序列求和的方法

数列求和公式

等差、等比数列与调和级数

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}(q<1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

求和的例子

$$\sum_{t=1}^{k} t2^{t-1} = \sum_{t=1}^{k} t(2^t - 2^{t-1})$$

拆项

$$= \sum_{t=1}^{k} t2^t - \sum_{t=1}^{k} t2^{t-1} = \sum_{t=1}^{k} t2^t - \sum_{t=0}^{k-1} (t+1)2^t$$

变限

$$= \sum_{t=1}^{k} t2^t - \sum_{t=0}^{k-1} t2^t - \sum_{t=0}^{k-1} 2^t$$

拆项

$$= k2^k - (2^k - 1) = (k-1)2^k + 1$$

二分检索算法

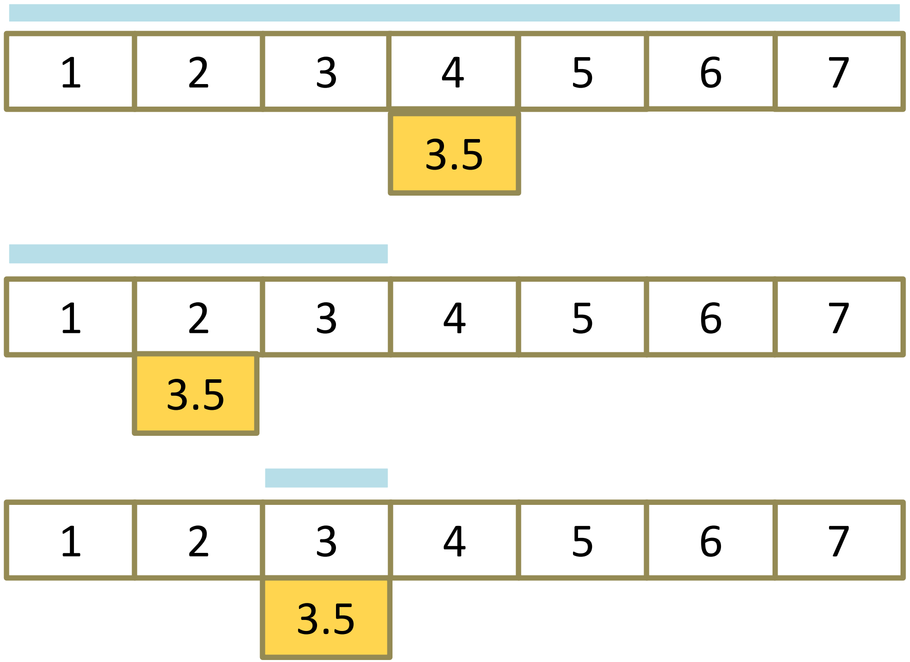
算法 BinarySearch (T, l, r, x)

输入：数组 T，下标从 l 到 r；数x

输出：j

1. $l \leftarrow 1$; $r \leftarrow n$
2. while $l \le r$ do
3. $\boxed{m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor}$
4. if $T[m]=x$ then return m //x中位元素
5. else if $T[m] > x$ then $r \leftarrow m-1$
6. else $l \leftarrow m+1$
7. return 0

二分检索运行实例



第1次

$3.5 < 4$

第2次

$3.5 > 2$

第3次

$3.5 > 3$

$2n+1$个输入

假设 $n = 2^k - 1$，输入有 $2n + 1$ 种：

$x = T[1]$

$x = T[2]$

…

$x = T[n-1]$

$x = T[n]$

x在T中

$x < T[1]$

$T[1] < x < T[2]$

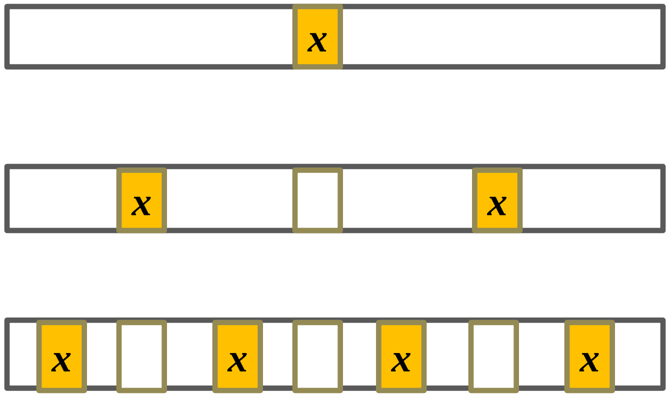
…

$T[n-1] < x < T[n]$

$T[n] < x$

x不在T中

比较t 次的输入个数



比较1次:1个

比较2次:2个

比较3次:4个

对t =1, 2, …, k-1, 比较 t 次: 2^{t-1} 个

比较 k 次的输入有 $2^{k-1} + n + 1$个

总次数：对每个输入乘以次数并求和

二分检索平均时间复杂度

假设 $n = 2^k-1$，各种输入概率相等

$$A(n) = \frac{1}{2n+1}\left[\underline{\sum_{t=1}^{k-1} t2^{t-1} + k(2^{k-1} + n + 1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[\underline{\sum_{t=1}^{k} t2^{t-1}} + k(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[\underline{(k-1)2^k + 1} + k(n+1)\right]$$

$$= \frac{k2^k - 2^k + 1 + k2^k}{2^{k+1} - 1} \approx k - \frac{1}{2} = \lfloor \log n \rfloor + \frac{1}{2}$$

估计和式上界的放大法

放大法：

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{\max}$ 放大

2. 假设存在常数 $r<1$，使得 对一切 $k \ge 0$有 $a_{k+1}/a_k \le r$ 成立

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a_0}{1-r}$$

$a_1 \le a_0 r$， $a_2 \le a_1 r \le a_0 r^2$, ...

放大法的例子

估计 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$ 的上界.

解 由 $a_k=\frac{k}{3^k}$, $a_{k+1}=\frac{k+1}{3^{k+1}}$

$$\boxed{\frac{a_{k+1}}{a_k}}=\frac{1}{3}\frac{k+1}{k}\le\frac{2}{3}$$

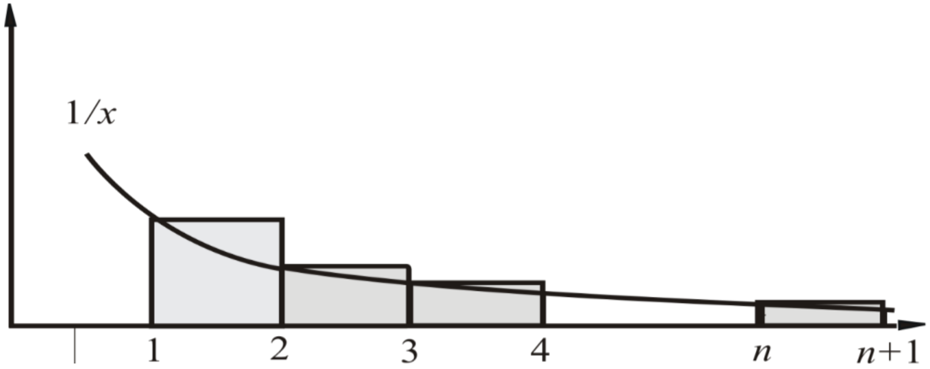
得

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

估计和式渐近的界

估计 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 的渐近的界.

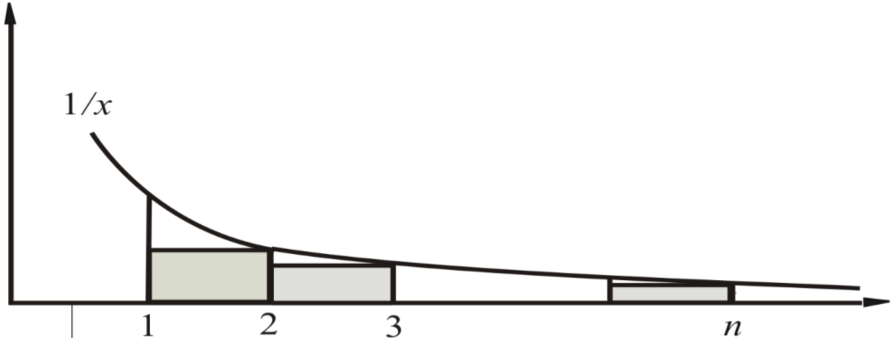
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$



估计和式渐近的界

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}$$

$$=\ln n+1$$



$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\Theta(\log n)$$

小结

- 序列求和基本公式：
  等差数列
  等比数列
  调和级数
- 估计序列和：
  放大法求上界
  用积分做和式的渐近的界
- 应用：计数循环过程的基本运算次数

递推方程与
算法分析

递推方程

设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为 $\{a_n\}$,
一个把a_n与某些个$a_i\,(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程

递推方程的求解:

给定关于序列$\{ a_n \}$的递推方程和若干初值，计算a_n

递推方程的例子

Fibonacci数

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

数学家Fibonacci
意大利1170-1240

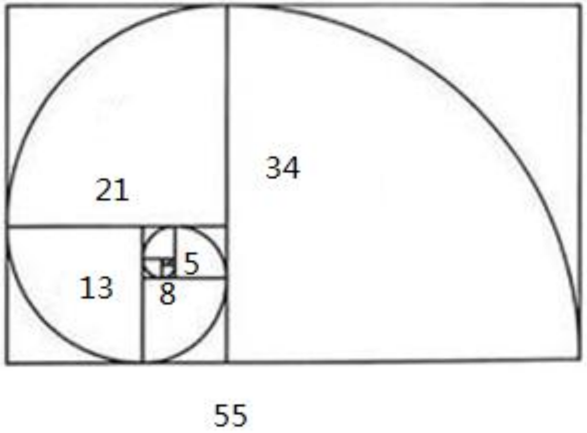
递推方程：$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$

初值：$f_0=1,\ f_1=1$

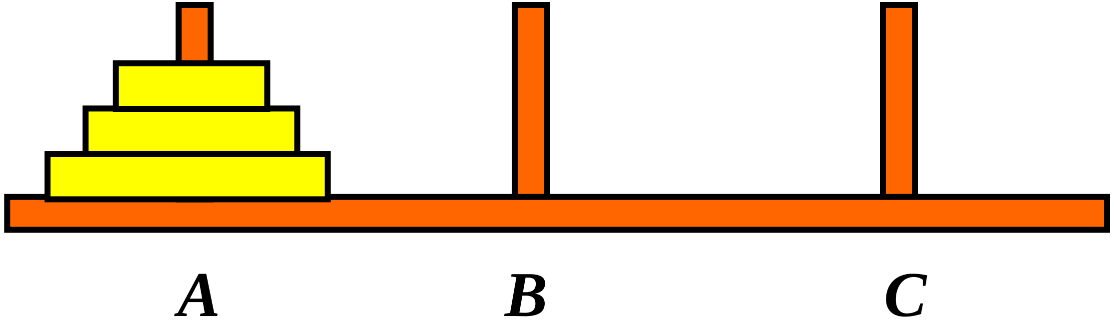
解：

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Fibonacci数的存在



Hanoi塔问题



n个盘子从大到小顺序放在A 柱上，
要把它们从 A 移到 C，每次移动 **1**个
盘子，移动时不允许大盘压在小盘上.
设计一种移动方法.

递归算法

算法 **Hanoi** (A, C, n) // n个盘子A到C

1. **if** n=1 **then move** (A, C) // 1个盘子A到C
2. **else Hanoi** $(A, B, n-1)$
3. **move** (A, C)
4. **Hanoi** $(B, C, n-1)$

设 n个盘子的移动次数为 $T(n)$

$$T(n) = 2\,T(n-1) + 1,$$
$$T(1) = 1,$$

分析算法

$T(n) = 2\,T(n-1) + 1$，$T(1) = 1$，

解 $\boxed{T(n) = 2^n - 1}$

1 秒移1个，64个盘子要多少时间？

5000亿年！千万亿次/秒，4个多小时

有没有更好的算法?

没有！这是一个难解的问题，不存在多项式时间的算法！

插入排序

算法 **Insert Sort** (A, n)

1. **for** $j \leftarrow 2$ **to** n
2. $x \leftarrow A[j]$
3. $i \leftarrow j-1$ // 把 $A[j]$ 插入
4. **while** $i > 0$ **and** $x < A[i]$ **do**
5. $A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $i \leftarrow i-1$
7. $A[i+1] \leftarrow x$

最坏情况下时间复杂度

插入排序：

设基本运算是元素比较，对规模为 n 的输入最坏情况下的时间复杂度$W(n)$

$$W(n)=W(n-1)+n-1$$

$$W(1)=0$$

解为

$$W(n) = n(n-1)/2$$

小结

- 递推方程的定义及初值
- 递推方程与算法时间复杂度的关系

  Hanoi塔的递归算法

  插入排序的迭代算法

迭代法求解
递推方程

迭代法

- 不断用递推方程的右部替换左部
- 每次替换，随着 n 的降低在和式中多出一项
- 直到出现初值停止迭代
- 将初值代入并对和式求和
- 可用数学归纳法验证解的正确性

Hanoi 塔算法

$$T(n) = 2\,T(n-1) + 1$$
$$T(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\,\underline{T(n-1)} + 1 \\
&= 2\,[\,\underline{2T(n-2) + 1}\,] + 1 \\
&= 2^2\,T(n-2) + 2 + 1 \\
&= \ldots \\
&= 2^{n-1}T(1) + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

代入初值
求和

插入排序算法

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

$$W(n) = W(n-1) + n-1$$

$$= [W(n-2) + n-2] + n-1$$

$$= W(n-2) + n-2 + n-1$$

$$= \ldots$$

$$= W(1) + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$= 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$= n(n-1)/2$$

换元迭代

- 将对 n 的递推式换成对其他变元 k 的递推式
- 对 k 直接迭代
- 将解 (关于 k 的函数) 转换成关于 n 的函数

二分归并排序

MergeSort (A, p, r)

输入：数组 $A[p..r]$

输出：按递增顺序排序的数组 A

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3. MergeSort (A, p, q)
4. MergeSort ($A, q+1, r$)
5. Merge (A, p, q, r)

换元

假设 $n=2^k$，递推方程如下：

$$W(n)=2W(n/2)+n-1$$

$$W(1)=0$$

换元：

$$W(2^k) = 2W(2^{k-1}) + 2^k-1$$

$$W(0) = 0$$

迭代求解

$$\boxed{W(2^k) = 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1}$$

$$W(n) = 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1$$
$$= 2[2W(2^{k-2}) + 2^{k-1} - 1] + 2^k - 1$$
$$= 2^2W(2^{k-2}) + 2^k - 2 + 2^k - 1$$
$$= 2^2[2W(2^{k-3}) + 2^{k-2} - 1] + 2^k - 2 + 2^k - 1$$
$$= \ldots$$
$$= 2^kW(1) + k2^k - \boxed{(2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)}$$
$$= k2^k - 2^k + 1$$
$$= n\log n - n + 1$$

换元，
对k迭代

解的正确性–归纳验证

证明:下述递推方程的解是 $W(n)=n(n-1)/2$

$$W(n)=W(n-1)+n-1$$
$$W(1)=0$$

方法：数学归纳法

证 $n=1$，$W(1)=1\times(1-1)/2 = 0$

假设对于n，解满足方程，则

$$W(n+1)$$
$$= \underline{W(n)}+n = \underline{n(n-1)/2} + n$$
$$= n[(n-1)/2+1] = n(n+1)/2$$

小结

迭代法求解递推方程

- 直接迭代，代入初值，然后求和
- 对递推方程和初值进行换元，然后求和，求和后进行相反换元，得到原始递推方程的解
- 验证方法——数学归纳法

差消法化简
高阶递推方程

快速排序

- 假设 $A[p..r]$ 的元素彼此不等

  以首元素$A[1]$对数组 $A[p..r]$划分,使得:

  小于x 的元素放在 $A[p..q-1]$

  大于 x 的元素放在 $A[q+1..r]$

- 递归对 $A[p..q-1]$和 $A[q+1..r]$ 排序

工作量: 子问题工作量+划分工作量

输入情况

- 有 n 种可能的输入

x 排好序位置	子问题 1规模	子问题 2规模
1	0	$n-1$
2	1	$n-2$
3	2	$n-3$
…	…	…
$n-1$	$n-2$	1
n	$n-1$	0

对每个输入，划分的比较次数都是 $n-1$

工作量总和

$$T(0) + T(n-1) + n-1$$

$$T(1) + T(n-2) + n-1$$

$$T(2) + T(n-3) + n-1$$

$$\ldots$$

$$+\ T(n-1) + T(0) + n-1$$

$$2[T(1)+\ldots+T(n-1)]+n(n-1)$$

快速排序平均工作量

假设首元素排好序在每个位置是等概率的

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + O(n), \; n \ge 2$$

$$T(1) = 0$$

全部历史递推方程
对于高阶方程应该先化简，然后迭代

差消化简

利用两个方程相减，将右边的项尽可能消去，以达到降阶的目的

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+cn$$

$$nT(n)=\boxed{2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)}+cn^2$$

$$(n-1)T(n-1)=\boxed{2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)}+c(n-1)^2$$

差消化简

$$nT(n) - \underline{(n-1)T(n-1)}$$
$$= \underline{2T(n-1)} + cn^2 - c(n-1)^2$$

$\Downarrow$ 化简

$$nT(n) = (n+1)T(n-1) + c_1 n$$

$\Downarrow$ 变形

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{c_1}{n+1}$$

迭代求解

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \boxed{\frac{c_1}{n+1}} = \cdots$$

$$= c_1[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{3}] + \frac{T(1)}{2}$$

代入初值

$$= c_1\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \Theta(\log n)$$

$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

小结

- 对于高阶递推方程先要用差消法化简为一阶方程
- 迭代求解

递归树

递归树的概念

- 递归树是迭代计算的模型.
- 递归树的生成过程与迭代过程一致.
- 递归树上所有项恰好是迭代之后产生和式中的项.
- 对递归树上的项求和就是迭代后方程的解.

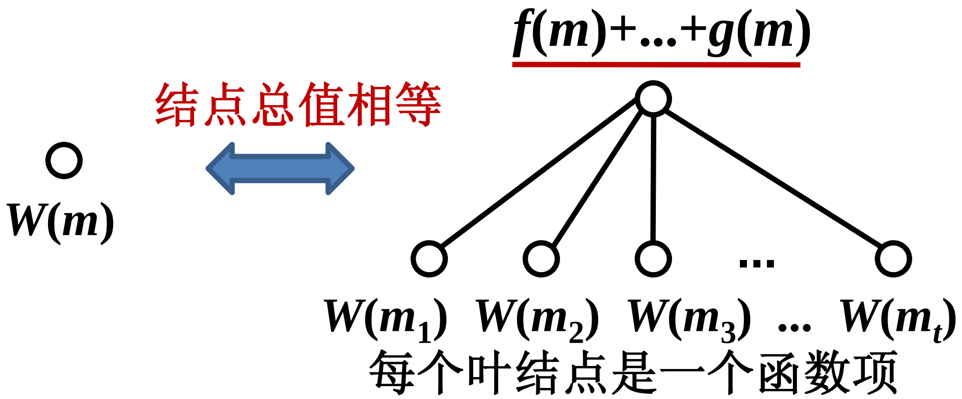
迭代在递归树中的表示

如果递归树上某结点标记为$W(m)$

$$W(m) = W(m_1)+\ldots+W(m_t)$$

$$+\ \underline{f(m)+\ldots+g(m)},\quad m_1, \ldots, m_t < m$$

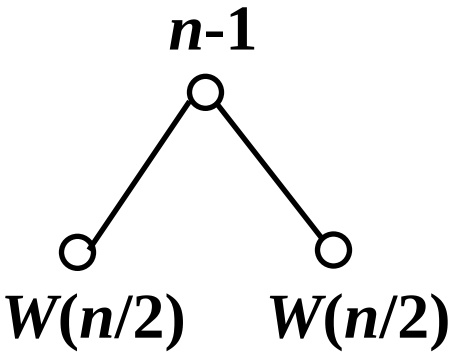
其中$W(m_1),\ldots,W(m_t)$称为函数项.



二层子树的例子

二分归并排序

$$W(n) = 2W(n/2) + \underline{n-1}$$



递归树的生成规则

- 初始，递归树只有根结点，其值为$W(n)$

- 不断继续下述过程：

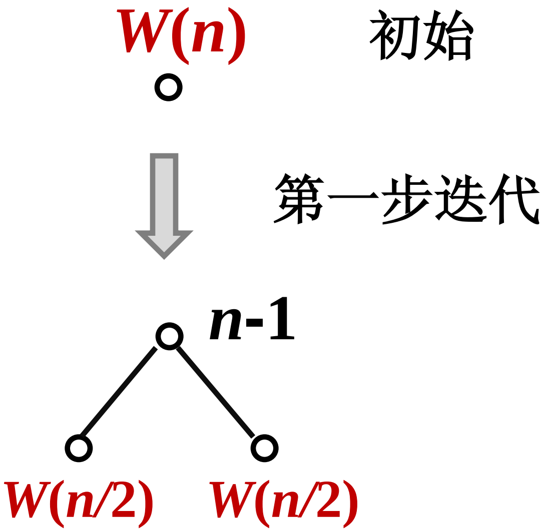
  将函数项叶结点的迭代式$W(m)$表示成二层子树

  用该子树替换该叶结点

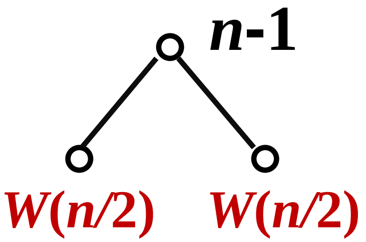
- 继续递归树的生成，直到树中无函数项(只有初值)为止.

递归树生成实例

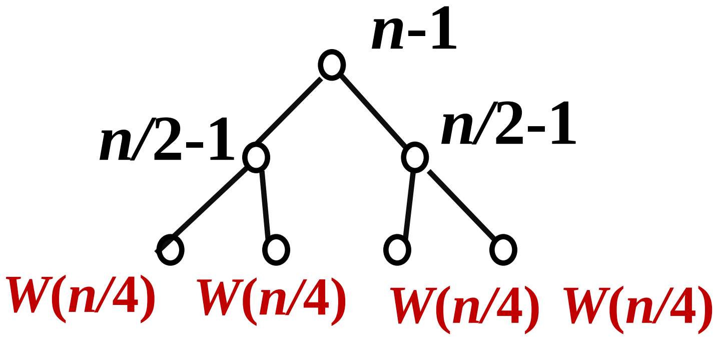
$$W(n) = 2W(n/2) + n\text{-}1$$



递归树生成实例



第二步迭代



递归树

$$n-1 \qquad\qquad \boxed{n-1}$$

$$\frac{n}{2}-1 \qquad \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad n-2$$

$$\frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad\qquad n-4$$

$$\cdots\cdots$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \quad 1 \quad 1 \qquad n-2^{k-1}$$

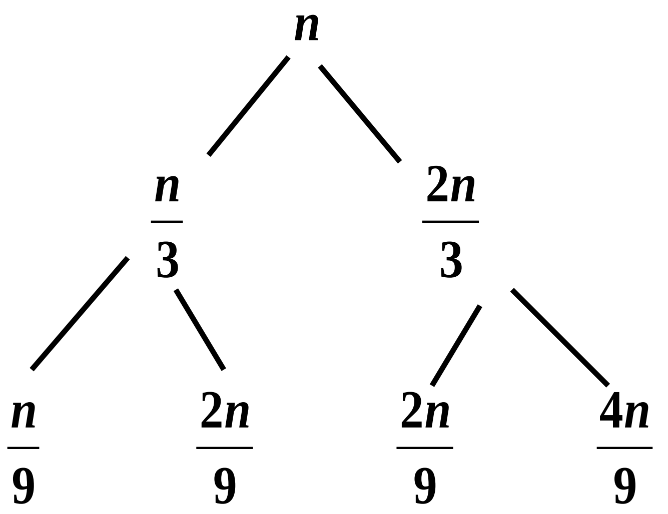
对递归树上的量求和

$$\boxed{\begin{aligned}&W(n)=2W(n/2)+n-1,\ n=2^k,\\&W(1)=0\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}W(n)&=n-1+n-2+\ldots+n-2^{k\text{-}1}\\&=kn-(2^k-1)\\&=n\log n-n+1\end{aligned}$$

递归树应用实例

求解方程：$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$



n

n

n

……

…………………………… 1 $O(n)$

求和

方程：$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$

递归树层数 k，每层$O(n)$

$$n(2/3)^k = 1$$

$$\Rightarrow (3/2)^k = n$$

$$\Rightarrow k = O(\log_{3/2} n)$$

$$T(n)=O(n\log n)$$

小结

- 递归树是迭代的图形表述
- 递归树的生成规则
- 如何利用递归树求解递推方程?

主定理及其证明

主定理的应用背景

求解递推方程

$$\boxed{T(n) = a\,T(n/b) + f(n)}$$

a：　归约后的子问题个数

n/b：归约后子问题的规模

$f(n)$：归约过程及组合子问题的解的工作量

二分检索：　　$T(n) = T(n/2)+1$

二分归并排序：$T(n) =2T(n/2)+n-1$

主定理

定理：设$a\geq 1$, $b>1$为常数, $f(n)$为函数, $T(n)$为非负整数，且$T(n)=aT(n/b)+f(n)$，则

1. 若 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, 那么

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

存在ε

2. 若 $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$, 那么

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

存在ε

3. 若 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$,且对于某个常数 $c<1$和充分大的 n 有$af(n/b)\leq cf(n)$, 那么

$$T(n)=\Theta(f(n))$$

存在c和n_0

迭代

$\boxed{T(n)=aT(n/b)+f(n)}$

设 $n=b^k$

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

$$= a[aT(\frac{n}{b^2}) + f(\frac{n}{b})] + f(n)$$

$$= a^2T(\frac{n}{b^2}) + af(\frac{n}{b}) + f(n)$$

$$= \ldots$$

迭代结果

$$\boxed{a^{\log_b n} = n^{\log_b a}}$$

$$= a^k T(\frac{n}{b^k}) + a^{k-1} f(\frac{n}{b^{k-1}}) + \ldots + af(\frac{n}{b}) + f(n)$$

$$= \underline{a^k T(1)} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= \underline{c_1 n^{\log_b a}} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j}) \qquad T(1) = c_1$$

- 第一项为所有最小子问题的计算工作量
- 第二项为迭代过程归约到子问题及综合解的工作量

Case1

$$\boxed{f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})}$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \frac{a^j}{(b^{\log_b a - \varepsilon})^j})$$

Case1(续)

$$\boxed{\frac{1}{(b^{\log_b a-\varepsilon})^j}=\frac{b^{\varepsilon j}}{(b^{\log_b a})^j}=\frac{b^{\varepsilon j}}{a^j}}$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\frac{a^j}{(b^{\log_b a-\varepsilon})^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}(b^{\varepsilon})^j)$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\underline{\frac{b^{\varepsilon\log_b n}-1}{b^{\varepsilon}-1}})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\underline{n^{\varepsilon}})=\Theta(n^{\log_b a})$$

Case2

$$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \underline{\Theta(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a}})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \underline{\Theta(n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \frac{a^j}{a^j})}$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Case3

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}) & (1) \\ af(n/b) \le cf(n) & (2) \end{array}}$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$\le c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^j f(\frac{n}{b^j}) \le a^{j-1} cf(\frac{n}{b^{j-1}}) \\ \le ca^{j-1} f(\frac{n}{b^{j-1}}) \le \ldots \le c^j f(n) \end{array}}$$

Case3 (续)

$$T(n) \le c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} c^j f(n)$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + f(n)\frac{c^{\log_b n} - 1}{c - 1}$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(f(n))$$

$$= \Theta(f(n))$$

小结

- 主定理的应用背景
- 主定理的内容
- 主定理的证明

主定理的应用

求解递推方程：例1

例1 求解递推方程

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

解 上述递推方程中的

$$a = 9,\quad b = 3,\quad f(n) = n$$

$$n^{\log_3 9} = n^2,\quad f(n) = O(n^{\log_3 9-1})$$

相当于主定理的case1，其中ε=1.

根据定理得到 $T(n) = \Theta(n^2)$

求解递推方程：例2

例2 求解递推方程

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

解 上述递推方程中的

$$a = 1,\ b = 3/2,\ f(n) = 1,$$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

相当于主定理的Case2 .

根据定理得到 $T(n) = \Theta(\log n)$

求解递推方程：例3

例3 求解递推方程

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

解 上述递推方程中的

$$a = 3,\quad b = 4,\quad f(n) = n\log n$$

$$n\log n = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon}) \approx \Omega(n^{0.793+\varepsilon})$$

取 $\varepsilon = 0.2$ 即可.

条件验证

要使 $a\,f\,(n/b) \le c\,f\,(n)$ 成立，

代入 $f\,(n) = n\ \log n$，得到

$$3\,(n/4)\,\log\,(n/4) \le c\,n\log n$$

只要 $c \ge 3/4$，上述不等式可以对所有充分大的n 成立. 相当于主定理的 **Case3.**

因此有 $T(n)=\Theta(f\,(n))=\Theta(n\log n)$

递归算法分析

二分检索： $W(n)=W(n/2)+1,\ W(1)=1$

$a=1,\ b=2,\ \underline{n^{\log_2 1}=1,\ \ f(n)=1},$

属于Case2，

$W(n)=\Theta(\log n)$

二分归并排序：

$W(n)=2W(n/2)+n-1,\ W(1)=0$

$a=2,\ b=2,\ \underline{n^{\log_2 2}=n,\ \ f(n)=n-1}$

属于Case2，

$W(n)=\Theta(n\log n)$

不能使用主定理的例子

例4 求解 $T(n)=2T(n/2)+n\log n$

解 $a=b=2$, $n^{\log_b a}=n$, $f(n)=n\log n$

不存在 $\varepsilon>0$ 使下式成立

$$n\log n=\Omega(n^{1+\varepsilon})$$

不存在 $c<1$ 使 $af(n/b)\le cf(n)$ 对所有充分大的 n 成立

$$2(n/2)\log(n/2)=n(\log n-1)\le cn\log n$$

递归树求解

$$n\log n$$

$$\frac{n(\log n-1)}{2} \qquad \frac{n(\log n-1)}{2}$$

$$\frac{n(\log n-2)}{4} \qquad \frac{n(\log n-2)}{4} \qquad \frac{n(\log n-2)}{4} \qquad \frac{n(\log n-2)}{4}$$

....

$n\log n$

$n(\log n-1)$

$n(\log n-2)$

$\vdots$

$n(\log n-k+1)$

求和

$$
\begin{aligned}
&T(n) \\
&= n\log n + n(\log n - 1) + n(\log n - 2) \\
&\quad + \ldots + n(\log n - k + 1) \\
&= (n\log n)\log n - n(\underline{1 + 2 + \ldots + k - 1}) \\
&= n\log^2 n - n\underline{k(k-1)/2} = O(n\log^2 n)
\end{aligned}
$$

小结

- 使用主定理求解递推方程需要满足什么条件？
- 主定理怎样用于算法复杂度分析？