最优前缀码

二元前缀码

- 二元前缀码
  用0-1字符串作为代码表示字符，要求任何字符的代码都不能作为其它字符代码的前缀

- 非前缀码的例子
  a: 001, *b*: 00, *c*: 010, *d*: 01

- 解码的歧义，例如字符串 0100001
  解码1: 01, 00, 001 *d*, *b*, *a*
  解码2: 010, 00, 01 *c*, *b*, *d*

前缀码的二叉树表示

前缀码：

{00000, 00001, 0001, 001, 01,100,101,11}

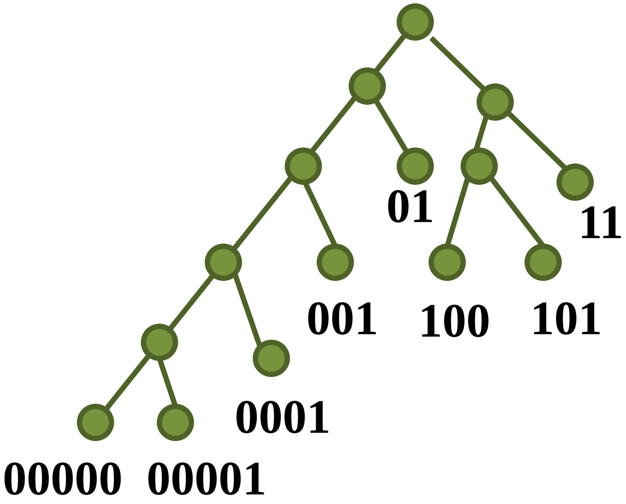
构造树：

0 -左子树

1-右子树

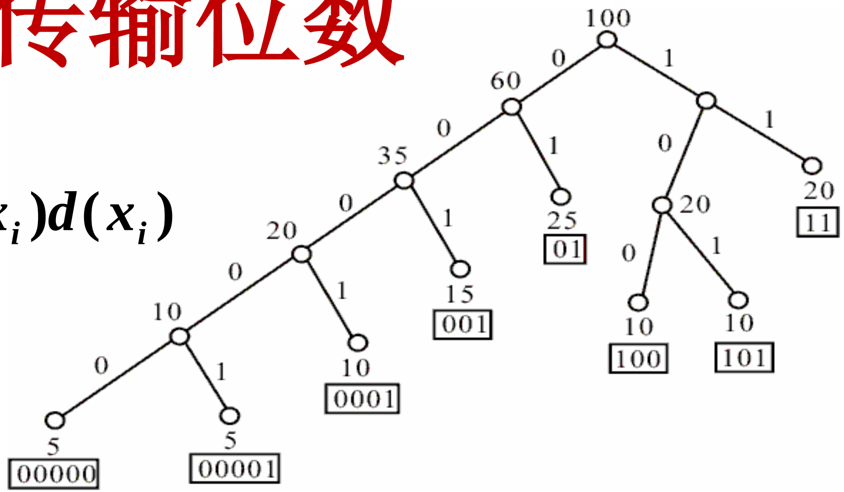
码对应一片树叶

最大位数为树深



平均传输位数

$$B=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)d(x_i)$$



B=[(5+5)×5+10×4+(15+10+10)×3

+(25+20)×2]/100=2.85

问题：给定字符集$C=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$和每个字符的频率$f(x_i)$，$i=1,2,\ldots,n$. 求关于C的一个最优前缀码(平均传输位数最小).

哈夫曼树算法伪码

算法 Huffman(C)

输入： $C=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}, f(x_i), i=1,2,\ldots,n.$

输出： Q / /队列

1. $n\leftarrow|C|$
2. $Q\leftarrow C$ //频率递增队列Q
3. for $i\leftarrow1$ to $n-1$ do
4. $z\leftarrow$Allocate-Node() //生成结点 z
5. $z.left\leftarrow Q$中最小元 //最小作z左儿子
6. $z.right\leftarrow Q$中最小元 //最小作z右儿子
7. $f(z)\leftarrow f(x)+f(y)$
8. Insert(Q,z) // 将 z 插入Q
9. return Q

实例

输入 *a*:45; *b*:13; *c*:12; *d*:16; *e*:9; *f*:5

编码：

f--0000,

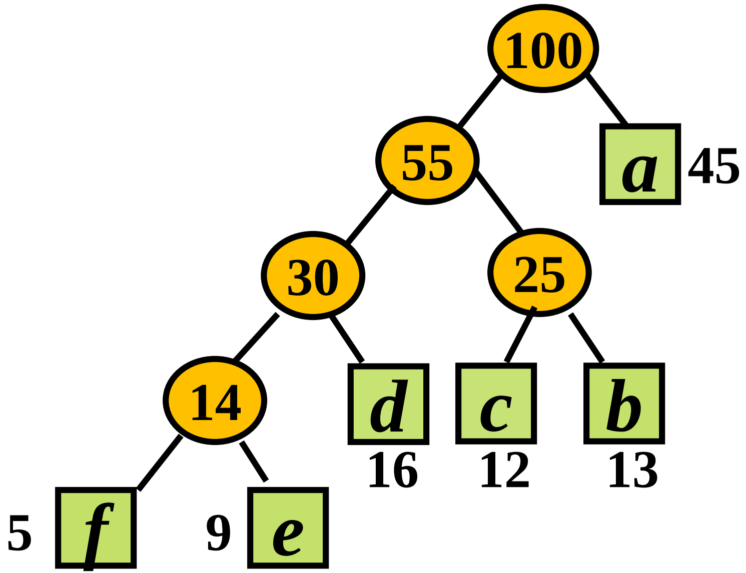
e--0001,

d--001,

c--010,

b—011,

a--1



平均位数：

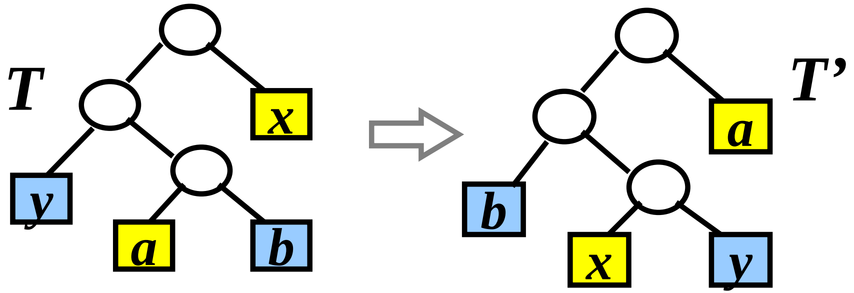
$4\times(0.05+0.09)+3\times(0.16+0.12+0.13)+1\times0.45=2.24$

最优前缀码性质：引理1

引理1: C是字符集，$\forall c \in C$, $f(c)$为频率, $x,y \in C$, $f(x)$, $f(y)$频率最小, 那么存在最优二元前缀码使得 x, y 码字等长且仅在最后一位不同.

$f(x) \le f(a)$

$f(y) \le f(b)$



$$B(T) - B(T') = \sum_{i \in C} f[i] d_T(i) - \sum_{i \in C} f[i] d_{T'}(i) \ge 0$$

其中$d_T(i)$为i 在T 中的层数(i到根的距离)

引理2

引理　设T是二元前缀码的二叉树,$\forall\, x,y \in T$, x, y是树叶兄弟，z 是 x, y的父亲, 令

$$T' = T-\{x, y\}$$

且令 z 的频率

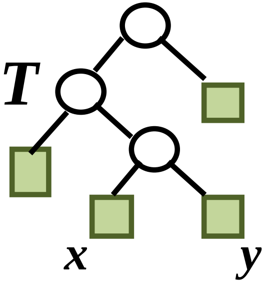
$$f(z) = f(x)+f(y)$$

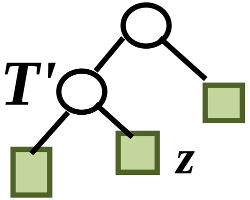
T'是对应二元前缀码

$$C' = (C-\{x, y\})\cup\{z\}$$

的二叉树，那么

$$B(T)=B(T')+f(x)+f(y)$$





引理2证明

证 $\forall c \in C-\{x,y\}$,有

$$d_T(c) = d_{T'}(c) \Rightarrow f(c)d_T(c) = f(c)d_{T'}(c)$$

$$d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) + 1$$

$$B(T) = \sum_{i \in T} f(i) d_T(i)$$

$$= \sum_{i \in T, i \neq x,y} f(i) d_T(i) + f(x) d_T(x) + f(y) d_T(y)$$

$$= \sum_{i \in T', i \neq z} f(i) d_{T'}(i) + f(z) d_{T'}(z) + (f(x) + f(y))$$

$$= B(T') + f(x) + f(y)$$

小结

- 二元前缀码及其二叉树表示
- 给定频率下的平均传输位数计算公式
- 最优前缀码——平均传输位数最少
- 哈夫曼算法
- 前缀码的性质

哈夫曼算法
的证明及应用

两个引理

引理1:设C是字符集，$\forall c\in C$, $f(c)$为频率，$x, y\in C$, $f(x)$, $f(y)$频率最小，那么存在最优二元前缀码使得 x, y 码字等长，且仅在最后一位不同.

引理2 设 T 是二元前缀码所对应的二叉树，$\forall\, x, y\in T$, x, y是树叶兄弟，z 是 x, y 的父亲，令$T' = T-\{x, y\}$, 且令 z 的频率$f(z)=f(x)+f(y)$，T'是对应于二元前缀码 $C' =(C-\{x, y\})\cup\{z\}$的二叉树，那么 $B(T)=B(T')+f(x)+f(y)$.

算法正确性证明思路

定理 **Huffman 算法对任意规模为*n*（*n*≥2）的字符集*C* 都得到关于*C* 的最优前缀码的二叉树.**

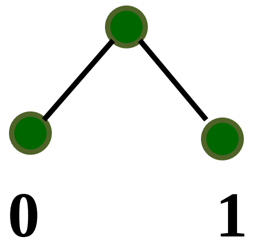
归纳基础 **证明：对于*n*=2的字符集，Huffman算法得到最优前缀码.**

归纳步骤 **证明：假设Huffman算法对于规模为 *k* 的字符集都得到最优前缀码，那么对于规模为*k*+1的字符集也得到最优前缀码.**

归纳基础

n=2，字符集　$C=\{x_1, x_2\}$，

对任何代码的字符至少都需要1位二进制数字. Huffman算法得到的代码是 0 和 1，是最优前缀码.



归纳步骤

假设Huffman算法对于规模为 k 的字符集都得到最优前缀码. 考虑规模为 k+1的字符集

$$C = \{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\},$$

其中 $x_1, x_2 \in C$是频率最小的两个字符.

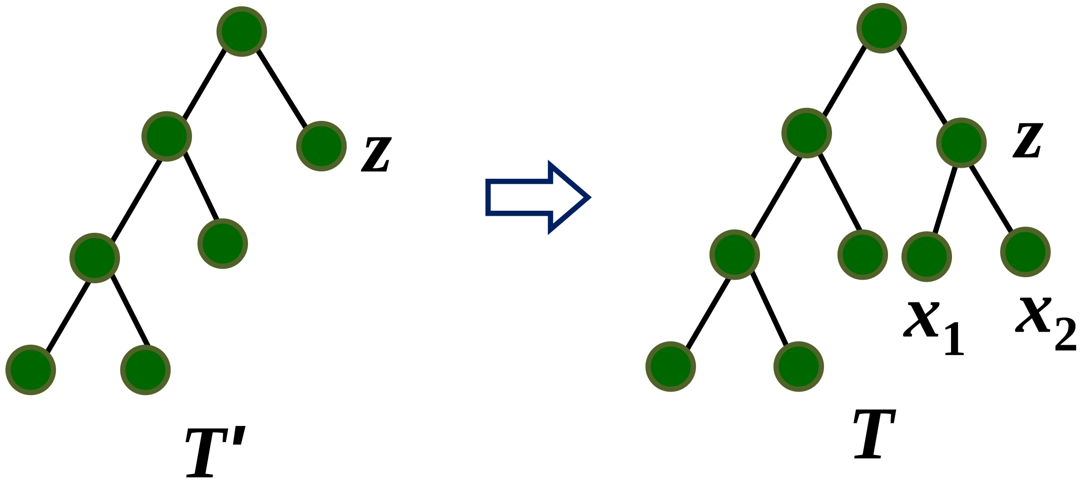
令

$$\boxed{\begin{gathered} C' = (C - \{x_1, x_2\}) \cup \{z\}, \\ f(z) = f(x_1) + f(x_2) \end{gathered}}$$

根据归纳假设，算法得到一棵关于字符集 C',频率$f(z)$和$f(x_i)$ (i =3,4, ...,k+1)的最优前缀码的二叉树T'.

归纳步骤(续)

把 x_1, x_2作为 z 的儿子附到 T'上，得到树T，那么T是关于$C=(C'-\{z\})\cup\{x_1, x_2\}$的最优前缀码的二叉树.



归纳步骤(续)

如若不然, 存在更优树 T^*, $B(T^*)<B(T)$, 且由引理1，其树叶兄弟是 x_1和 x_2.

去掉 T^*中 x_1和 x_2，得到$T^{*\prime}$. 根据引理2

$$B(T^{*\prime}) = B(T^*) - (\underline{f(x_1)+f(x_2)})$$
$$< B(T) - (\underline{f(x_1)+f(x_2)})$$
$$= B(T')$$

与 T'是一棵关于 C'的最优前缀码的二叉树矛盾.

应用:文件归并

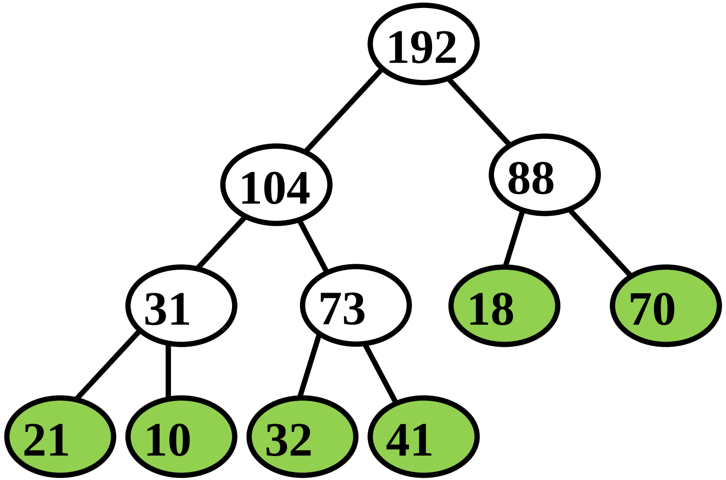
问题：给定一组不同长度的排好序文件构成的集合 $S = \{f_1, \ldots, f_n\}$，其中 f_i 表示第 i 个文件含有的项数. 使用二分归并将这些文件归并成一个有序文件.

归并过程对应于二叉树：

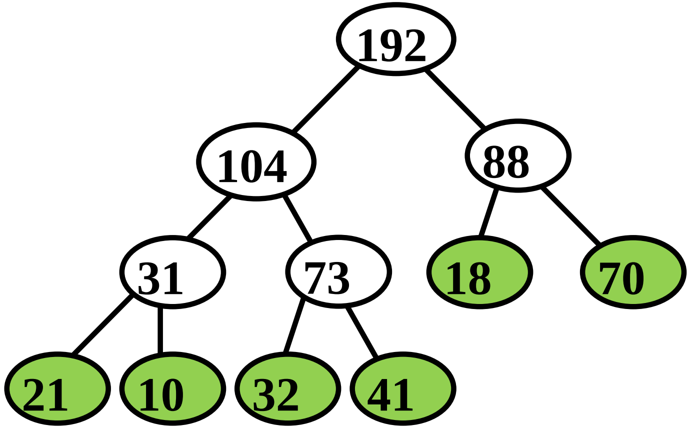
文件为树叶. f_i 与 f_j 归并的文件是它们的父结点.

两两顺序归并

实例：$S = \{ 21,10,32,41,18,70 \}$



归并代价



(1) (21+10–1)+(32+41–1)+(18+70–1)+

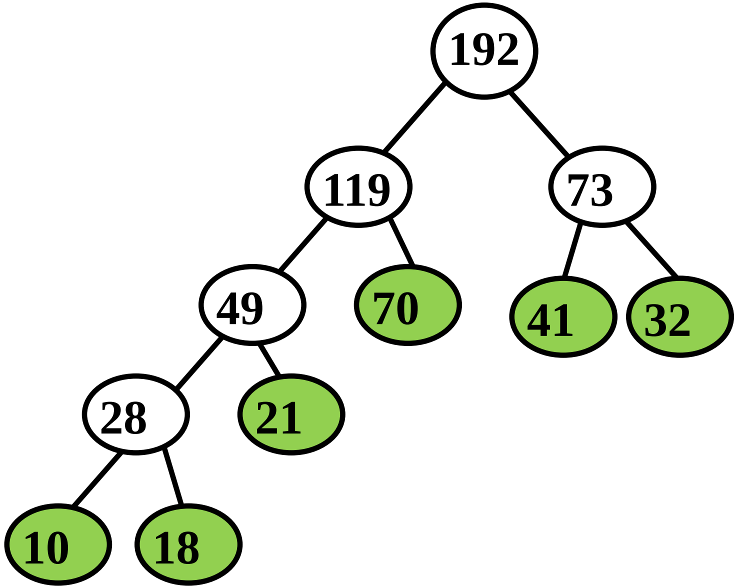
(31+73–1)+(104+88–1) = 483

(2) (21+10+32+41)×3+(18+70)×2–5=483

代价计算公式 $\boxed{\sum_{i \in S} d(i) f_i - (n-1)}$

实例：Huffman树归并

输入：S={21,10,32,41,18,70}



代价: $(10+18)\times4+21\times3+(70+41+32)\times2-5=456$

小结

- 哈夫曼算法的正确性证明：
  对规模归纳
- 哈夫曼算法的应用：
  文件归并

最小生成树

最小生成树

无向连通带权图

$$G = (V, E, W),$$

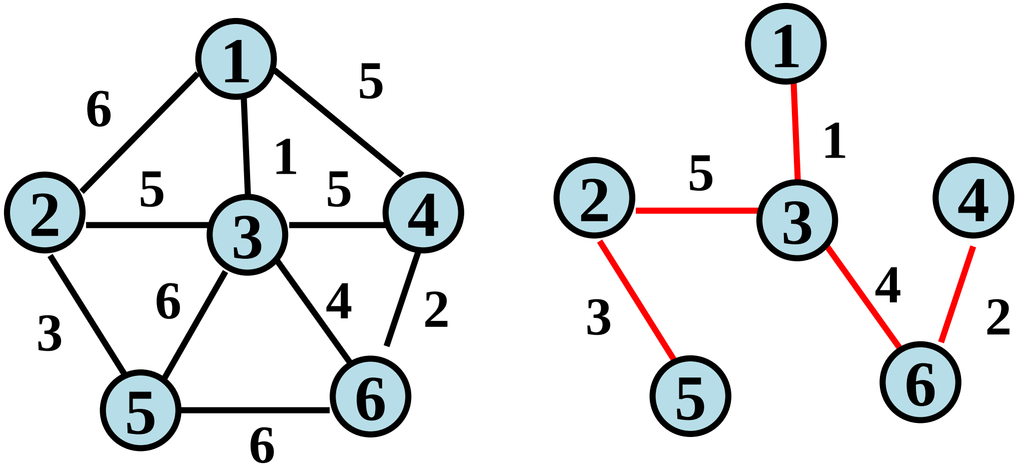
其中 $w(e) \in W$ 是边 e 的权.

G 的一棵生成树 T 是包含了G 的所有顶点的树，树中各边的权之和 $W(T)$ 称为树的权，具有最小权的生成树称为 G 的最小生成树.

最小生成树的实例

$G=(V,E,W)$, $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, W 如图所示.

$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},$
$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,6\},\{5,6\}\}$

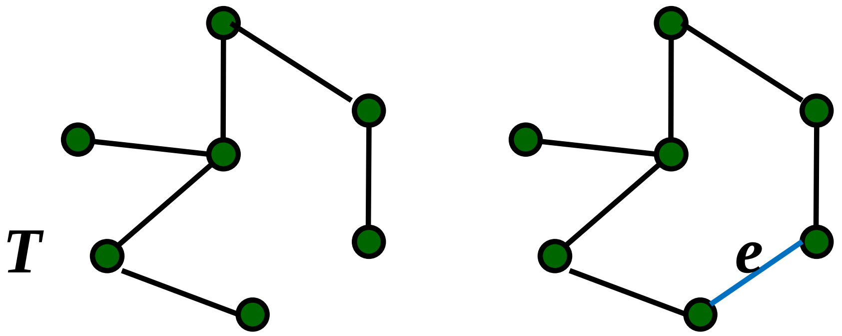


生成树的性质

命题1 设G是 n 阶连通图, 那么

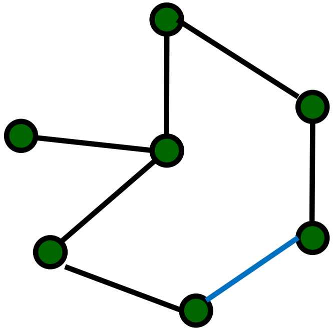
(1) T 是G 的生成树当且仅当T 无圈且有 $n-1$条边.

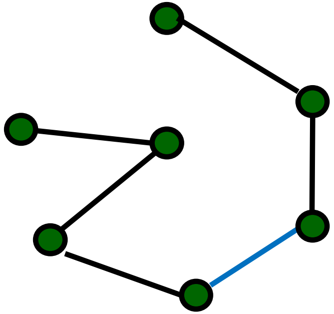
(2) 如果 T 是 G 的生成树，$e\notin T$，那么 $T\cup\{e\}$含有一个圈C (回路).



生成树的性质（续）

(3) 去掉圈C的任意一条边，就得到G的另外一棵生成树T'。





T'

生成树性质的应用

- 算法步骤：选择边.
  约束条件：不形成回路
  截止条件：边数达到 n-1.

- 改进生成树 T 的方法
  在 T 中加一条非树边 e，形成回路 C，在 C 中去掉一条树边 e_i，形成一棵新的生成树 T'

$$W(T') - W(T) = W(e) - W(e_i)$$

若 $W(e) \le W(e_i)$，则 $W(T') \le W(T)$

求最小生成树

问题：

给定连通带权图 $G = (V, E, W)$，$w(e) \in W$是边 e 的权. 求 G 的一棵最小生成树.

贪心法：

Prim 算法，
Kruskal 算法

生成树在网络中有着重要应用

小结

- 生成树与生成树的权
- 最小生成树
- 生成树的性质

Prim算法

设计思想

输入：图 $G=(V,E,W)$, $V=\{1,2,\ldots,n\}$

输出：最小生成树 T

设计思想：

初始 $S = \{1\}$，

选择连接 S 与 $V–S$ 集合的最短边 $e = \{ i, j \}$，其中 $i\in S, j\in V–S$. 将 e 加入树 T，j 加入 S.

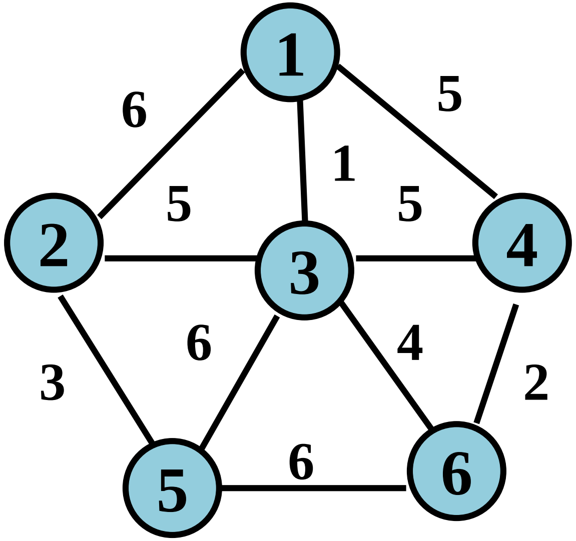
继续执行上述过程，直到 $S=V$ 为止.

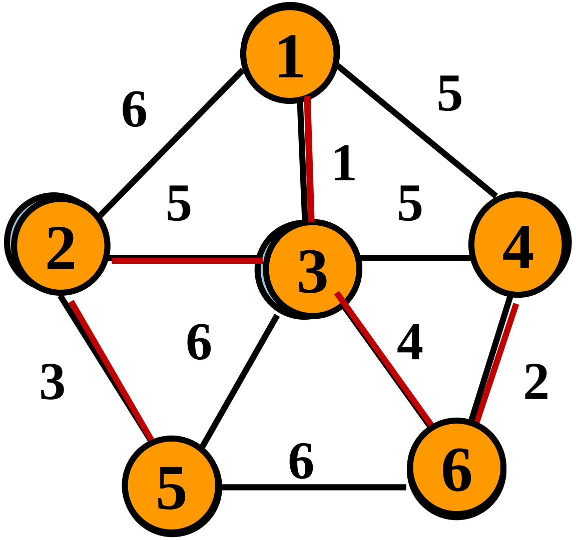
伪码

算法 Prim (*G*, *E*, *W*)

1. $S \leftarrow \{1\}$
2. **while** $V - S \neq \varnothing$ **do**
3. 　　从V–S中选择j使得j到S中顶点的边权最小
4. 　　$S \leftarrow S \cup \{j\}$

实例





正确性证明：归纳法

命题：对于任意 $k < n$，存在一棵最小生成树包含算法前 k 步选择的边.

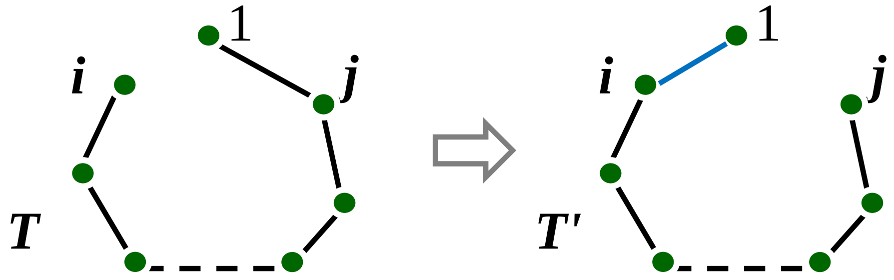
归纳基础： $k = 1$，存在一棵最小生成树 T 包含边 $e = \{1, i\}$，其中$\{1, i\}$是所有关联 1 的边中权最小的.

归纳步骤：假设算法前 k 步选择的边构成一棵最小生成树的边，则算法前 k+1 步选择的边也构成一棵最小生成树的边.

归纳基础

证明：存在一棵最小生成树 T 包含关联结点1的最小权的边e={1,i }.

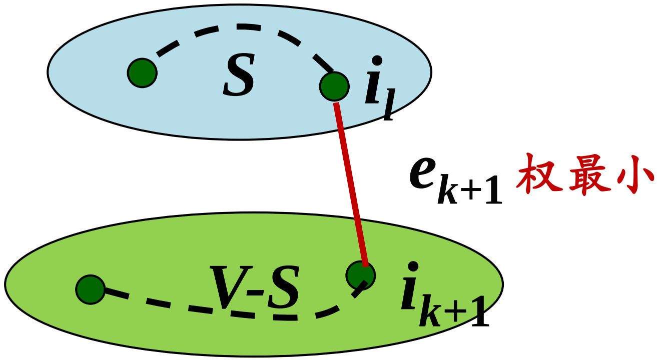
证　设 T 为一棵最小生成树，假设 T 不包含{1, i }, 则$T\cup$\{{1,i }} 含有一条回路，回路中关联1的另一条边{1, j }. 用{1, i }替换{1, j}得到树 T'， 则 T' 也是生成树，且 $W(T') \le W(T)$.



归纳步骤

假设算法进行了k步，生成树的边为$e_1, e_2, \ldots, e_k$，这些边的端点构成集合S. 由归纳假设存在 G 的一棵最小生成树 T 包含这些边.

算法第 k+1 步选择顶点 i_{k+1}, 则 i_{k+1} 到S中顶点边权最小,设此边 $e_{k+1}=\{i_{k+1},i_l\}$. 若$e_{k+1}\in T$，算法k+1步显然正确.



归纳步骤（续）

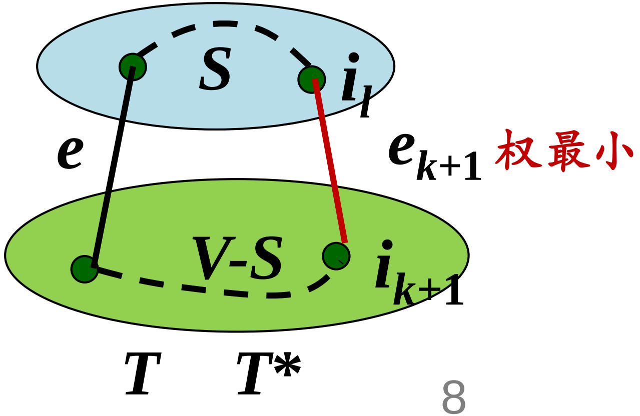
假设 T 不含有 e_{k+1}，则将 e_{k+1} 加到 T 中形成一条回路. 这条回路有另外一条连接 S 与 $V\!-\!S$中 顶点的边 e,

令 $T^* = (T-\{e\}) \cup \{e_{k+1}\}$

则 T^*是 G 的一棵生成树,包含$e_1,e_2,\ldots,e_{k+1}$，且

$W(T^*) \le W(T)$

算法到 k+1步仍得到最小生成树.



时间复杂度

算法步骤执行$O(n)$次

每次执行$O(n)$时间：

找连接 S与V-S 的最短边

算法时间：$T(n) = O(n^2)$

小结

- **Prim算法的设计**
  贪心策略：连接S与V-S的最短边
  正确性证明：对步数归纳
  伪码

- 时间复杂度：$O(n^2)$

Kruskal算法

设计思想

输入：图$G=(V,E,W)$, $V=\{1,2,\ldots,n\}$

输出：G的最小生成树 T

设计思想：

(1) 按照长度从小到大对边排序.

(2) 依次考察当前最短边 e，如果 e与 T 的边不构成回路，则把 e 加入树 T，否则跳过 e. 直到选择了n-1条边为止.

伪码

算法 Kruskal

输入：连通图G　　// 顶点数n，边数m

输出：G 的最小生成树

1. 权从小到大排序E的边, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$

2. $T \leftarrow \varnothing$

3.　repeat

4.　　　$e \leftarrow E$中的最短边

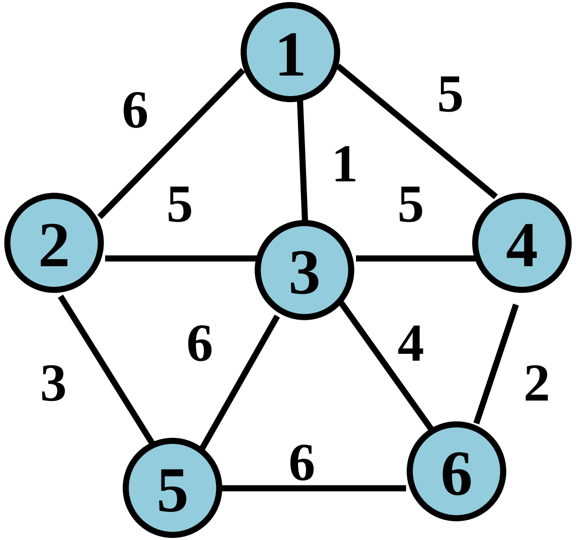
5.　　　if　e 的两端点不在同一连通分支

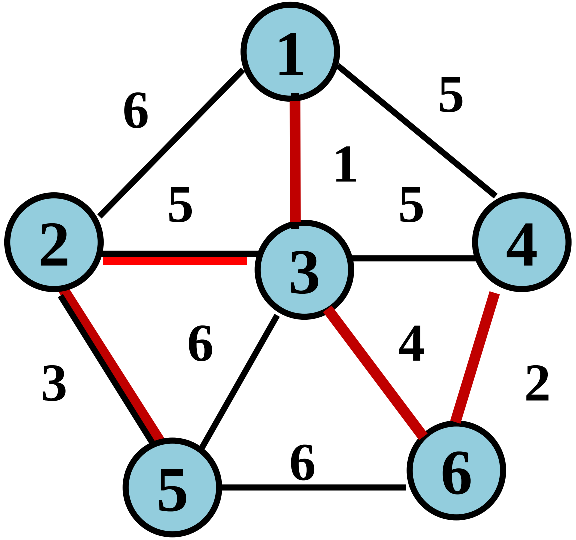
6.　　　then　$T \leftarrow T\cup\{e\}$

7.　　　$E \leftarrow E-\{e\}$

8.　until T 包含了$n-1$条边

实例





正确性证明思路

命题：对于任意 n, 算法对 n 阶图找到一棵最小生成树.

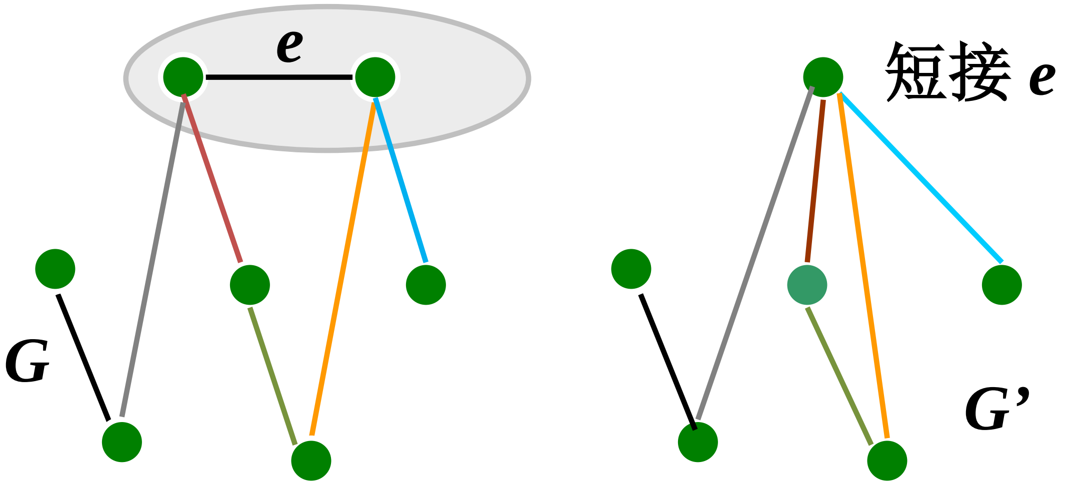
证明思路：

归纳基础　证明：$n = 2$, 算法正确.
G只有一条边，最小生成树就是 G.

归纳步骤　证明：假设算法对于n 阶图是正确的，其中$n>1$，则对于任何$n+1$阶图算法也得到一棵最小生成树.

短接操作

任给 n+1个顶点的图 G，G中最小权边 $e = \{i, j\}$，从G 中短接i 和 j, 得到图 G'.



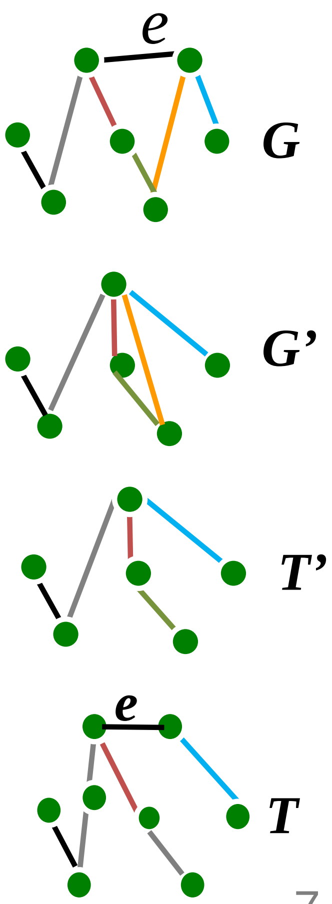
归纳步骤证明

对于任意 n+1阶图G短接最短边e，得到 n 阶图 G'

根据归纳假设算法得到G'的最小生成树 T'

将被短接的边 e “拉伸”回到原来长度，得到树 T

证明 T 是 G 的最小生成树



T是G的最小生成树

$T=T'\cup\{e\}$是关于G的最小生成树.

否则存在G的含边e的最小生成树T^*, $W(T^*)<W(T)$. (如果 $e\notin T^*$, 在T^*中加边e，形成回路. 去掉回路中任意别的边所得生成树的权仍旧最小).

在T^*短接e得到G'的生成树$T^*-\{e\}$,

$$\boxed{\begin{aligned} W(T^*-\{e\}) &= W(T^*) - w(e) \\ &< W(T) - w(e) = W(T') \end{aligned}}$$

与T'的最优性矛盾.

算法实现与时间复杂度

建立FIND数组，FIND[i] 是结点 i 的连通分支标记.

(1) 初始 FIND[i] = i.

(2) 连通分支合并，较小分支标记更新为较大分支标记

每个结点至多更新 log$n$次，
建立和更新 FIND数组: O (n log$n$)

时间：$O(m \log m)+O(n\log n)+O(m)$
$= O(m \log n)$

应用：数据分组问题

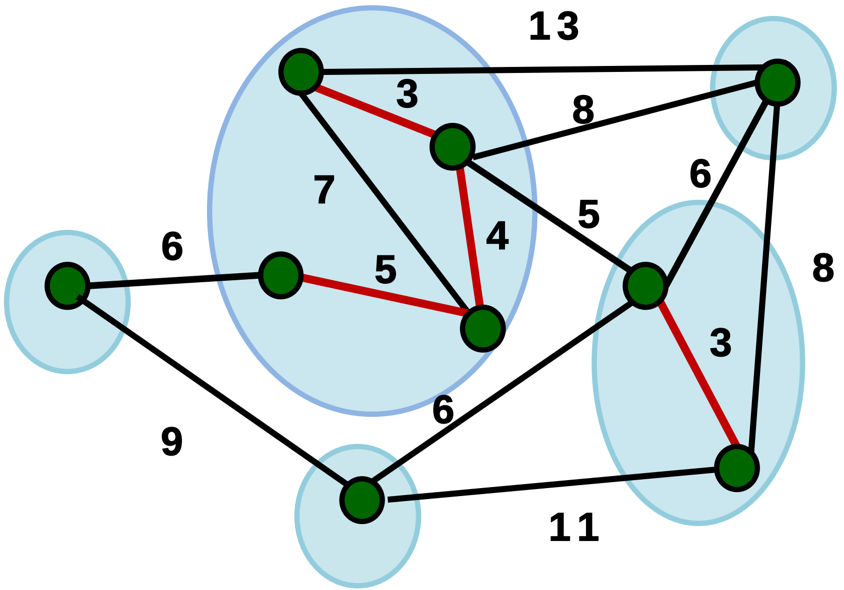
一组数据(照片, 文件, 生物标本)要把它们按照相关性进行分类.

用相似度函数或“距离”来描述个体之间的差距.

如果分成5类，使得每类内部的个体尽可能相近，不同类之间的个体尽可能地“远离”. 如何划分?

10

应用：数据分组问题



单链聚类

类似于**Kruskal**算法

(1) 按照边长从小到大对边排序

(2) 依次考察当前最短边 ***e***， 如果 ***e*** 与 已经选中的边不构成回路，则把 ***e*** 加入集合，否则跳过 ***e*.** 计数图的连通分支个数.

(3) 直到保留了***k***个连通分支为止.

小结

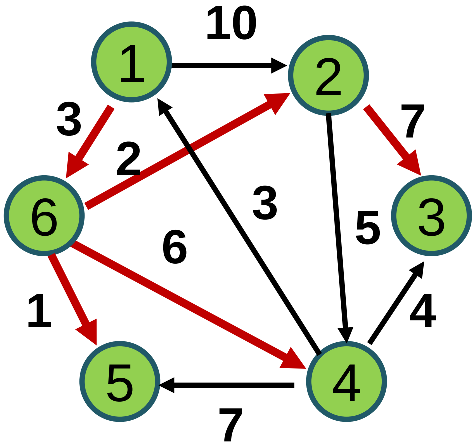
- **Kruskal**算法的贪心策略：在不构成回路条件下选当前最短边
- 正确性证明：对规模归纳
- 时间复杂度：$O(m\log n)$
- 应用：单链聚类

单源最短路径

单源最短路问题

给定带权有向网络 $G=(V,E,W)$，每条边 $e=<i,j>$的权 $w(e)$为非负实数，表示从 i 到 j 的距离. 源点 $s\in V$.

求: 从 s 出发到达其它结点的最短路径.



源点：1

1→6→2：*short* [2] = 5

1→6→2→3：*short* [3] = 12

1→6→4：*short* [4] = 9

1→6→5：*short* [5] = 4

1→6：*short* [6] = 3

Dijkstra算法有关概念

$x \in S \Leftrightarrow x \in V$ 且从 s 到 x 的最短路径已经找到

初始：$S = \{ s \}$，$S = V$ 时算法结束

从s到u相对于S的最短路径：从s到u且仅经过 S 中顶点的最短路径

$dist\ [u]$：从s到u相对S最短路径的长度
$short\ [u]$：从s到u的最短路径的长度
$dist\ [u] \geq short[u]$

算法设计思想

输入：有向图 $G = (V, E, W)$,

$V = \{ 1, 2, \ldots, n \}$，$s = 1$

输出：从s到每个顶点的最短路径

1. 初始 $S=\{1\}$
2. 对于$i \in V-S$，计算1到 i 的相对 S 的最短路，长度 $dist[i]$
3. 选择$V-S$中 $dist$ 值最小的 j，将 j 加入 S，修改$V-S$中顶点的$dist$ 值.
4. 继续上述过程，直到 $S=V$为止.

伪码

算法 Dijkstra

$S \leftarrow \{ s \}$

$dist\,[s] \leftarrow 0$

for $i \in V - \{ s \}$ **do**

  $dist[i] \leftarrow w(s,i)$ //s到i没边, $w(s,i)=\infty$

while $V - S \neq \varnothing$ **do**

  从$V - S$取相对S的最短路径顶点 j

  $S \leftarrow S \cup \{ j \}$

  for $i \in V - S$ **do**

    if $dist\,[j] + w(j,i) < dist\,[i]$

    then $dist\,[i] \leftarrow dist\,[j] + w(j,i)$

更新
dist值

运行实例

输入：*G*=<*V*,*E*,*W*>， 源点 1

V={1,2,3,4,5,6}

S={1},

dist[1]=0

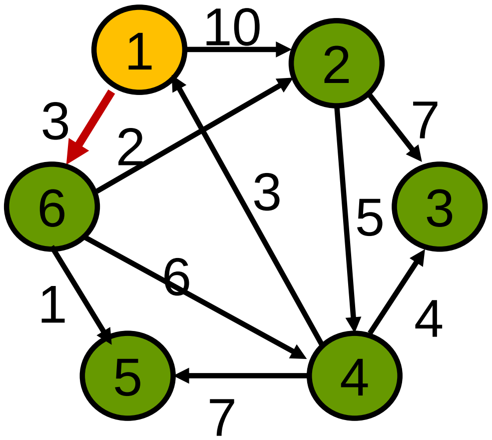
dist[2]=10

dist[6]=3

dist[3]=∞

dist[4]=∞

dist[5]=∞



实例（续）

$S=\{1,6\}$

$dist\ [1] = 0$

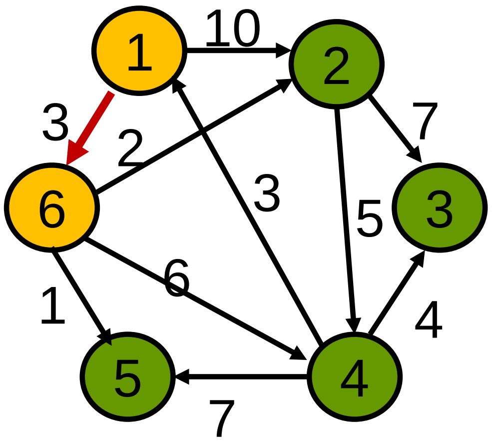
$dist\ [6] = 3$

$dist\ [2] = 5$

$dist\ [4] = 9$

$dist\ [5] = 4$

$dist\ [3] = \infty$



运行实例（续）

S={1,6,5}

dist [1]=0

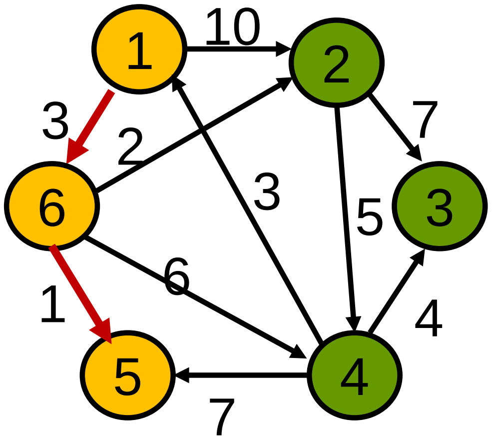
dist [6]=3

dist [5]=4

dist [2]=5

dist [4]=9

dist [3]=∞



运行实例（续）

S ={1,6,5,2}

***dist*[1]=0**

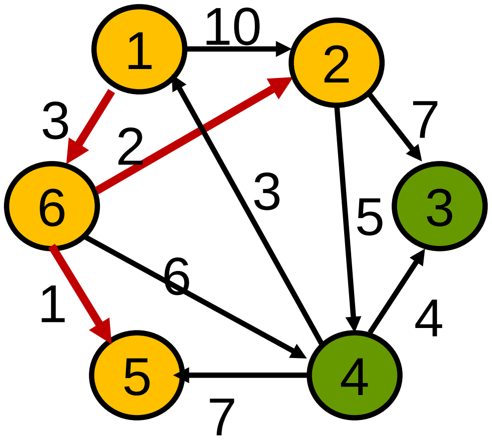
***dist*[6]=3**

***dist*[5]=4**

***dist*[2]=5**

***dist*[4]=9**

***dist*[3]=12**



运行实例（续）

S={1,6,5,2,4}

$dist$[1]=0

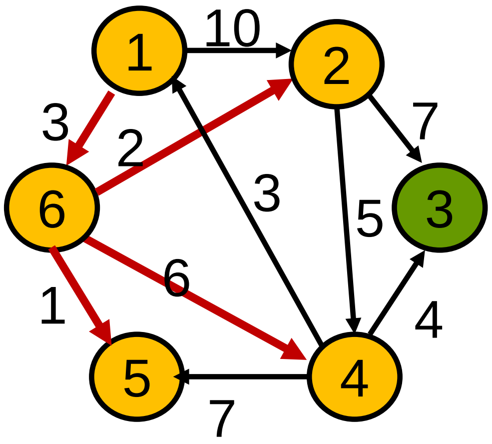
$dist$[6]=3

$dist$[5]=4

$dist$[2]=5

$dist$[4]=9

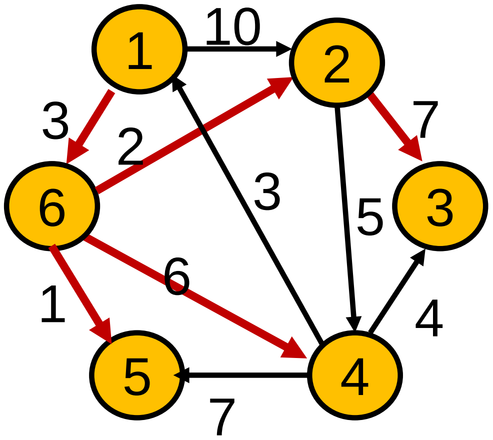
$dist$[3]=12



运行实例（续）

S={1,6,5,2,4,3}

***dist* [1]=0**
***dist* [6]=3**
***dist* [5]=4**
***dist* [2]=5**
***dist* [4]=9**
***dist* [3]=12**



***short*[1]=0, *short*[2]=5, *short*[3]=12,**
***short*[4]=9, *short*[5]=4, *short*[6]=3.**

小结

- 单源最短路径问题
- Dijkstra算法设计思想及伪码
- 运行实例

Dijkstra算法的正确性

归纳证明思路

命题：当算法进行到第 k 步时，对于 S 中每个结点 i，

$$dist\,[i] = short\,[i]$$

归纳基础

$k = 1$, $S = \{s\}$, $dist\,[s] = short\,[s] = 0$.

归纳步骤

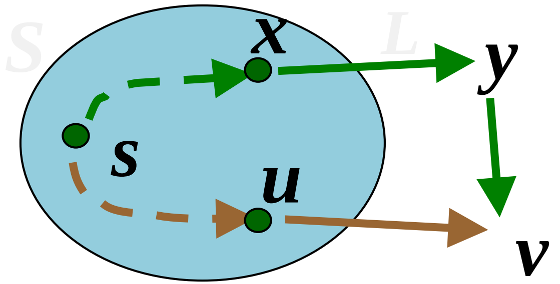
证明：假设命题对 k 为真，则对 $k+1$ 命题也为真.

归纳步骤证明

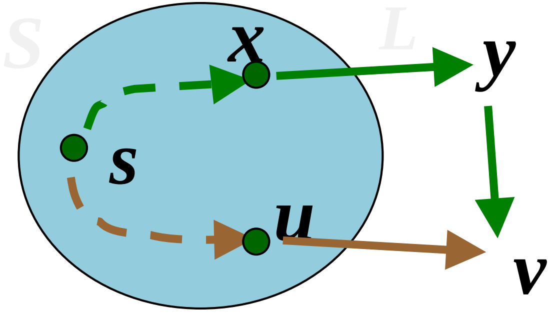
假设命题对k为真，考虑 k+1步算法选择顶点v (边<u,v>). 需要证明

$$\boxed{dist[v]=short[v]}$$

若存在另一条 s-v 路径 L (绿色)，最后一次出 S 的顶点为 x, 经过 V–S 的第一个顶点 y，再由 y 经过一段在 V– S 中的路径到达 v .



归纳步骤证明（续）



在 k+1步算法选择顶点 v，而不是 y ,

$$dist\,[v] \le dist\,[y]$$

令 y 到 v 的路径长度为 $d(y,v)$

$$dist\,[y]+d(y,v) \le L$$

于是 $dist\,[v] \le L$，即 $dist[v]= short\,[v]$

时间复杂度

- 时间复杂度：$O(nm)$
  算法进行n-1步
  每步挑选1个具有最小*dist*函数值的结点进入*S*，需要 $O(m)$时间

- 选用基于堆实现的优先队列的数据结构，可以将算法时间复杂度降到$O(m\log n)$

贪心法小结

- 贪心法适用于组合优化问题.
- 求解过程是多步判断过程，最终的判断序列对应于问题的最优解.
- 判断依据某种“短视的”贪心选择性质，性质的好坏决定了算法的正确性. 贪心性质的选择往往依赖于直觉或者经验.

贪心法小结（续）

- 贪心法正确性证明方法：

  (1) 直接计算优化函数，贪心法的解恰好取得最优值

  (2) 数学归纳法（对算法步数或者问题规模归纳）

  (3) 交换论证

- 证明贪心策略不对：举反例

贪心法小结（续）

- 对于某些不能保证对所有的实例都得到最优解的贪心算法（近似算法），可做参数化分析或者误差分析.
- 贪心法的优势：算法简单，时间和空间复杂性低

贪心法小结（续）

- 几个著名的贪心算法

  最小生成树的Prim算法

  最小生成树的Kruskal算法

  单源最短路的Dijkstra算法