X\leq 2Y+4)\ \geq$________.

5. 已知一批零件的长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 σ 未知，从中随机抽取 9 个零件，得样本均值 $\bar{x}=20$ ，样本方差 $s^2=4$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.（保留小数点后三位）

$$\begin{pmatrix} t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.05}(8)=1.8595, \quad t_{0.025}(9)=2.2622, \\ t_{0.05}(9)=1.8331, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95 \end{pmatrix}$$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设 $0<P(B)<1, P(A_1)\,P(A_2)>0$，且 $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列等式成立的是（　　）

A. $P(A_1\cup A_2|\bar{B})=P(A_1|\bar{B})+P(A_2|\bar{B})$

B. $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

C. $P(A_1\cup A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

D. $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

2. 如下四个函数，能做为随机变量的分布函数的是（　　）

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ sinx, & 0\leq x<\pi\\ 1, & x\geq\pi\end{cases}$　　B. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$

C．$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctanx, x\in R$　　D. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

3. 设随机变量$X_i, i=1,2$ 的分布列为

$$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

且满足$P(X_1X_2=0)=1$，则$P(X_1=X_2)=$(　　)

A．0　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

4. 设随机变量X与Y相互独立，且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(|X-Y|<1)$（　）

A. 与μ无关，而与σ^2有关，　B．与 μ 有关，而与 σ^2 无关，

C．与μ，σ^2 都有关　　D. 与μ，σ^2 都无关

5. 设 $X_1, X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，统计量 $Y=\frac{1}{n}(\frac{S}{\bar{X}-\mu})^2$

其中 $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则（　　）.

（A）$Y\sim x^2(n-1)$；（B）$Y\sim t(n-1)$；（C）$Y\sim F(n-1,1)$；（D）$Y\sim F(1,n-1)$.

三、（9分）两箱产品,第一个箱子里面装有10个合格品和40个次品，第二个箱子里面装有18个合格品和12个次品，随机挑中两个箱子中的一个并随机拿出两个产品，如果第一次拿出的是合格品，问第二次拿出的也是合格品的概率是多少？

四.（8 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求（1）在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）$Z=X+Y$的分布函数$F_Z(z)$.

五、（9分）设二维随机变量(X,Y)在区域$G=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$内服从均匀分布，求（1）$P(X<Y)$；（2）随机变量$Z=\max(X,Y)$的概率密度；(3) $E(Z), D(Z)$.

六、（10 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，$\theta>0$，$X_1, X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

（1）未知参数θ的矩估计$\hat{\theta}_1$和最大似然估计$\hat{\theta}_2$；

（2）讨论上述矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性。

七、（4 分）设随机变量 X 只取$[0,1]$上的值，证明：$\mathrm{D}(X) \le \frac{1}{4}$，并说明等号成立的条件。

答案

一、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. 0.3　　2. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<3\\ (\frac{y-3}{2})^3 e^{-(\frac{y-3}{2})^2}, & y\ge 3\end{cases}$　　3. $1-3e^{-2}$

4. 1/4　　5. （18.463, 21.537）

二、单项选择题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1.B　2.C　3.A　4.A　5.C

三 、（9分）设A_i ={第i次拿出的是合格品}，B_i ={抽到的是第i箱}，i=1,2

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},\ P(A_1|B_1)=\frac{1}{5},\ P(A_1|B_2)=\frac{3}{5}$$

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{2}{5}$$

$$P(A_1A_2)=P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{17}{29}=\frac{276}{1421}=0.1943$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{690}{1421}=0.4858$$

四、（8分）解 （1）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

当Y=$y,(0<y<1)$时，X的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2-x-y}{(3/2)-y}=\frac{2(2-x-y)}{3-2y}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）方法一（分布函数法）$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}(2-x-y)\mathrm{d}y=z^2-\dfrac{z^3}{3}, & 0\le z<1\\ 1-\int_{z-1}^1 \mathrm{d}y\int_{z-y}^1(2-x-y)\mathrm{d}x=1-\dfrac{1}{3}(2-z)^3=\dfrac{z^3}{3}-2z^2+4z-\dfrac{5}{3}, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

方法二（公式法） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z, & 0<x<1, x<z<x+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z(2-z)\mathrm{d}x=2z-z^2, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}x=(z-2)^2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(z)\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z(2t-t^2)\mathrm{d}t=z^2-\dfrac{z^3}{3}, & 0\le z<1\\ \int_0^1(2t-t^2)\mathrm{d}t+\int_1^z(2-t)^2\mathrm{d}t=1-\dfrac{1}{3}(2-z)^3, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

五、（9分）随机变量X,Y的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1）$P(X<Y)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^1(2-x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$

(2)（方法一）

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X\le z, Y\le z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ \dfrac{z}{2}, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（方法二）X的概率密度和分布函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y=1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Y的概率密度及分布函数分别为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y/2, & 0\le y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

X,与Y相互独立,所以 $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ \frac{z}{2}, & 1\le z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$

$$f_z(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(3) $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 z^2\mathrm{d}z+\int_1^2\frac{z}{2}\mathrm{d}z=\frac{13}{12}$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2f_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 z^3\mathrm{d}z+\int_1^2\frac{z^2}{2}\mathrm{d}z=\frac{17}{12}$$

$$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\frac{17}{12}-\left(\frac{13}{12}\right)^2=\frac{35}{144}$$

六、（10 分）解：(1) 矩估计：

$$EX=\mu_1=\int_\theta^{+\infty}e^{-(x-\theta)}x\mathrm{d}x=\int_\theta^{\infty}-x\mathrm{d}e^{-(x-\theta)}=-xe^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty+(-e^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty=\theta+1,$$

$\theta=\mu_1-1$

所以θ的矩估计为：$\hat{\theta}_1=\bar{X}-1$

最大似然估计：

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x_i>\theta(i=1,2,\ldots,n) \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x_{(n)}\ge x_{(n-1)}\ge\cdots\ge x_{(1)}>\theta \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

于是由最大似然估计的定义知：θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_2=X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$

（2）因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，

所以 $E(X_i)=\theta+1=E(X)(i=1,2,\cdots.n)$ ，

$$E(\bar{X}-1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)-1=\frac{1}{n}\times n\times(\theta+1)-1=\theta$$

从而 $\hat{\theta}_1=\bar{X}-1$为θ的无偏估计。

令 $N=X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F_N(z)$.

则

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)]^n=\begin{cases} 0, & z\le\theta \\ 1-e^{-n(z-\theta)}, & z>\theta \end{cases}.$$

$$(F_X(z)=\int_{-\infty}^{z} f_X(x)dx=\begin{cases} 0, z\le\theta \\ 1-e^{-(z-\theta)}, z>\theta \end{cases})$$

所以 N的概率密度为 ：

$$f_N(z)=F_N'(z)=\begin{cases} ne^{-n(z-\theta)}, z>\theta \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$EN=\int_{\theta}^{\infty} z\times ne^{-n(z-\theta)}\mathrm{d}z=\int_{\theta}^{\infty}-z\mathrm{d}e^{-n(z-\theta)}=-ze^{-n(z-\theta)}\Big|_{\theta}^{\infty}+(-\frac{1}{n}e^{-n(z-\theta)}\Big|_{\theta}^{\infty})=\theta+\frac{1}{n}\ne\theta$$

所以$X_{(1)}$不是θ的无偏估计。

七、（4分）**（方法一）**

因$0\le X\le 1$，故$0\le \mathrm{E}X\le 1$，以及$X^2\le X$. 故

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\left(E(X)\right)^2\le \mathrm{E}(X)-\left(\mathrm{E}(X)\right)^2=\mathrm{E}(X)(1-\mathrm{E}(X))$$

但函数$x(1-x)$ 在$0\le x\le 1$内不超过1/4，而$0\le \mathrm{E}(X)\le 1$，故

$$\mathrm{D}(X)\le 1/4.$$

等号成立需满足两个条件，即$X^2=X$，$\mathrm{E}(X)=1/2$，前一个条件决定了X只能取0,1为值，后一个条件决定了$P(X=0)=P(X=1)=1/2$，这是唯一达到等号的

条件。

（方法二）因$0 \le X \le 1$,所以$D(X)=E[X-E(X)]^2 \le E[X-\frac{1}{2}]^2 \le E[1-\frac{1}{2}]^2=\frac{1}{4}$

等号成立需满足两个条件，（1）$X^2 = X$等价于X只能取 0,1 为值；

（2）$\mathrm{E}(X) = 1/2$等价于$P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$.