贪心法的例子：
活动选择问题

活动选择问题

输入：$S = \{1, 2, \ldots, n\}$为n 项活动的集合， s_i， f_i 分别为活动 i 的开始和结束时间.

活动 i 与 j 相容 $\Leftrightarrow s_i \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$.

求：最大的两两相容的活动集 A

输入实例：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	2	5	4	5	6	8	8	2
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	13

解：$\{1, 4, 8\}$

贪心算法

挑选过程是多步判断，每步依据某种“短视”的策略进行活动选择，选择时注意满足相容性条件.

策略1：开始时间早的优先

排序使 $s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$，从前向后挑选

策略2：占用时间少的优先

排序使得 $f_1 - s_1 \le f_2 - s_2 \le \ldots \le f_n - s_n$，从前向后挑选

策略3：结束早的优先

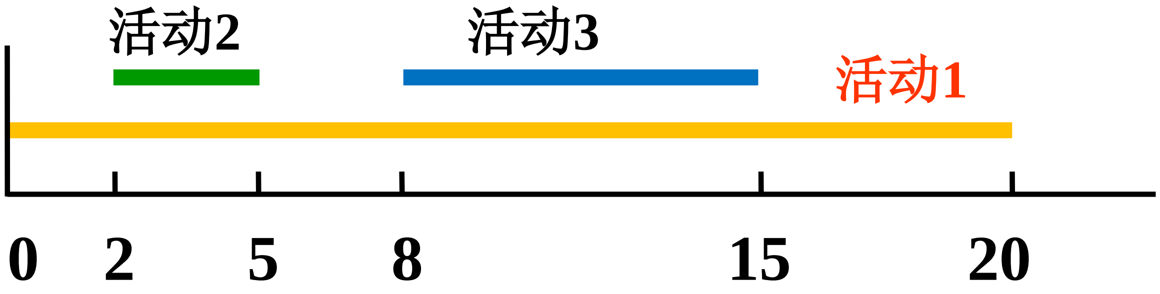
排序使 $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$，从前向后挑选

策略1的反例

策略1：开始早的优先

反例：S ={1,2,3 }

s_1=0, f_1=20, s_2=2, f_2=5, s_3=8, f_3=15

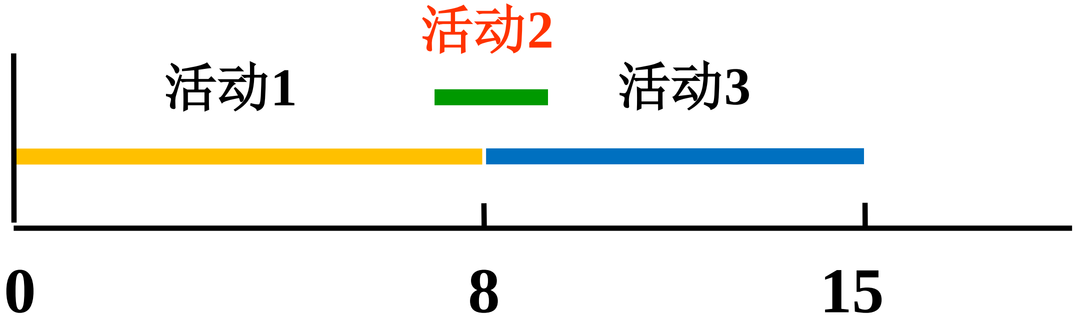


策略2的反例

策略2：占时少的优先

反例： $S = \{ 1, 2, 3 \}$

$s_1=0$, $f_1=8$, $s_2=7$, $f_2=9$, $s_3=8$, $f_3=15$



策略3伪码

算法 Greedy Select

输入：活动集 S，s_i, f_i，

$i = 1, 2, \ldots, n$，$f_1 \leq \ldots \leq f_n$

输出：$A \subseteq S$，选中的活动子集

1. $n \leftarrow length[S]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. for $i \leftarrow 2$ to n do
5.   if $s_i \geq f_j$
6.   then $A \leftarrow A \cup \{ i \}$
7. $j \leftarrow i$
8. return A

已选入的最后标号

判相容

完成时间 $t = \max \{ f_k : k \in A \}$

运行实例

输入：$S = \{ 1, 2, \ldots , 10 \}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

解：$A = \{1, 4, 8\}$，$t = 11$

时间复杂度

$$O(nlogn) + O(n) = O(nlogn)$$

如何证明该算法对所有的实例
都得到正确的解？

贪心算法的特点

设计要素：

(1) 贪心法适用于组合优化问题.

(2) 求解过程是多步判断过程，最终的判断序列对应于问题的最优解.

(3) 依据某种“短视的”贪心选择性质判断，性质好坏决定算法的成败.

(4) 贪心法必须进行正确性证明.

(5) 证明贪心法不正确的技巧：举反例.

贪心法的优势：算法简单，时间和空间复杂性低

贪心法正确性
证明：活动选择

一个数学归纳法的例子

例：证明对于任何自然数n，

$$1+2+\ldots+n = n\,(n+1)/2$$

证 $n=1$, 左边=1, 右边=$1\times(1+1)/2=1$

假设对任意自然数 n 等式成立，则

$$
\begin{aligned}
&1+2+\ldots+(n+1)\\
&= (1+2+\ldots+n) + (n+1)\\
&= n(n+1)/2 + (n+1)\\
&= (n+1)\,(n/2+1)\\
&= (n+1)\,(n+2)/2
\end{aligned}
$$

归纳假设代入

第一数学归纳法

适合证明涉及自然数的命题 $P(n)$

归纳基础：证明$P(1)$为真 (或$P(0)$为真).

归纳步骤：若对所有n有$P(n)$为真，证明 $P(n+1)$为真

$$\forall n,\ P(n) \to P(n+1)$$

$$P(1)$$

$$n=1,\quad P(1) \Rightarrow P(2)$$

$$n=2,\quad P(2) \Rightarrow P(3)$$

$$\cdots$$

第二数学归纳法

适合证明涉及自然数的命题 $P(n)$

归纳基础：证明 $P(1)$为真 (或$P(0)$为真).

归纳步骤：若对所有小于n 的 k 有 $P(k)$真，

证明 $P(n)$为真

$$\forall k\,(\,k<n \wedge P(k)\,) \to P(n)$$

$$P(1)$$

$n=2$， $P(1) \Rightarrow P(2)$

$n=3$, $P(1)\wedge P(2) \Rightarrow P(3)$

…

两种归纳法的区别

归纳基础一样　　　$P(1)$为真

归纳步骤不同

证明逻辑

归纳法1：　$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3)\ldots$

归纳法2：

$$\left.\begin{array}{r} P(1) \\ P(2) \\ \left.\begin{array}{r} P(1) \\ P(1) \Rightarrow P(2) \end{array}\right\} \Rightarrow P(3) \end{array}\right\} \Rightarrow P(4)\ \ldots$$

算法正确性归纳证明

证明步骤:

1. 叙述一个有关自然数n的命题，该命题断定该贪心策略的执行最终将导致最优解. 其中自然数 n 可以代表算法步数或者问题规模 .

2. 证明命题对所有的自然数为真 .
   归纳基础(从最小实例规模开始)
   归纳步骤(第一或第二数学归纳法)

活动选择算法的命题

命题

算法 Select执行到第 k 步，选择 k 项活动

$$i_1 = 1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$$

则存在最优解 A包含活动 $i_1=1, i_2,\ldots, i_k$.

根据上述命题：对于任何 k，算法前 k 步的选择都将导致最优解，至多到第 n 步将得到问题实例的最优解

归纳证明：归纳基础

令 $S=\{1,2,\ldots,n\}$是活动集,且$f_1 \le \ldots \le f_n$

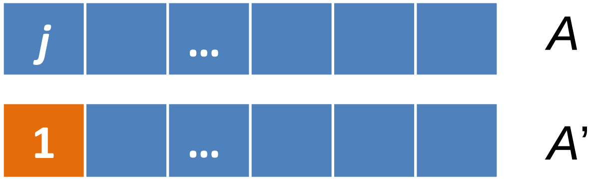
归纳基础：$k=1$, 证明存在最优解包含活动 1

证 任取最优解A， A中活动按截止时间递增排列．如果A的第一个活动为j，$j \ne 1$，用1替换A的活动j得到解A'，即

$$A' = (A-\{j\}) \cup \{1\},$$

由于$f_1 \le f_j$，A'也是最优解，且含有1.

$$f_1 \le f_j$$



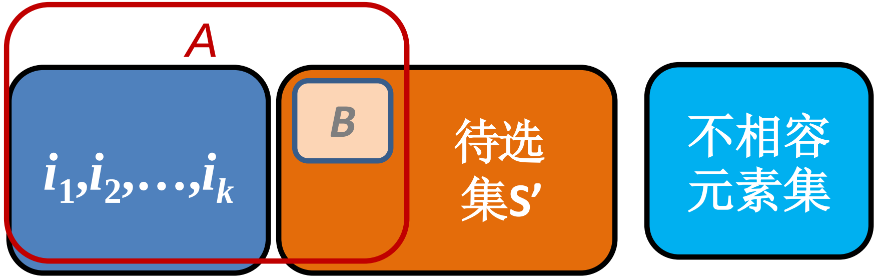
归纳步骤

假设命题对k为真，证明对$k+1$也为真.

证　算法执行到第 k 步，选择了活动$i_1=1$, $i_2, \ldots, i_k$，根据归纳假设存在最优解 A包含$i_1=1, i_2, \ldots, i_k$，A中剩下活动选自集合S'

$$S' = \{\, i \mid i \in S,\ s_i \geq f_k \,\}$$

$$A = \{\, i_1, i_2, \ldots, i_k \,\} \cup B$$

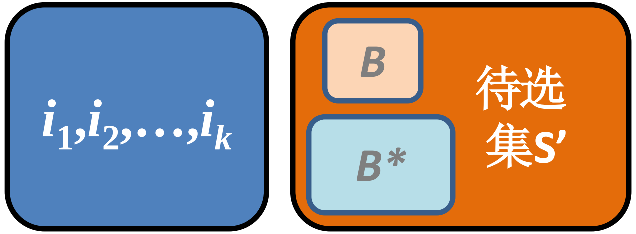


归纳步骤（续）

B是 S'的最优解.（若不然，S' 的最优解为B^*, B^*的活动比 B多，那么

$$B^* \cup \{1, i_2, \ldots, i_k\}$$

是 S 的最优解，且比 A的活动多,与 A 的最优性矛盾.）



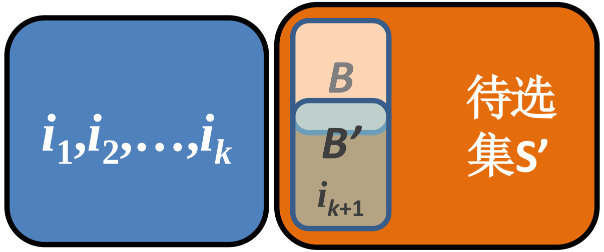
归纳步骤(续)

将S' 看成子问题，根据归纳基础，

存在 S' 的最优解B' 有S' 中的第一个活动 i_{k+1}, 且 $|B'| = |B|$, 于是

$$\{ i_1, i_2, \ldots , i_k \} \cup B'$$
$$= \{ i_1, i_2, \ldots , i_k , i_{k+1} \} \cup (B' - \{ i_{k+1} \})$$

也是原问题的最优解.



小结

- 贪心法正确性证明方法：数学归纳法
  第一数学归纳法、第二数学归纳法

- 活动选择问题的贪心法证明：
  叙述一个涉及步数的算法正确性命题
  证明归纳基础
  证明归纳步骤

最优装载问题

最优装载问题

问题：

n 个集装箱1, 2, … , n 装上轮船，集装箱 i 的重量 w_i, 轮船装载重量限制为C, 无体积限制. 问如何装使得上船的集装箱最多？不妨设每个箱子的重量 $w_i \le C$.

该问题是0-1背包问题的子问题. 集装箱相当于物品，物品重量是 w_i，价值 v_i 都等于1，轮船载重限制 C 相当于背包重量限制 b.

建模

设 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 表示解向量，$x_i = 0,1$，
$x_i = 1$当且仅当第 i 个集装箱装上船

目标函数 $\max \sum_{i=1}^{n} x_i$

约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$

$x_i = 0,1 \quad i = 1,2,\ldots,n$

算法设计

- 贪心策略：轻者优先
- 算法设计：
  将集装箱排序，使得

$$w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$$

按照标号从小到大装箱，直到装入下一个箱子将使得集装箱总重超过轮船装载重量限制，则停止.

正确性证明思路

- 命题：对装载问题任何规模为 n 的输入实例，算法得到最优解.
- 设集装箱从轻到重记为1, 2, … , n.

  归纳基础　证明对任何只含 1个箱子的输入实例，贪心法得到最优解.
  显然正确.

- 归纳步骤　证明：假设对于任何n个箱子的输入实例贪心法都能得到最优解，那么对于任何n+1个箱子的输入实例贪心法也得到最优解.

归纳步骤证明思路

$N=\{1,2,\ldots,n+1\}$, $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{n+1}$

⇓

去掉箱子1，令 $C' = C - \{w_1\}$，
得到规模 n 的输入 $N' = \{2,3,\ldots,n+1\}$

⇓

关于输入 N' 和C'的最优解 I'

⇓

在 I' 加入箱子1，得到 I

⇓

证明 I 是关于输入 N 的最优解

正确性证明

假设对于 n 个集装箱的输入，贪心法都可以得到最优解，考虑 输入

$$N = \{ 1, 2, \ldots , n+1 \}$$

其中 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{n+1}$.

由归纳假设，对于

$$N' = \{2, 3, \ldots, n+1\},\quad C' = C - w_1,$$

贪心法得到最优解 I'. 令

$$I = I' \cup \{1\}$$

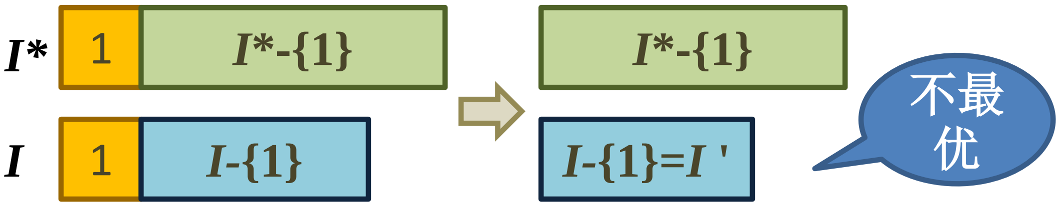
正确性证明(续)

I (算法解)是关于 N 的最优解.

若不然，存在包含 1 的关于 N 的最优解 I^*(如果 I^* 中没有1，用 1 替换 I^* 中的第一个元素得到的解也是最优解), 且 $|I^*|>|I|$；那么$I^*-\{1\}$是 N' 和C' 的解且

$$|I^*-\{1\}| > |I-\{1\}| = |I'|$$

与 I'是关于N' 和C' 的最优解矛盾.



小结

- 装载问题是0-1背包的子问题 (每件物品重量为1)，NP难的问题存在多项式时间可解的子问题.
- 贪心法证明：对规模归纳

最小延迟调度问题

最小延迟调度

问题：

客户集合A，$\forall i \in A$，t_i为服务时间，d_i为要求完成时间，t_i，d_i为正整数. 一个调度 $f: A \to \mathrm{N}$，$f(i)$为客户 i 的开始时间. 求最大延迟达到最小的调度，即求 f 使得

$$\min_f \{\max_{i \in A} \{f(i) + t_i - d_i\}\}$$

$$\forall i, j \in A, i \neq j, f(i) + t_i \le f(j)$$

$$\text{or} \quad f(j) + t_j \le f(i)$$

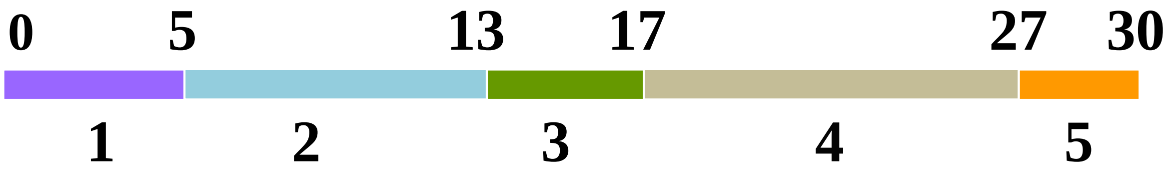
实例：调度1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = <5, 8, 4, 10, 3>$,

$D = <10, 12, 15, 11, 20>$

调度1：顺序安排

$f_1(1)=0$, $f_1(2)=5$, $f_1(3)=13$, $f_1(4)=17$, $f_1(5)=27$



各任务延迟：0, 1, 2, 16, 10;

最大延迟：16

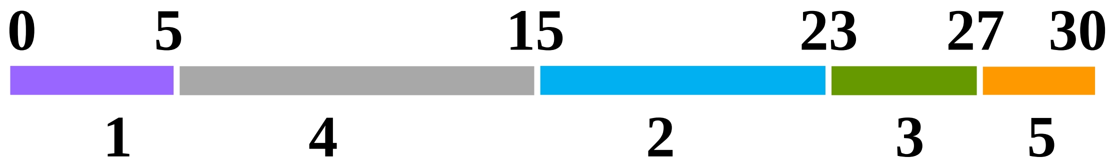
更优的调度2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = <5, 8, 4, 10, 3>$,

$D = <10, 12, 15, 11, 20>$

调度2：按截止时间从前到后安排

$f_2(1)=0$, $f_2(2)=15$, $f_2(3)=23$, $f_2(4)=5$, $f_2(5)=27$



各任务延迟：0, 11, 12, 4, 10;

最大延迟：12

贪心策略

贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排

策略1 对某些实例得不到最优解.

反例：t_1=1, d_1=100, t_2=10, d_2=10

策略2 对某些实例得不到最优解.

反例：t_1=1, d_1=2, t_2=10, d_2=10

策略3伪码

算法 Schedule

输入：A, T, D

输出：f

1. 排序 A 使得 $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$
2. $f(1) \leftarrow 0$ 　从0时刻起
3. $i \leftarrow 2$
4. while $i \le n$ do
5. 　　$f(i) \leftarrow f(i-1) + t_{i-1}$ 　没有空闲
6. 　　$i \leftarrow i + 1$

设计思想：按完成时间从早到晚安排任务，没有空闲.

交换论证：正确性证明

证明思路：

- 分析一般最优解与算法解的区别（成分,排列顺序不同）
- 设计一种转换操作（替换成分或交换次序），可以在有限步将任意一个普通最优解逐步转换成算法的解
- 上述每步转换都不降低解的最优性质

贪心算法的解的性质：

没有空闲时间，没有逆序.

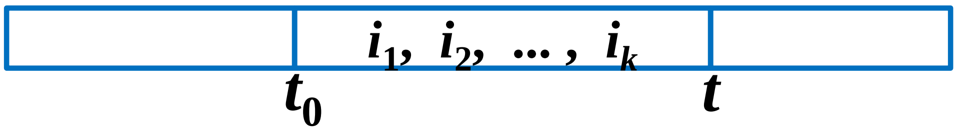
逆序 (i, j): $f(i) < f(j)$ 且 $d_i > d_j$

引理

引理1 所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟.

证： 设 f 没有逆序，在 f 中具有相同完成时间 d 的客户 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 连续安排, 其开始时刻为 t_0, 完成这些任务的时刻是 t， 最大延迟为最后任务延迟 $t-d$, 与 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 的排列次序无关.

$$t = t_0 + (t_{i_1} + t_{i_2} + \ldots + t_{i_k})$$



证明要点

从一个没有空闲的最优解出发，逐步转变成没有逆序的解. 根据引理 1，这个解和算法解具有相同的最大延迟.

(1) 如果一个最优调度存在逆序，那么存在 $i<n$ 使得 $(i, i+1)$ 构成一个逆序，称为相邻的逆序.

(2) 交换相邻逆序 i 和 j，得到的解仍旧最优.

(3) 每次交换后逆序数减 1，至多经过 $n(n-1)/2$ 次交换得到一个没有逆序的最优调度——等价于算法的解.

交换相邻逆序仍旧最优

设 f_1是一个任意最优解，存在相邻逆序 (i, j). 交换 i 和 j 的顺序, 得到解 f_2. 那么 f_2的最大延迟不超过 f_1的最大延迟.

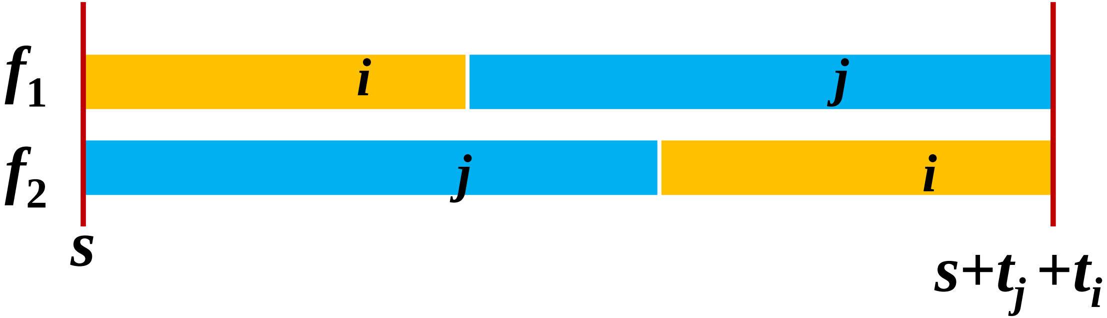
理由：

(1) 交换 i, j 与其他客户延迟时间无关

(2) 交换后不增加 j 的延迟，但可能增加 i 的延迟

(3) i 在 f_2的延迟小于 j 在 f_1 的延迟，因此小于f_1的最大延迟 r

i 在 f_2的延迟不超过 j 在f_1 的延迟



$$\text{delay}(f_2,i)=\underline{s+t_j+t_i}-d_i$$

$$\text{delay}(f_1,j)=\underline{s+t_i+t_j}-d_j$$

$$d_j<d_i$$

$$\text{delay}(f_2,i) < \text{delya}(f_1,j) \leq r$$

小结

贪心法正确性证明方法：交换论证

- 分析算法解与一般最优解的区别，找到把一般解改造成算法解的一系列操作(替换成份、交换次序)
- 证明操作步数有限
- 证明每步操作后的得到解仍旧保持最优

得不到最优解
的处理方法

得不到最优解的处理

- 输入参数分析：
  考虑输入参数在什么取值范围内使用贪心法可以得到最优解

- 误差分析：
  估计贪心法——近似算法所得到的解与最优解的误差（对所有的输入实例在最坏情况下误差的上界）

找零钱问题

问题 设有 n 种零钱， 重量分别为w_1, w_2, ... , w_n, 价值分别为$v_1 = 1$, v_2, ... , v_n. 需要付的总钱数是 y .不妨设币值和钱数都为正整数. 问：如何付钱使得所付钱的总重最轻?

实例

v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18, w_i=1, i=1,2,3,4.
y=28

最优解：x_3=2， x_1=x_2=x_4=0， 总重2

建模

令选用第 i 种硬币的数目是 x_i，

$i = 1, 2, \ldots, n$

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = y, \quad x_i \in \mathrm{N}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

动态规划算法

设$F_k(y)$表示用前 k种零钱，总钱数为 y 的最小重量

$$F_k(y)=\min_{0\le x_k\le\left\lfloor \frac{y}{v_k}\right\rfloor}\{F_{k\text{-}1}(y-v_k x_k)+w_k x_k\}$$

$$F_1(y)=w_1\left\lfloor \frac{y}{v_1}\right\rfloor=w_1 y$$

贪心法

单位价值重量轻的货币优先，设

$$\frac{w_1}{v_1} \geq \frac{w_2}{v_2} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{v_n}$$

使用前 k 种零钱，总钱数为 y

贪心法的总重为 $G_k(y)$，

$$G_k(y) = w_k \left\lfloor \frac{y}{v_k} \right\rfloor + G_{k\text{-}1}(y \bmod v_k) \quad k > 1$$

$$G_1(y) = w_1 \left\lfloor \frac{y}{v_1} \right\rfloor = w_1 y$$

n=1,2贪心法是最优解

$n = 1$ 只有一种零钱，$F_1(y) = G_1(y)$

$n = 2$，x_2越大，得到的解越好

$$\boxed{F_2(y) = \min_{0 \le x_2 \le \lfloor y/v_2 \rfloor} \{F_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2\}}$$

$$\begin{aligned}
& F_1(y - v_2(x_2+\delta)) + w_2(x_2+\delta)] \\
& \quad - [F_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2] \\
& = [w_1(y - v_2 x_2 - v_2\delta) + w_2 x_2 + w_2\delta)] \\
& \quad - [w_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2] \\
& = - w_1 v_2 \delta + w_2 \delta \\
& = \delta(- w_1 v_2 + w_2) \le 0
\end{aligned}$$

$w_1 \ge$
w_2/v_2

判别条件

定理 对每个正整数 k，假设对所有非负整数 y 有$G_k(y) = F_k(y)$，且存在 p 和 δ 满足

$$\boxed{v_{k+1} = pv_k - \delta,}$$

其中 $0 \le \delta < v_k$， $v_k \le v_{k+1}$, p为正整数，

则下面的命题等价：

(1) $G_{k+1}(y) = F_{k+1}(y)$ 对一切正整数 y；

(2) $G_{k+1}(pv_k) = F_{k+1}(pv_k)$；

(3) $w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$.

几点说明

- 根据条件(1)与(3)的等价性，可以对 $k = 3, 4, \ldots, n$，依次利用条件(3)对贪心法是否得到最优解做出判别.
- 条件(3)验证 1 次需 $O(k)$ 时间，$k = O(n)$，整个验证时间$O(n^2)$
- 条件(2)是条件(1) 在 $y = pv_k$ 时的特殊情况. 若条件(1)成立，显然有条件(2)成立. 反之，若条件(2)不成立，则条件(1)不成立，钱数 $y = pv_k$ 恰好提供了一个贪心法不正确的反例.

验证实例

$$v_{k+1} = pv_k - \delta, \quad 0 \le \delta < v_k, \quad p \in Z^+$$
$$w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$$

例 $v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18$, $w_i=1$, $i=1,2,3,4$. 对一切 y 有

$$G_1(y)=F_1(y), \quad G_2(y)=F_2(y).$$

验证 $G_3(y) = F_3(y)$

$$v_3 = pv_2 - \delta \Rightarrow \boxed{p = 3, \delta = 1.}$$

$$w_3+G_2(\delta)=1+1=2$$

$$pw_2=3\times1=3$$

$$\boxed{w_3+G_2(\delta)\le pw_2}$$

贪心法对于 $n=3$ 的实例得到最优解

验证实例

$$v_{k+1} = pv_k - \delta, \quad 0 \le \delta < v_k, \quad p \in Z^+$$
$$w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$$

例 $v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18, w_i=1,$

$i=1,2,3,4.$ 对一切 y 有

$$G_1(y)=F_1(y), G_2(y)=F_2(y), G_3(y)=F_3(y)$$

验证 $G_4(y) = F_4(y)$

$$v_4 = pv_3 - \delta \Rightarrow \boxed{p=2,\ \delta=10}$$

$$w_4 + G_3(\delta)=1+2=3$$

$$pw_3 = 2\times 1=2$$

$$\boxed{w_4 + G_3(\delta) > pw_3}$$

$n=4, y=pv_3=28,$

最优解: $x_3=2$, 贪心法: $x_4=1,\ x_2=2$

小结

- 贪心策略不一定得到最优解，在这种情况下可以有两种处理方法：

  (1) 参数化分析：分析参数取什么值可得到最优解

  (2) 估计贪心法得到的解在最坏情况下与最优解的误差

- 一个参数化分析的例子:找零钱问题