教材习题解答

第一章 集合及其运算

P_8 习题

3. 写出方程 $x^2+2x+1=0$ 的根所构成的集合。

解：$x^2+2x+1=0$ 的根为 $x=-1$，故所求集合为 $\{-1\}$

4. 下列命题中哪些是真的，哪些为假

a)对每个集 A，$\phi \in A$；b)对每个集 A，$\phi \subseteq A$；

c)对每个集 A，$A \in \{A\}$；d)对每个集 A，$A \in A$；

e)对每个集 A，$A \subseteq A$；f)对每个集 A，$A \subseteq \{A\}$；

g)对每个集 A，$A \in 2^A$；h)对每个集 A，$A \subseteq 2^A$；

i)对每个集 A，$\{A\} \subseteq 2^A$；j)对每个集 A，$\{A\} \in 2^A$；

k)对每个集 A，$\phi \in 2^A$；l)对每个集 A，$\phi \subseteq 2^A$；

m)对每个集 A，$A=\{A\}$；n) $\phi=\{\phi\}$；

o) $\{\phi\}$ 中没有任何元素；p)若 $A \subseteq B$，则 $2^A \subseteq 2^B$

q)对任何集 A，$A=\{x \mid x \in A\}$；r)对任何集 A，$\{x \mid x \in A\}=\{y \mid y \in A\}$；

s)对任何集 A，$y \in A \Leftrightarrow y \in \{x \mid x \in A\}$；t)对任何集 A，$\{x \mid x \in A\} \neq \{A \mid A \in A\}$；

答案：假真真假真假真假真假真真假假假真真真真真

5. 设有 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1$，试证：

$$A_1=A_2=\cdots=A_n$$

证明：由 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_4 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1$，可得 $A_1 \subseteq A_2$ 且 $A_2 \subseteq A_1$，故 $A_1=A_2$。

同理可得：$A_1=A_3=A_4=\cdots=A_n$

因此 $A_1=A_2=A_3=\cdots=A_n$

6. 设 $S=\{\phi,\{\phi\}\}$，试求 2^S？

解：$2^S=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

7. 设 S 恰有 n 个元素，证明 2^S 有 2^n 个元素。

证明：（1）当 n＝0 时，$S=\phi,2^S=\{\phi\},\left|2^S\right|=1=2^0$，命题成立。

（2）假设当 $n=k(k\geq 0,k\in N)$ 时命题成立，即 $\left|2^S\right|=2^k$（$\left|S\right|=k$ 时）。那么对于 $\forall S_1$（$\left|S_1\right|=k+1$），2^{S_1} 中的元素可分为两类，一类为不包含 S_1 中某一元素 x 的集合，另一类为包含 x 的集合。显然，这两类元素个数均为 2^k。因而 $\left|2^{S_1}\right|=2^{k+1}$，亦即命题在 $n=k+1$ 时也成立。

由（1）、（2），可证得命题在 $n\in N$ 时均成立。

P_{16} 习题

1. 设 A、B 是集合，证明:

$$(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\phi$$

证：$\Leftarrow$ 当 $B=\phi$ 时，显然 $(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus B$，得证。

$\Rightarrow$ 假设 $B\neq\phi$，则必存在 $x\in B$，使得 $x\in(A\setminus B)\bigcup B$ 但 $x\overline{\in}(A\bigcup B)\setminus B$，故 $(A\setminus B)\bigcup B\neq(A\bigcup B)\setminus B$ 与题设矛盾。所以假设不成立，故 $B=\phi$。

2. 设 A、B 是集合，试证 $A=\phi\Leftrightarrow B=A\Delta B$

证：$\Rightarrow$ 显然。

$\Leftarrow$ 反证法：假设 $A\neq\phi$，则 $\exists x_0\in A$，若 $x_0\in B$，则 $x_0\in$ 左，但 $x_0\notin$ 右，矛盾。

若 $x_0\overline{\in}B$，则 $x_0\overline{\in}$ 左，但 $x_0\in$ 右，矛盾。故假设不成立，即 $A=\phi$。

3. 设 A，B，C 是集合，证明：

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

证：$(A\Delta B)\Delta C=[(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)]\Delta C=[(A\bigcap B^C)\bigcup(B\bigcap A^C)]\Delta C$

$=[(A\bigcap B^C)\bigcup(B\bigcap A^C)\setminus C]\bigcup(C\setminus((A\bigcap B^C)\bigcup(B\bigcap A^C)))$

$=(A\bigcap B^C\bigcap C^C)\bigcup(B\bigcap A^C\bigcap C^C)\bigcup(C\bigcap((A^C\bigcap B)\bigcap(B^C\bigcap A)))$

$=(A\bigcap B^C\bigcap C^C)\bigcup(B\bigcap A^C\bigcap C^C)\bigcup(C\bigcap((A^C\bigcap B^C)\bigcap(A\bigcap B)))$

$=(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)\cup(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$

由上式可以看出此展开式与 A、B、C 的运算顺序无关，因此，$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

4. 设 A，B，C 为集合，证明 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$

证：因为 $A\setminus(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C=A\cap B^C\cap C^C=\ (A\cap B^C)\setminus C=\ (A\setminus B)\setminus C$。

5. 设 A，B，C 为集合，证明：

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$

证：$(A\cup B)\setminus C=(A\cup B)\cap C^C=(A\cap C^C)\cup(B\cap C^C)=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

6. 设 A，B，C 为集合，证明：

$$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$$

证明：$(A\cap B)\setminus C=(A\cap B)\cap C^C=A\cap B\cap C^C=(A\cap C^C)\cap(B\cap C^C)$

$=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

7. 设 A，B，C 都是集合，若 $A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=B\cap C$，试证 B=C。

证：**证 1**：$\forall x\in B$，则

若 $x\in A$，则 $x\in(A\cap B)$。由于 $A\cap B=A\cap C$，故 $x\in(A\cap C)$，即 $x\in C$；

若 $x\notin A$，则 $x\in(A\cup B)$，由于 $A\cup B=A\cup C$，故 $x\in A\cup C$。又 $x\notin A$，只能有 $x\in C$。因此，$\forall x\in B$，总有 $x\in C$，故 $B\subseteq C$。

同理可证，$C\subseteq B$。

因此 $B=C$。

证 2：$B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

$$=(C\cap A)\cup(B\cap C)=C\cap(A\cup B)=C\cap(A\cup C)=C$$

8. 设 A，B，C 为集合，试证：

$$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$$

证：证 I $\forall x\in(A\setminus B)\setminus C$，有 $x\in A,x\notin B,x\notin C$，因此，$x\in(A\setminus B)$，$x\notin(C\setminus B)$。故 $x\in(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$。

反之，$\forall x\in(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$，有 $x\in(A\setminus B)$，$x\overline{\in}(C\setminus B)$。因此 $x\in A, x\overline{\in} B, x\overline{\in} C$。故 $x\in(A\setminus B)\setminus C$，即 $(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$。

所以 $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$。

证Ⅱ：$(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)=(A\cap B^C)\cap(C\cap B^C)^C=(A\cap B^C)\cap(C^C\cup B)$

$$=(A\cap B^C)\cap C^C=(A\setminus B)\setminus C$$

9. 设 $X\subseteq Y\subseteq Z$，证明 $Z\setminus(Y\setminus X)=X\cup(Z\setminus Y)$

证：证 1：$\forall x\in Z\setminus(Y\setminus X)=Z\cap(Y\cap X^C)^C=Z\cap(Y^C\cup X)$，有 $x\in Z$ 且 $x\overline{\in} Y$ 或 $x\in X$。则

若 $x\in Z$ 且 $x\overline{\in} Y$，则 $x\in Z\setminus Y$，于是 $x\in X\cup(Z\setminus Y)$。

若 $x\in Z$ 且 $x\in X$，则 $x\in X\cup(Z\setminus Y)$，从而

$$Z\setminus(Y\setminus X)\subseteq X\cup(Z\setminus Y)。$$

反之，$\forall x\in X\cup(Z\setminus Y)$，则 $x\in X$ 或 $x\in Z\setminus Y$。

若 $x\in X$，则由 $X\subseteq Y\subseteq Z$ 有 $x\in Y, x\in Z$，故 $x\overline{\in} Y\setminus X$，因此 $x\in Z\setminus(Y\setminus X)$。

若 $x\in Z\setminus Y$，则 $x\in Z$ 但 $x\overline{\in} Y$，故 $x\overline{\in} Y\setminus X$，因此 $x\in Z\setminus(Y\setminus X)$。从而

$$X\cup(Z\setminus Y)\subseteq Z\setminus(Y\setminus X)。$$

由集合相等的定义，$Z\setminus(Y\setminus X)=X\cup(Z\setminus Y)$。

证 2：$Z\setminus(Y\setminus X)=Z\cap(Y\cap X^C)=Z\cap(Y^C\cup X)=(Z\cap Y^C)\cup(Z\cap X)$，

因为 $X\subseteq Z$，所以 $Z\setminus(Y\setminus X)=(Z\cap Y^C)\cup X=X\cup(Z\setminus Y)$。

10. 下列命题是否成立？

(1) $(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$；(2) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$；

(3) $A\setminus(B\cup C)=(A\cup B)\setminus B$。

解：（1），（2），（3）都不成立。反例如下：

（1）$A=\phi, C=\{1\}, B$ 任意，则 $(A\setminus B)\cup C=C=\{1\}; A\setminus(B\setminus C)=\phi$。

（2）$A=\{1\}, B=\phi, C=\{1\}$，则 $A\cup(B\setminus C)=\{1\}; (A\cup B)\setminus C=\phi$。

（3） $A=\phi, B=\{1\}, C=\{1,2\}$，则 $A\setminus(B\bigcup C)=\phi; (A\bigcup C)\setminus B=\{2\}$。

11．下列命题哪个为真？

a)对任何集合 A,B,C，若 $A\bigcap B=B\bigcap C$，则 A=C。

b)设 A,B,C 为任何集合，若 $A\bigcup B=A\bigcup C$，则 B=C。

c)对任何集合 A,B，$2^{A\cup B}=2^{A}\bigcup 2^{B}$。

d)对任何集合 A,B，$2^{A\cap B}=2^{A}\bigcap 2^{B}$。

e)对任何集合 A,B，$2^{A\setminus B}=2^{A}\setminus 2^{B}$。

f)对任何集合 A,B，$2^{A\Delta B}=2^{A}\Delta 2^{B}$。

答案：d 是真命题。

12．设 R,S,T 是任何三个集合，试证：

（1） $S\Delta T=(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)$；

（2） $R\Delta(S\bigcap T)\supseteq(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)$；

（3） $(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)\subseteq R\Delta(S\bigcup T)\subseteq(R\Delta S)\bigcup(R\Delta T)$；

（4） $R\bigcup(S\Delta T)\supseteq(R\bigcup S)\Delta(R\bigcup T)$

证：（1） $\forall x\in S\Delta T=(S\setminus T)\bigcup(T\setminus S)$，则

若 $x\in S$，则 $x\notin T$。因而 $x\in(S\bigcup T)$ 且 $x\notin(S\bigcap T)$，故 $x\in(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)$；

若 $x\notin S$，则 $x\in T$，同理可得 $x\in(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)$。故

$$S\Delta T\subseteq(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)。$$

反之，因为 $(S\bigcap T)\subseteq(S\bigcup T)$，故

$$(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)=(S\bigcup T)\setminus(S\bigcap T)\ [\bigcup(S\bigcap T)\setminus(T\bigcup S)=\phi]。$$

$$\forall x\in(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)=(S\bigcup T)\setminus(S\bigcap T)，有 x\in(S\bigcup T), x\notin(S\bigcap T)。$$

若 $x\in S$，则 $x\notin T$，故 $x\in S\Delta T$；
若 $x\notin S$，则 $x\in T$，故 $x\in S\Delta T$。因此

$$(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)\subseteq S\Delta T。$$

所以　$S\Delta T=(S\bigcup T)\Delta(S\bigcap T)$。

（2）**证**：$\forall x\in(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)$，有 $x\in(R\Delta S)$ 且 $x\in(R\Delta T)$。则

若 $x\in R$，则 $x\overline{\in}S$ 且 $x\overline{\in}T$，故 $x\overline{\in}(S\bigcap T)$，$x\in R\Delta(S\bigcap T)$。

若 $x\overline{\in}R$，则 $x\in S$ 且 $x\in T$。故 $x\in(S\bigcap T)$，因此 $x\in R\Delta(S\bigcap T)$。于是

$$(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)\subseteq R\Delta(S\bigcap T)。$$

（3）**证**：$\forall x\in(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)$，有 $x\in(R\Delta S)$ 且 $x\in(R\Delta T)$。则

若 $x\in R$，则 $x\overline{\in}S,x\overline{\in}T$，故 $x\overline{\in}(S\bigcup T)$，因此 $x\in R\Delta(S\bigcup T)$；

若 $x\overline{\in}R$，则 $x\in S,x\in T$，故 $x\in(S\bigcup T)$，$x\in R\Delta(S\bigcup T)$。于是

$$(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)\subseteq R\Delta(S\bigcup T)$$

反之，$\forall x\in R\Delta(S\bigcup T)$，则

若 $x\in R$，则 $x\overline{\in}(S\bigcup T)$，故 $x\overline{\in}S,x\overline{\in}T$，因而 $x\in(R\Delta S),x\in(R\Delta T)$。即 $x\in(R\Delta S)\bigcup(R\Delta T)$；

若 $x\overline{\in}R$，则 $x\in(S\bigcup T)$，故 $x\in S$ 或 $x\in T$。因此 $x\in(R\Delta S)$ 或 $x\in(R\Delta T)$，从而 $x\in(R\Delta S)\bigcup(R\Delta T)$。

综上可得：$R\Delta(S\bigcup T)\subseteq(R\Delta S)\bigcup(R\Delta T)$。于是

$$(R\Delta S)\bigcap(R\Delta T)\subseteq R\Delta(S\bigcup T)\subseteq(R\Delta S)\bigcup(R\Delta T)$$

证：$\forall x\in(R\bigcup S)\Delta(R\bigcup T)$，则

若 $x\in(R\bigcup S)$，则 $x\overline{\in}(R\bigcup T)$，因而 $x\overline{\in}R,x\overline{\in}T,x\in S$。故 $x\in S\Delta T$，于是 $x\in R\bigcup(S\Delta T)$；

若 $x\overline{\in}(R\bigcup S)$，则 $y\in(R\bigcup T)$，与上同理可得 $x\in R\bigcup(S\Delta T)$。

综上可得：$R\bigcup(S\Delta T)\supseteq(R\bigcup S)\Delta(R\bigcup T)$。

14．设 A 为任一集，$\{B_\xi\}_{\xi\in I}$ 为任一集族（$I\neq\phi$），证明：

$$A\bigcup(\bigcap_{\xi\in I}B_\xi)=\bigcap_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)$$

证： $\forall x \in A\bigcup(\bigcap\limits_{\xi\in I}B_\xi)$，则

若 $x\in A$，则 $x\in A\bigcup B_\xi(\xi\in I)$，因而 $x\in\bigcap\limits_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)$；

若 $x\notin A$，则 $\forall\xi\in I, x\in B_\xi$，因而 $\forall\xi\in I, x\in A\bigcup B_\xi$，故 $x\in\bigcap\limits_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)$。于是

$$A\bigcup(\bigcap_{\xi\in I}B_\xi)\subseteq\bigcap_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)\text{。}$$

反之，设 $x\in\bigcap\limits_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)$，则 $\forall\xi\in I, x\in A\bigcup B_\xi$。

若 $x\in A$，显然 $x\in A\bigcup(\bigcap\limits_{\xi\in I}B_\xi)$；

若 $x\notin A$，则 $\forall\xi\in I, x\in B_\xi$，因而 $x\in\bigcap\limits_{\xi\in I}B_\xi$，即 $x\in A\bigcup(\bigcap\limits_{\xi\in I}B_\xi)$。所以，

$$\bigcap_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)\subseteq A\bigcup(\bigcap_{\xi\in I}B_\xi)\text{。}$$

综上可得，$A\bigcup(\bigcap\limits_{\xi\in I}B_\xi)=\bigcap\limits_{\xi\in I}(A\bigcup B_\xi)$。

15．填空：设 A,B 是两个集合。

(a) $x\notin A\bigcup B\Leftrightarrow$____________________；

(b) $x\notin A\bigcap B\Leftrightarrow$____________________；

(c) $x\notin A\setminus B\Leftrightarrow$____________________；

(d) $x\notin A\Delta B\Leftrightarrow$____________________；

解：(a) $x\notin A$ 且 $x\notin B$；　(b) $x\notin A$ 或 $x\notin B$

(c) $x\notin A$ 或 $x\in B$；　(d) （$x\notin A$ 且 $x\notin B$）或（$x\in A$ 且 $x\in B$）

16．设 A，B，C 为三个集合，下列集合表达式哪一个等于 $A\setminus(B\bigcap C)$？

（a）$(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$；（b）$(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$

（c）$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$；（d）$(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$

（e）$(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

答案： c。

$$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=(A\bigcap B^C)\bigcup(A\bigcap C^C)=A\bigcap(B^C\bigcup C^C)$$
$$=A\bigcap(B\bigcap C)^C=A\setminus(B\bigcap C)$$

P_{20} 习题

1．设 A,B,C 为集合，并且 $A\bigcup B=A\bigcup C$，则下列断言哪个成立？

(1) $B=C$；(2) $A\bigcap B=A\bigcap C$；(3) $A\bigcap B^C=A\bigcap C^C$；(4) $A^C\bigcap B=A^C\bigcap C$。

答案： d。

在 $A^C\bigcap B=A^C\bigcap C$ 两边同时并上 A 即得 $A\bigcup B=A\bigcup C$。

2． 设 A,B,C 为任意集合，化简

$$(A\bigcap B\bigcap C)\bigcup(A^C\bigcap B\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B^C\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C^C)\bigcup$$
$$(A^C\bigcap B^C\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B^C\bigcap C^C)\bigcup(A^C\bigcap B\bigcap C^C)$$

证：证 1： 原式＝$(B\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B^C)\bigcup(B\bigcap C^C)\bigcup(A^C\bigcap B^C\bigcap C)$

$$=B\bigcup(A\bigcap B^C)\bigcup(A^C\bigcap B^C\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcup(A^C\bigcap B^C\bigcap C)$$
$$=(A\bigcup B)\bigcup((A\bigcup B)^C\bigcap C)=A\bigcup B\bigcup C$$

证 2： 令原式＝T，全集为 S，则

$S=T\bigcup(A^C\bigcap B^C\bigcap C^C)$ 且 $T\bigcap(A^C\bigcap B^C\bigcap C^C)=\phi$，

故 $T=(A^C\bigcap B^C\bigcap C^C)^C=A\bigcup B\bigcup C$。

3． 证明：（1） $A\Delta B=(A\bigcup B)\bigcap(A^C\bigcup B^C)$；（2） $(A\Delta B)^C=(A\bigcap B)\bigcup(A^C\bigcap B^C)$；

（3） $(A\Delta B)^C=(A^C\bigcup B)\bigcap(A\bigcup B^C)$

证：（1） $(A\bigcup B)\bigcap(A^C\bigcup B^C)=((A\bigcup B)\bigcap A^C)\bigcup((A\bigcup B)\bigcap B^C)$

$$=(B\bigcap A^C)\bigcup(A\bigcap B^C)=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=(A\Delta B)$$

（2）**证：** $(A\Delta B)^C=((A\bigcup B)\bigcap(A^C\bigcup B^C))^C$ 〔根据（1）〕

$$=(A\bigcup B)^C\bigcup(A^C\bigcup B^C)^C=(A^C\bigcap B^C)\bigcup(A\bigcap B)$$

（3）**证：** $(A^C\bigcup B)\bigcap(A\bigcup B^C)=((A^C\bigcup B)\bigcap A)\bigcup((A^C\bigcup B)\bigcap B^C)$

$=(A\bigcap B)\bigcup(A^C\bigcap B^C)=(A\Delta B)^C$ 〔根据（2）〕

4． 设 $M_1,M_2,\cdots$ 和 $N_1,N_2,\cdots$ 是集合 S 的子集的两个序列，对 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots$，有 $N_i\bigcap N_j=\phi$。令 $Q_1=M_1,Q_n=M_n\bigcap(\bigcup_{k=1}^{n-1}M_k)^C,n=2,3,\cdots$。试证：

$$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)。$$

证： $\forall x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$

当 n＝1 时， $x\in N_1\Delta Q_1=N_1\Delta M_1\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$， 故 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$

当 n≥2 时，设 $x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$ 有 $x\in(N_n\setminus Q_n)$ 或 $x\in(Q_n\setminus N_n)$。则

1. 若 $x\in(N_n\setminus Q_n)$， 则 $x\in N_n$ 但 $x\overline{\in} Q_n=M_n\bigcap(\bigcup_{i=1}^{n-1}M_k)^c$,即 $x\overline{\in} M_n$ 或 $x\in\bigcup_{i=1}^{n-1}M_k$，

因此有 $x\overline{\in} M_n$ 或 $x\in M_i(i\le n-1)$。于是

（1）若 $x\in N_n$ 且 $x\overline{\in} M_n$， 有 $x\in N_n\setminus M_n\subseteq N_n\Delta M_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

（2）若 $x\in N_n$ 且 $x\in M_i(i\le n-1)$， 由 $N_i\bigcap N_j=\phi(i\ne j)$， 有 $x\overline{\in} N_i(i\le n-1)$ 且 $x\in M_i$， 于是 $x\in M_i\setminus N_i\subseteq M_i\Delta N_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

2. 若 $x\in Q_n\setminus N_n$， 则 $x\in Q_n=M_n\bigcap(\bigcup_{i=1}^{n-1}M_k)^c$， 即 $x\in M_n$ 但 $x\overline{\in} N_n$。于是

$x\in M_n\setminus N_n\subseteq M_n\Delta N_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

综上可得： $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$

5．设 X 是一个非空集合， $A_n\subseteq X, A_{n+1}\subseteq A_n, n=1,2,3,\cdots$ 试证： $\forall n$， 有

$$A_n=\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\bigcap A_{m+1}^c)\bigcup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m 。$$

证明：由于 $A_{m+1}\subseteq A_m$， 故 $A_m\bigcap A_{m+1}^c=A_m\setminus A_{m+1}$。因为 $m\ge n$， 故 $A_m\subseteq A_n$， 显然有 $\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\bigcap A_{m+1}^c)\bigcup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m\subseteq A_n$。

对于 $\forall x\in A_n$， 假设存在 $p(p\ge n)$， 使得 $x\overline{\in} A_p$， 必可找到其中最小的值 p_0， 使得 $x\in A_{p_0}\setminus A_{p_0+1}$， 故 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\bigcap A_{m+1}^c)\bigcup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$；

假如不存在 p，则 $x\in\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，故 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$。

综上可得：$A_n\subseteq\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$。

所以 $A_n=\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$。

6．设 V 是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$。

证：$\Rightarrow$因为 $S\subseteq T\subseteq W$，故 $S\Delta T=T\setminus S\subseteq W\setminus S\subseteq S\Delta W$。

$\Leftarrow$**先证** $S\subseteq T$。设 $x\in S$，则

若 $x\notin T$，则 $x\in S\setminus T\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$ 且 $x\notin S$，矛盾。

所以 $x\in T$，即 $S\subseteq T$。

其次，证明 $T\subseteq W$。设 $x\in T$，则有两种情况：

若 $x\notin S$。则 $x\in T\setminus S\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$。

若 $x\in S$。由 $S\subseteq W$，知 $x\in W$。

总之，$\forall x\in T$，有 $x\in W$，故 $T\subseteq W$。

7．设 $A_1,A_2,\cdots$ 为一集序列，记 $\overline{A}$ 为这样的元素的全体形成的集合：$x\in\overline{A}$ 当且仅当在序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中有无穷多项 A_n 含有 x。集合 $\overline{A}$ 称为集序列 $A_1,A_2,\cdots$ 的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{A}$。又记 $\underline{A}$ 为这样的元素全体形成的集合；序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含有这样的元素。称 $\underline{A}$ 为序列 $A_1,A_2,\cdots$ 的下极限，并记 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{A}$。证明；

（1）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$；（2）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$。

证： （1）$\forall x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，在序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含 x，在不含 x 的项中必可找到下标最大的一项 A_{p-1}（若各项均含 x，则令 p＝0），有 $x\in\bigcap\limits_{k=p}^{\infty}A_k$，

故 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$，即

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k。$$

反之，$\forall x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$，必 $\exists p$ 使得 $x\in\bigcap_{k=p}^{\infty}A_k$，即 $\forall k\geq p$ 时，$x\in A_k$。而集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{P-1}$ 中即使都不含有 x，但也仅有有限项不含 x，故 $x\in\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n$。因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subseteq\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n。$$

综上可得：$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$。

（2）$\forall x\in\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$，因为 $A_1,A_2,\cdots$ 中有无穷多项含有 x，故 $\exists N$，当 $n\geq N$ 时，$x\in A_n$，因此 $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，从而 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，即

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

反之，$\forall x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，则 $\forall n\geq 1, x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，即 $A_1,A_2,\cdots$ 中有无穷多项多含 x，所以 $x\in\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$，即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subseteq\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$$

综上可得：$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$。

8．证明：$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$

证： $\forall x\in\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n$，由 $\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n$ 定义可知：序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含 x，故必可找

到不含 x 的下标最大的一项 A_P，可见此时 $A_{P+1},A_{P+2},\cdots$ 均含 x，即有无限项含 x，故 $x\in\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$。因此

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\subseteq\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n。$$

P_{25} 习题

1．设 $A=\{a,b,c\},B=\{e,f,g,h\},C=\{x,y,z\}$。求 $A\times B,B\times A,A\times C,A^2\times B$。

解：

$A\times B=\{(a,e),(a,f),(a,g),(a,h),(b,e),(b,f),(b,g),(b,h),(c,e),(c,f),(c,g),(c,h)\}$
$B\times A=\{(e,a),(e,b),(e,c),(f,a),(f,b),(f,c),(g,a),(g,b),(g,c),(h,a),(h,b),(h,c)\}$
$A\times C=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z)\}$

$A^2\times B=\{((a,a),e),((a,a),f),((a,a),g),$

$((a,a),h),((a,b),e),((a,b),f),((a,b),g),((a,b),h),((a,c),e),$
$((a,c),f),((a,c),g),((a,c),h),((b,a),e),((b,a),f),((b,a),g),$
$((b,a),h),((b,b),e),((b,b),f),((b,b),g),((b,b),h),((b,c),e),$
$((b,c),f),((b,c),g),((b,c),h),((c,a),e),((c,a),f),((c,a),g),$
$((c,a),h),((c,b),e),((c,b),f),((c,b),g),((c,b),h),((c,c),e),$
$((c,c),f),((c,c),g),((c,c),h)\}$

2．设 A,B 为集合，试证：A×B＝B×A 的充要条件是下列三个条件至少一个成立：

（1）$A=\phi$；（2）$B=\phi$；（3）$A=B$。

证： $\Leftarrow$若（1）成立，$A\times B=\phi=B\times A$。

若（2）成立，同上。
若（3）成立，A×B=B×B=B×A。

$\Rightarrow$假设必要性不成立，即 $A\neq\phi,B\neq\phi,A\neq B$。故不妨设 $\exists x$ 使得 $x\in A,x\overline{\in}B$。

设 $y\in B$，则 $(x,y)\in A\times B,(x,y)\overline{\in}B\times A$，矛盾。

于是，假设不成立。因而必要性成立。
必要性也可以如下证明：

1.若 $A\times B=B\times A=\phi$，则 $A=\phi$ 或 $B=\phi$。

2.若 $A\times B=B\times A\neq\phi$，则 $\forall x\in A,y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=B\times A$。于是 $x\in B,y\in A$，因此 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，故 A=B。

3．设 A,B,C,D 为任四个集合，证明：

$$(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$$

证： $\forall(x,y)\in(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)$，有 $x\in A\bigcap B,y\in C\bigcap D$，即

$x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。所以 $(x,y)\in A\times C,(x,y)\in B\times D$，因此

$(x,y)\in(A\times C)\bigcap(B\times D)$，从而

$$(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)\subseteq(A\times C)\bigcap(B\times D)\text{。}$$

反之，$\forall(x,y)\in(A\times C)\bigcap(B\times D)$，有 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。即

$(x,y)\in(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)$，从而

$$(A\times C)\bigcap(B\times D)\subseteq(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)\text{。}$$

因此，$(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$。

4．设 E_1,E_2,E_3,E_4 为任意集合，试证：

$$(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)=((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$$

证：$\forall(x,y)\in(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)$，有 $x\in E_1,y\in E_2$ 且 $x\notin E_3$ 或 $y\notin E_4$。则

若 $x\notin E_3$，则 $x\in E_1\setminus E_3)$，故 $(x,y)\in(E_1\setminus E_3)\times E_2)$，即

$(x,y)\in((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$。

若 $y\notin E_4$，同理可证 $(x,y)\in((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$。从而

$$(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)\subseteq((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))\text{。}$$

反之，$\forall(x,y)\in((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$，则 $(x,y)\in(E_1\setminus E_3)\times E_2)$ 或 $(x,y)\in E_1\times(E_2\setminus E_4)$，即 $x\in E_1$，$y\in E_2$ 但 $x\notin E_3$ 或 $x\in E_1$，$y\in E_2$ 但 $y\notin E_4$。从而有 $(x,y)\in E_1\times E_2$，但 $(x,y)\notin E_3\times E_4$，即 $(x,y)\in(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)$，从而

$$((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))\subseteq(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)\text{。}$$

综上可得：$(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)=((E_1\setminus E_3)\times E_2)\bigcup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$。

5．设 $A\subseteq X,B\subseteq Y$，试证：$(A\times B)^C=(A^C\times B)\bigcup(A\times B^C)\bigcup(A^C\times B^C)$

证：$\forall(x,y)\in(A\times B)^C$，则 $(x,y)\notin(A\times B)$，故 $x\notin A$ 或 $y\notin B$。于是

1. 若 $x\notin A$，则 $x\in A^C$。因此

(1) 若 $y\in B$，则 $(x,y)\in A^C\times B\subseteq(A^C\times B)\bigcup(A\times B^C)\bigcup(A^C\times B^C)$。

(2) 若 $y \notin B$，则 $y \in B^C$，即 $(x,y) \in A^C \times B^C \subseteq (A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C)$。

2. 若 $x \in A$，则必有 $y \notin B$，故 $(x,y) \in A \times B^C \subseteq (A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C)$。

综上可得：$(A \times B)^C \subseteq (A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C)$。

反之，$\forall (x,y) \in (A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C)$，则

$(x,y) \in A^C \times B$ 或 $(x,y) \in A \times B^C$ 或 $(x,y) \in A^C \times B^C$，于是，

(1) 若 $(x,y) \in A^C \times B$，则 $x \notin A$ 且 $x \in B$，即 $(x,y) \notin A \times B$，于是 $(x,y) \in (A \times B)^C$。

(2) 若 $(x,y) \in A \times B^C$，则 $x \in A$ 且 $x \notin B$，即 $(x,y) \notin A \times B$，于是 $(x,y) \in (A \times B)^C$。

(3) 若 $(x,y) \in A^C \times B^C$，则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$，即 $(x,y) \notin A \times B$，于是 $(x,y) \in (A \times B)^C$。

综上可得：$(A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C) \subseteq (A \times B)^C$。

于是 $(A \times B)^C = (A^C \times B) \cup (A \times B^C) \cup (A^C \times B^C)$。

7． 设 A,B,C 是三个任意集合，证明：

$$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$$

证： $A \times (B \Delta C) = A \times ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \times (B \setminus C) \cup A \times (C \setminus B)$

$= ((A \times B) \setminus (A \times C)) \cup ((A \times C) \setminus (A \times B)) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

8． 设 A, B 为集合，下列命题哪些为真？

（1）$(x,y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A$ 且 $y \notin B$

（2）$(x,y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A$ 或 $y \notin B$

（3）$2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$

（4）若 $A \times C = B \times C$，则 $A = B$。

（5）若 $A \times C = B \times C, C \neq \varnothing$，则 $A = B$。

答案：（2），（5）为真。

9． 设 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，则 A×B 是多少个序对组成的？A×B 有多少个不同的子集？

答：$A \times B$ 有 mn 个序对；$A \times B$ 有 2^{mn} 个不同子集。

10． 设 A,B 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $A \times B = B \times A$，则 $A = B$。

证：$\forall x \in A$，因为$B \neq \varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有$(x,y) \in A \times B$，因而$(x,y) \in B \times B$，故$x \in B$。从而$A \subseteq B$。

反之，$\forall x \in B$，因为$B \neq \varnothing$，故在B中任取一元素 y，必有$(x,y) \in B \times B$，因而$(x,y) \in A \times B$，故$x \in A$。从而$B \subseteq A$。

于是$A = B$。

P_{33}习题

1. 某班学生中有 45%正在学德文，65%正在学法文。问此班中至少有百分之几的学生正同时学德文和法文？

解：设 A, B 分别为正在学德文和法文的学生的集合，班级总人数为 n，则$|A| = n \bullet 45\%, |B| = n \bullet 65\%$，于是同时学习德文和法文的人数为$|A \cap B|$，故

$|A \cap B| \geq |A| + |B| - n = n \bullet 10\%$。

于是全班至少百分之十的学生同时学德文和法文。

2．求 1 到 250 之间不能被 2，3，5，7 中任一数整除的数的个数。

解：设$S = \{1,2,\cdots,250\}$，在 S 上的定义性质$P_1, P_2, P_3, P_4, \forall n \in S$，n 具有性质$P_1$（相应地$P_2, P_3, P_4$）当且仅当$2 \mid n (3 \mid n, 5 \mid n, 7 \mid n)$。

令A_i为 S 中具有性质P_i之集，$i = 1,2,3,4$，则

$$A_1 = \left\{ 2k \mid k = 1,2,\cdots,\left[\frac{250}{2}\right] \right\}$$

$$A_2 = \left\{ 3k \mid k = 1,2,\cdots,\left[\frac{250}{3}\right] \right\}$$

$$A_3 = \left\{ 5k \mid k = 1,2,\cdots,\left[\frac{250}{5}\right] \right\}$$

$$A_4 = \left\{ 7k \mid k = 1,2,\cdots,\left[\frac{250}{7}\right] \right\}$$

所求为：

$$\begin{aligned}
&|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= 250 - ((125+83+50+35) - (41+25+17+16+11+7) + (8+5+3+2) - 1) \\
&= 250 - (293 - 117 + 18 - 1) = 57
\end{aligned}$$

3．设 A, B 是两个有限集，试求$\left|2^{2^{A\times B}}\right| = ?$

解：$\left|2^{2^{A\times B}}\right| = \left|2^{2^{A\times B}}\right| = 2^{\left|2^{A\times B}\right|} = 2^{2^{|A|\cdot|B|}}$

4．马大哈写 n 封信，n 个信封，把 n 封信放入到 n 个信封中，求全部装错的概率是多少？

解：$|S_n| = n!$，令 A 表示所有信都装错的集合，即

$A = \{i_1, i_2, \cdots, i_n \mid i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \cdots, i_n \neq n\}$。

令 A_i 表示第 i 个信封恰好装对的集合，则 $A_i^C \subseteq A$。所以全部装错的集合为：

$$A = A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C。$$

于是，易得

$|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, i \neq j$。

对于 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，有 $|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}| = (n-k)!$。又

$$|A| = |A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n (0)!$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}),\ 故$$

$$P = \frac{|A|}{|S_n|} = \frac{|A|}{n!} = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx e^{-1} = 0.3678$$

〔答案：0.3679，当 n≥10 时，概率都近似等于 0.3679〕。

5．毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

证：设 $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是小伙的集合，$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ 是姑娘的集合。

与 f_1 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_1} 表示；

与 f_2 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_2} 表示；

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

与 f_n 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_n} 表示；

于是，由题意：$G_{f_1} \bigcup G_{f_2} \bigcup \cdots \bigcup G_{f_n} = G$ 且 $G_{f_i} \neq \phi$ 且 $G_{f_i} \neq G$，$i = 1, 2, 3, \cdots, n$。

若存在 $G_{f_i}, G_{f_j} (i \neq j)$，使得 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$，则结论成立。

反证法：假设不存在 G_{f_i} 和 G_{f_j} 满足 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$。于是

$\forall i, j (i \neq j), G_{f_i}$ 与 G_{f_j} 应满足：$G_{f_i} \subseteq G_{f_j}$ 或 $G_{f_j} \subseteq G_{f_i}$ 必有一个成立。

因此把 G_{f_1}，$G_{f_2}, \cdots$，G_{f_n} 重新排列有：$G_{f_{i1}} \subseteq G_{f_{i2}} \subseteq \cdots \subseteq G_{f_{in}}$。从而 f_{in} 与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

因此假设不成立，本题得证。

第二章 映 射

P_{39} **习题**

1. 设 A，B 是有穷集，$|A|=m,|B|=n$

（1）计算$|A^B|$；（2）从 A 到 A 有多少个双射？

解：（1）$|A^B|=m^n$；（2）从 A 到 A 共有 m!个双射。

2. 设 X 是一个有穷集合，证明：从 X 到 X 的部分映射共有$(|X|+1)^{|X|}$个。

证：设$f:A\to X, A\subseteq X$，则f是 X 到 X 的一个部分映射。

设$|X|=n$

当$A=\varnothing$时，f的个数为$C_n^0 n^0=1$

当 A 是单元素集时，f的个数为$C_n^1 n^1=n$

当 A 中有 2 个元素时，f的个数为$C_n^2 n^2$

$\vdots$

当 A 中有 k 个元素时，f的个数为$C_n^k n^k$

$\vdots$

当 A 中有 n 个元素时，f的个数为$C_n^n n^n$

因此f的总个数为$C_n^0 n^0+C_n^1 n^1+\cdots+C_n^k n^k+\cdots+C_n^n n^n＝(1+n)^n$

$＝(|X|+1)^{|X|}$

即从 X 到 X 的部分映射共有$(|X|+1)^{|X|}$个。

4.设$u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}$是一个两两不相交的整数构成的数列，则必有长至少为$n+1$的递增子序列或有长至少为$m+1$的递减子序列。

证：令$A=\{u_1,u_2,\cdots u_{mn+1}\}$，则$|A|=mn+1$。

设以u_i为首项的最长递增子序列的长度为ℓ_i^+，

设以u_i为首项的最长递减子序列的长度为ℓ_i^-。

反证法：假设题中结论不成立，则 $\ell_i^+ \le n, \ell_i \le m, i = 1,2,3,\cdots,mn+1$。

令 $\varphi: A \to \{1,2,\cdots,n\}\times\{1,2,\cdots,m\}, \forall u_i \in A$，$\varphi(u_i) = (\ell_i^+, \ell_i^-)$，则 φ 是单射。

实际上，$\forall u_i, u_j \in A$ 且 $u_i \ne u_j (i<j)$，则

若 $u_i > u_j$，则 $\ell_i^- > \ell_j^-$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi\ (u_j)$。

若 $u_i < u_j$，则 $\ell_i^+ > \ell_j^+$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi(u_j)$。

故 φ 为单射，从而就有 $mn+1 \le mn$ 矛盾。

P_{43} **习题**

1. 证明：从一个边长为 1 的等边三角形中任意选 5 个点，那么这 5 个点中必有 2 个点，它们之间的距离至多为 1/2，而任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多是 1/3。

证：(1) 将边长为 1 的等边三角形 4 等分，得到 4 个边长为 1/2 的小等边三角形。

任给 5 个点，由鸽巢原理可知必有一个小等边三角形里面至少有 2 个点，又因为小等边三角形中任意两个点之间的距离至多为 1/2，因此 5 个点中必有 2 个点，它们之间的距离至多为 1/2。

(2) 连接各边的三等分点，则可得到 9 个边长都为 1/3 的小等边小角形，每个小等边三角形中任意两个点之间的距离至多为 1/3。将 10 个点放入该大等边三角形中，则由鸽洞原理，必有一个小等边三角形中至少有 2 个点，因此任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多为 1/3。

2. 已知 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots a_m$，试证：存在两个整数 $k, \ell, 0 \le k < \ell \le m$，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_\ell$ 能被 m 整除。

证：考察下式：

a_1

a_1+a_2

$a_1+a_2+a_3$

$\vdots$

$a_1+a_2+\cdots+a_m$

若第i式能被m整除，则显然成立，此时$k=0,\ell=i$；

若任一式都不能被m整除，则考察各式被m整除后的余数，如下式：

$a_1=q_1m+r_1$

$a_1+a_2=q_2m+r_2$

$a_1+a_2+a_3=q_3m+r_3$

$\vdots$

$a_1+a_2+\cdots+a_m=q_mm+r_m$

由于每一个都不能被m整除，故共有m个余数—相当于m个物体。而任意整数被m除后，只有m－1 个余数——相当于m－1 抽屉，于是由鸽巢原理可知必有两个余数相等。设这两个余数为$r_i,r_j,i\neq j(i<j)$，对应两式相减便有：

$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$可被$m$整除，此时$k=i,\ell=j$。

3. 证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

证：设$a_1,a_2,\cdots,a_{52}$是 52 个整数，令γ_i为a_i被 100 除后所得的余数，即

$a_i=100q_i+\gamma_i,0\le\gamma_i\le 99,i=1,2,\cdots,52$[相当于 52 个物体]。

任意一个整数被 100 除以后的余数为 0，1，2，…，99，把它们分成 51 个类，即$\{0\},\{1,99\},\{2,98\},\ldots\{49,51\},\{50\}$[相当于 51 个盒子]。

把 52 个余数$\gamma_i,i=1,2,\cdots,52$放入到 51 个类中，必在两个余数放在一个类里。

设在一个类中的两个余数分别为γ_i与γ_j，$i\neq j$。则有

（1） 若$\gamma_i\neq\gamma_j$，则$\gamma_i+\gamma_j=0$，即a_i+a_j能被 100 整除。

（2） $\gamma_i=\gamma_j$，则$\gamma_i-\gamma_j=0$，即a_i-a_j能被 100 整除。

5. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为$1,2,3,\cdots,n$的任一排列，若 n 是奇数且

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)\neq 0,$$

则乘积为偶数。

解：反证法：若$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$为奇数，则$(a_i-i)$中的$a_i$与$i$必是一

个为奇数，一个为偶数。而 n 为奇数，故奇数个数为$\left[\frac{n}{2}\right]+1$比偶数$\left[\frac{n}{2}\right]$多一个，这是不可能的。

P_{46} 习题

1.设 $f:X\to Y$， $C,D\subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

证 1： $\forall x\in f^{-1}(C\setminus D)$，则 $f(x)\in C\setminus D$，即 $f(x)\in C$ 但 $f(x)\overline{\in} D$。于是

$x\in f^{-1}(C)$ 但 $x\in f^{-1}(D)$，因此 $x\in f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$，

故 $f^{-1}(C\setminus D)\subseteq f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

反之，设 $x\in f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$，有 $x\in f^{-1}(C)$且$x\overline{\in}f^{-1}(D)$

因此 $f(x)\in C$且$f(x)\overline{\in}D$，即 $f(x)\in C\setminus D$

从而 $x\in f^{-1}(C\setminus D)$

$$故\ f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)\subseteq f^{-1}(C\setminus D)$$

因而 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

证 2： $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C\bigcap D^{c})=f^{-1}(C)\bigcap f^{-1}(D^{C})$

$$=f^{-1}(C)\bigcap(f^{-1}(D))^{C}=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$$

2. 设 $f:X\to Y$, A,B$\subseteq$X，证明

（1） $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$

（2） $f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$

（3） $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$

证：（1）设 $y\in f(A\bigcup B)$，则 $\exists x\in A\bigcup B$ 使得 $y=f(x)$。于是， $x\in A或x\in B$。因此， $y\in f(A)或y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\bigcup f(B)$，故

$f(A\bigcup B)\subseteq f(A)\bigcup f(B)$

反之，设 $y \in f(A)\bigcup f(B)$，则 $y \in f(A)或y \in f(B)$。于是 $\exists x \in A$ 或 $x \in B$，使得 $f(x)=y$。因此不论何种情况都 $\exists x \in A\bigcup B$，使得 $f(x)=y$。因此 $y \in f(A\bigcup B)$，故

$f(A)\bigcup f(B) \subseteq f(A\bigcup B)$

因此，$f(A)\bigcup f(B) = f(A)\bigcup(B)$

（2）设 $y \in f(A\bigcap B)$，则 $\exists x \in A\bigcap B$，使得 $y=f(x)$。于是，$x \in A$ 且 $x \in B$。

从而，$y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$，所以 $y \in f(A)\bigcup f(B)$，故

$f(A\bigcap B) \subseteq f(A)\bigcap f(B)$

（3）设 $y \in f(A)\setminus f(B)$，则 $y \in f(A)$ 但 $y \bar{\in} f(B)$。于是 $\exists x \in A$ 使得 $f(x)=y$，且 $x \bar{\in} B$，从而 $\exists x \in A\setminus B$，使得 $f(x)=y$。

故 $y=f(x) \in f(A\setminus B)$，即

$f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$。

3.设 $f: X \to Y$，$A \subseteq X, B \subseteq Y$，证明：

$$f(f^{-1}(B)\bigcap A) = B\bigcap f(A)$$

证：设 $y \in f(f^{-1}(B)\bigcap A)$，则 $\exists x \in f^{-1}(B)\bigcap A$，使得 $f(x)=y$。于是 $x \in f^{-1}(B)$ 且 $x \in A$，即 $f(x) \in B且f(x) \in f(A)$，因此 $y=f(x) \in B$ 且 $y \in f(A)$，即 $y \in B\bigcap f(A)$，从而

$$f(f^{-1}(B)\bigcap A) \subseteq B\bigcap f(A)。$$

反之，设 $y \in B\bigcap f(A)$，则 $y \in B$ 且 $y \in f(A)$。于是 $\exists x \in A$ 且 $x \in f^{-1}(B)$，使得 $f(x)=y$。从而 $\exists x \in f^{-1}(B)\bigcap A$，使得 $f(x)=y$，因此 $y \in f(f^{-1}(B)\bigcap A)$。从而

$B\bigcap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B\bigcap A))$

因此，$f(f^{-1}(B\bigcap A)) = B\bigcap f(A)$。

4.设 $f: X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个

命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（1）（a）若 $f(x)\in f(A)$，则 x 未必在 A 中

（b）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A$

（c）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\overline{\in}A$

（d）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A^c$

（2）（a） $f(f^{-1}(B))=B$　　（b） $f(f^{-1}(B))\subseteq B$

（c） $f(f^{-1}(B))\supseteq B$　　（d） $f(f^{-1}(B))=B^c$

（3）（a） $f^{-1}(f(A))=A$　　（b） $f^{-1}(f(A))\subseteq A$

（c） $f^{-1}(f(A))\supseteq A$　　（d）上面三个均不对

（4）（a） $f(A)\neq\varnothing$　　（b） $f(B)\neq\varnothing$

（c）若 $y\in Y,$ 则$f^{-1}(y)\in x$　　（d）若 $y\in Y,$ 则$f^{-1}(y)\subseteq x$

答案：（a）（b）（c）（d）

7.设 $f:X\to Y, A\subseteq X,$ 则 $(f(A))^c\subseteq f(A^c)$ 成立吗？

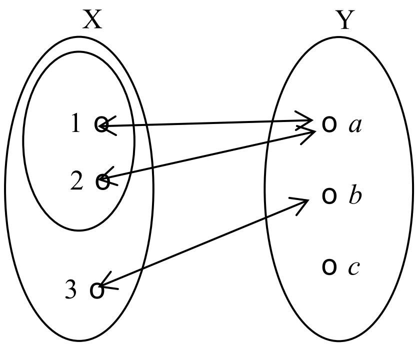
解：不成立。

反例：设 $X=\{1,2,3\}, Y=\{a,b,c\}$。

$f:X\to Y, f(1)=a, f(2)=a, f(3)=b$。

令 $A=\{1,2\}$，则 $A^c=\{3\}$。

$f(A)=\{a\}$，$(f((A))^c=\{b,c\},$ 但$f(A^c)=b$。



8.设 X 是一个无穷集合，$f:X\to Y$。证明：存在 X 的一个真子集 E 使得 $f(E)\subseteq E$。

证：取 $x_0\in X$，令 $x_1=f(x_0), x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$。若到某一位与前面有重复项，设为第 k 项，即 $f(x_k)=x_i(i<k)$。令 $E=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset X$，则

$f(E)\subseteq E$ 且 $E\subset X$。

若 x_i 互不相同，令 $E_1=X\setminus\{x_0\}\subset X$，则 $f(E_1)\subseteq E_1$。

[不去掉 x_0 可能就会有 $E_1=X$]

9.设 $f:A\to B$，证明 $\forall T\in 2^B$，都有 $f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$

证；若 $T=\varnothing$，则 $f(f^{-1}(T))=\varnothing,T\cap f(A)=\varnothing$,因而 $f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$。

若 $T\neq\varnothing$，设 $y\in f(f^{-1}(T))$，则 $\exists x\in f^{-1}(T)$，使得 $f(x)=y$ 且 $x\in A$，于是 $y=f(x)\in T$ 且 $y=f(x)\in f(A)$，因此 $y\in T\cap f(A)$。

$$\text{故 } f(f^{-1}(T))\subseteq T\cap f(A)$$

反之，设 $y\in T\cap f(A)$，则 $y\in T$ 且 $y\in f(A)$。于是 $\exists x\in f^{-1}(T)$ 且 $x\in A$，使得 $f(x)=y$。从而，$f(x)\in f(f^{-}(T)\text{且}f(x)\in f(A)$，因此 $y=f(x)\in f(f^{-1}(T)\cap A))$，而 $f^{-1}(T)\subseteq A$，所以 $f(f^{-1}(T)\subseteq f(A)$，于是 $y\in f(f^{-1}(T))$，故

$$T\cap f(A)\subseteq f(f^{-1}(T))$$

从而 $T\cap f(A)=f(f^{-1}(T))$

P_{50} **习题**

1.设 $X=\{a,b,c\},Y=\{0,1\},Z=\{2,3\},f:X\to Y,f(a)=f(b)=0$，

$f(c)=1;g:Y\to \mathrm{Z}$， $g(0)=2,g(1)=3$，试求 $g\circ f$。

解：

$g\circ f(a)=g(0)=2$
$g\circ f(b)=g(0)=2$
$g\circ f(c)=g(1)=3$

因此 $g\circ f:X\to Z,g\circ f(a)=2,g\circ f(b)=2,g\circ f(c)=3$。

2. 设 X,Y,Z 是三个非空集合，$|Z|\geq 2$。证明：$f:X\to Y$ 是满射当且仅当不存在从 Y 到 Z 的映射 g_1 和 g_2，使得 $g_1\neq g_2$，但 $g_1\bullet f=g_2\bullet f$。

证：$\Rightarrow$因 $f:X\to Y$ 且 f 为满射，故 $\forall y\in Y,\exists x\in X$，使得 $f(x)=y$。

假设存在 $g_1,g_2,g_1\neq g_2$，但 $g_1\bullet f=g_2\bullet f$。因为 $g_1\neq g_2$，所以 $\exists y_0\in Y$，使得 $g_1(y_0)\neq g_2(y_0)$。对于上面的 y_0，$\exists x_0\in X$（f 是满射），使得 $g_1(f(x_0))\neq g_2(f(x_0))$ $[g_1(y_0)\neq g_2(y_0)]$，即 $g_1f(x_0)\neq g_2f(x_0)$。故 $g_1\bullet f\neq g_2\bullet f$ 与 $g_1\bullet f=g_2\bullet f$，矛盾。

所以假设不成立。

<u>也可以用如下方法：</u>

f 满射 $\Leftrightarrow$ f 右可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists h: Y \to X$，使得 $f \bullet h = I_Y$ $\Leftrightarrow$ 假设 $g_1 \bullet f = g_2 \bullet f$ 得到 $g_1 = g_2$，命题得证。

$\Leftarrow f: X \to Y$，假设 f 不是满射，则 $\exists y_0 \in Y$，使得 $\forall x \in X, f(x) \neq y_0$。构造两个映射 $g_1, g_2: Y \to Z$，

当 $y = y_0$ 时，$g_1(y_0) \neq g_2(y_0)$；

当 $y \neq y_0$ 时，$g_1(y) = g_2(y)$。

因为 $|Z| \geq 2$，故此时 $g_1 \neq g_2$，但

$\forall x \in X, g_1 \bullet f(x) = g_1(y \neq y_0) = g_2(y \neq y_0) = g_2 \bullet f(x)$

即 $g_1 \bullet f$ ＝ $g_2 \bullet f$，与假设不存在 $g_1 \neq g_2$，但 $g_1 \bullet f = g_2 \bullet f$ 矛盾，故 f 一定是满射。

3. 设 X, Y, Z 是三个非空的集合，$|X| \geq 2$，证明：$f: X \to Y$ 是单射当且仅当不存在从 Z 到 X 的映射 g_1, g_2，使得 $g_1 \neq g_2$，但 $f \bullet g_1 = f \bullet g_2$。

证： $\Rightarrow$ f 是单射，则 $\forall x_1, x_2, x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$。假设存在 g_1 和 g_2：$Z \to X, g_1 \neq g_2$，因为 $|X| \geq 2$，于是 $\exists z_0 \in Z$，使得 $g_1(z_0) \neq g_2(z_0)$。

而由于 f 为单射，故 $f(g_1(z_0)) \neq f(g_2(z_0))$，即 $f \bullet g_1(z_0) \neq f \bullet g_2(z_0)$，故 $f \bullet g_1 \neq f \bullet g_2$ 矛盾。

可以用： f单射 $\Leftrightarrow$ f左可逆的 $\Leftrightarrow$ $\exists h$使得$hf = I_X$ $\Rightarrow$ 由$f \bullet g_1 = f \bullet g_2$ $\Rightarrow$ $g_1 = g_2$得证。

逆否命题：$g_1 \neq g_2 \Leftrightarrow fg_1 \neq fg_2$。

$\Leftarrow$假设 f 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1) = f(x_2)$。构造两个映射 g_1 和 $g_2: Z \to X$, $\forall z \in Z$, 令 $g_1(z) = x_1, g_2(z) = x_2$，由于 $|X| \geq 2$，故若 $x_1 \neq x_2$，则有 $g_1 \neq g_2$。但 $\forall z \in Z, f \bullet g_1(z) = f(x_1) = f(x_2) = f \bullet g_2(z)$，于是有 $f \bullet g_1 = f \bullet g_2$ 矛盾。

P_{55} 习题

1. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g：$N\to N$，使得

（1）$fg=I_N$，但 $gf\neq I_N$；

（2）$gf=I_N$，但 $fg\neq I_N$。

解：（1）$fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$，故 f 是满射，但 f 不是单射。于是令：

$f:N\to N, f(1)=1, f(n)=n-1, n\geq 2$，$g:N\to N,\forall n\in N, g(n)=n+1$，则

$fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$。事实上，当 n＝1 时，$gf(1)=g(f(1))=g(1)=2$，故 $gf\neq I_N$。

（2）自己做。

2. 设 $f:X\to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $gf=I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $fg=I_Y$，则 f 是可逆的吗？

答案：（1）f 不一定可逆。

当 $|X|=1$ 时，f 不一定可逆。

当 $|X|\geq 2$ 时，f 可逆。

（2）f 一定可逆。

证：由 $fg=I_Y$，得 f 是单射。假设 f 不是满射，则 g 不唯一，矛盾。

3. 设 $f:X\to Y, |X|=m, |Y|=n$，则

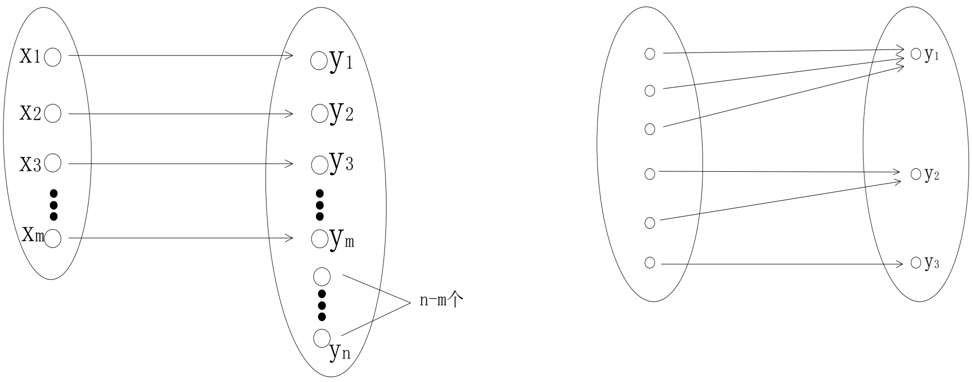
（1）若 f 是左可逆的，则 f 有多少个左逆映射？

（2）若 f 是右可逆的，则 f 有多少个右逆映射？

解：令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m), Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则

（1）如图 1(a)所示：有 m^{n-m}；（2）如图 1(b)所示：有

$$\left|f^{-1}(y_1)\right|\bullet\left|f^{-1}(y_2)\right|\bullet\cdots\bullet\left|f^{-1}(y_n)\right|。$$



（a）　　　　　　　　　　　　　　　　(b)

图 1

5. 是否有一个从 X 到 X 的一一对应 f，使得 $f = f^{-1}$，但 $f \neq I_X$？

解：存在。f 为对换即可。

P_{63} **习题**

1.设 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$。

解：

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2.将置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积。

解：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$=(1\ 7)(1\ 3)(2\ 9)(2\ 8)(2\ 4)(2\ 6)$

3.设 σ 是任一 n 次置换，试证：σ 与 σ^{-1} 的奇偶性相同。

证：假设 σ 与 σ^{-1} 的奇偶性不同，不妨设 σ 为奇置换，σ^{-1} 为偶置换。因为 $\sigma\sigma^{-1} = I$（I 为恒等置换），又 $I = (ij)(ij)$，因而 I 是偶置换。

而 $\sigma \bullet \sigma^{-1}$ 是奇置换与 I 是偶置换矛盾。

因而假设不成立，故 σ 与 σ^{-1} 奇偶性相同。

5.任一偶置换均可被分解成 3－循环置换（123），（124）…（12n）中若干之乘积。

证： $\forall i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\},\ i\neq j,s\neq t$

$$(ij)(st)=(1i)(1j)(1i)(2s)(2t)(2s)=(1i)(1j)(2s)(1j)(2t)(2s)$$

$$=(1i)(2s)(1j)(2t)(1i)(2s)$$

$$=(1\quad 2\quad s)(1\quad 2\quad i)(1\quad 2\quad t)(1\quad 2\quad j)\ (1\ 2\ s)(1\ 2\ i)$$

因为$(1\quad 2\quad s)(1\quad 2\quad i)=\begin{pmatrix}1&2&s\\2&s&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&i\\2&i&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&s&i\\i&s&2&1\end{pmatrix}=(1i)(2s)$

$$(12t)(12j)=\begin{pmatrix}1&2&t\\2&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&j\\2&j&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&t&j\\j&t&2&1\end{pmatrix}=(1j)(2t)$$

因此本题得证。

6. 证明下列置换等式

（1）$(ac_1\cdots c_hbd_1\cdots d_k)(ab)=(ac_1\cdots c_h)(bd_1\cdots d_k)$

证： $(ac_1\cdots c_hbd_1\cdots d_k)(ab)=\begin{pmatrix}a&c_1&c_2&\cdots&c_h&b&d_1&\cdots&d_k\\c_1&c_2&c_3&\cdots&b&d_1&d_2&\cdots&a\end{pmatrix}(ab)$

$$=\begin{pmatrix}a&c_1&c_2&\cdots&c_h&b&d_1&\cdots&d_k\\c_1&c_2&c_3&\cdots&a&d_1&d_2&\cdots&b\end{pmatrix}$$

$$=(ac_1\cdots c_h)(bd_1\cdots d_k)$$

（2）$(ac_1\cdots c_h)(bd_1\cdots d_k)(ab)=\begin{pmatrix}a&c_1&\cdots&c_h&b&d_1&\cdots&d_k\\c_1&c_2&\cdots&a&d_1&d_2&\cdots&b\end{pmatrix}(ab)$

$$=\begin{pmatrix}a&c_1&\cdots&c_h&b&d_1&\cdots&d_k\\c_1&c_2&\cdots&b&d_1&d_2&\cdots&a\end{pmatrix}=(ac_1\cdots c_hbd_1\cdots d_k)$$

8.在所有的 n 次置换中，有多少个 n—循环置换？

解： $(i_1,i_2,\cdots,i_n)=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\i_2&i_3&\cdots&i_1\end{pmatrix}$

对i_1，有 n 种选择

对i_2，有（n-1）种选择

……

对i_n有 1 种选择

因此共有 n!种排列

对每个 n－循环置换，均有 n 种排列，因此

n－循环置换的个数为 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 个

P_{70} **习题**

3. 找一个既不满足交换律又不满足结合律的二元运算

解： n 维向量空间中向量的叉积运算。

4. 给出一个三元运算的例子

解： 求三个正整数的最大公因数。

5. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的代数运算"∘"如表所示。代数运算"∘"是否满足交换律？结合律？"∘"有单位元吗？

解： 不满足交换律，因为运算表不对称。$d\circ c=a,c\circ d=d,d\circ c\neq c\circ d$。也不满足结合律，

$$(b\circ b)\circ c=a\circ c=c$$
$$b\circ(b\circ c)=b\circ a=b$$
$$(b\circ b)\circ c\neq b\circ(b\circ c)$$

单位为 a

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

6. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$， $\forall m,n\in N,m\circ n=nlog_{10}m$。

那么"∘"是 N 上的代数运算吗？为什么？

解： 当 m=1 时，$log_{10}m=0$， $nlog_{10}m=0,0\overline{\in}N$

因此"∘"不是 N 上的代数运算。

7. 设"∘"是 X 上的代数运算，则应该怎样定义"∘"的逆运算？回忆一下，逆运算通常比原运算"难算"，这是为什么？例如，积分比微分难，减法比加法难，除法比乘法难，开方比幂方运算难。

解： "∘"的逆运算可以这样定义：一个从 X 到 $X\times X\times X\times\cdots\times X=X^n$ 的映射

"∘"称为 X 上的 n 元运算的逆运算

"∘"的逆运算的象集所在的集合 $X\times X\times X\times\cdots\times X$ 的元素的个数是 X 的元素个数的 m^{n-1} 倍（设 $|X|=m$），因而逆运算的个数很多，因此得到其中的一种就较困难，故逆运算较难算。

第三章 关 系

P_{86} **习题**

1.给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？

解：设 $X=(a,b,c)$,R 是 X 上的一个二元关系且 $R=\{(a,a),(a,b)\}$ 即可。

2.是否存在一个同时不满足自反性，对称性，反对称性，传递性和反自反性的二元关系？

解：存在。

设 $X=\{a,b,c\}$，R 是 X 上的二元关系 $R=\{(a,a),(a,c),(a,b),(c,a)\}$。

3.设 R，S 是 X 上的二元关系，下列命题哪些成立：

$a)$若 R 与 S 是自反的，则 $R\bigcup S,R\bigcap S$ 分别也是自反的。

$b)$ 若 R 与 S 是对称的，则 $R\bigcup S,R\bigcap S$ 分别对称的

$c)$ 若 R 与 S 是传递的，则 $R\bigcap S$ 也是传递的

$d)$ 若 R 与 S 不是自反的，则 $R\bigcup S$ 也不是自反的

$e)$ 若 R 与 S 是反自反的，则 $R\bigcup S,R\bigcap S$ 也是反自反的

$f)$ 若 R 是自反的，则 R^c 也是反自反的。

$g)$ 若 R 与 S 是传递的，则 R\S 是传递的

答案：真真真假真真假

4.实数集合上的“小于”关系<是否市反自反的？集合 X 的幂集上的“真包含”关系$\subset$是否是反自反的？为什么？

证：实数集合上的“小于”关系<是反自反的；

集合 X 的幂集上的“真包含”关系$\subset$也是反自反的。

5.设 R、S 是 X 上的二元关系。证明：

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$；（2）$(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$

（3）$(R\bigcap S)^{-1}=R^{-1}\bigcap S^{-1}$；（4）若 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$

证：（1） $\forall(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，即 $(x,y)\in R$，因此 $(R^{-1})^{-1}\subseteq R$。

反之，$\forall(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，即 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$，因此 $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$。

从而 $(R^{-1})^{-1}=R$

（2） $\forall(x,y)\in(R\bigcup S)^{-1}$，则 $(y,x)\in R\bigcup S$，

即 $(y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$ 。于是 $(x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1}$，

即 $(x,y)\in R^{-1}\bigcup S^{-1}$，因而 $(R\bigcup S)^{-1}\subseteq R^{-1}\bigcup S^{-1}$ 。

反之，$\forall(x,y)\in R^{-1}\bigcup S^{-1}$，则 $(x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in R^{-1}$ 。

于是 $(y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$，即 $(y,x)\in R\bigcup S$ 。

从而 $(x,y)\in(R\bigcup S)^{-1}$，因此，$R^{-1}\bigcup S^{-1}\subseteq(R\bigcup S)^{-1}$ 。

故 $(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$

（3）$\forall(x,y)\in(R\bigcap S)^{-1}$，则 $(y,x)\in R\bigcap S$ 。于是 $(y,x)\in R$ 且 $(y,x)\in S$，

从而 $(x,y)\in R^{-1}$ 且 $(x,y)\in S^{-1}$，即 $(x,y)\in R^{-1}\bigcap S^{-1}$

因此 $(R\bigcap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\bigcap S^{-1}$

反之，设 $(x,y)\in R^{-1}\bigcap S^{-1}$，则 $(x,y)\in R^{-1}$ 且 $(x,y)\in S^{-1}$

于是 $(y,x)\in R$ 且 $(y,x)\in S$，即 $(y,x)\in R\bigcap S$ 。

从而 $(x,y)\in(R\bigcap S)^{-1}$，因此 $R^{-1}\bigcap S^{-1}\subseteq(R\bigcap S)^{-1}$

故 $R^{-1}\bigcap S^{-1}=(R\bigcap S)^{-1}$

（4）$\forall(x,y)\in R^{-1}$，则 $(y,x)\in R$

因为 $R\subseteq S$，所以 $(y,x)\in S$，于是 $(x,y)\in S^{-1}$

因而 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$

6.设 R 是 X 上的二元关系，证明：$R\bigcup R^{-1}$ 是对称的二元关系。

证 1： $(R\bigcup R^{-1})^{-1}=R^{-1}\bigcup(R^{-1})^{-1}$，故 $R\bigcup R^{-1}$ 是对称的。

证 2： $\forall(x,y)\in R\bigcup R^{-1}$，则 $(x,y)\in R$ 或 $(x,y)\in R^{-1}$，即 $(y,x)\in R^{-1}$ 或 $(y,x)\in R$ 。

于是 $(y,x)\in R\bigcup R^{-1}$，因此 $R\bigcup R^{-1}$ 是对称的。

9.有人说："若 R 是 X 上的二元关系，只要 R 是对称的和传递的，则 R 必是自反的。"他的证明如下：若 *xRy*，则由 R 的对称性便知有 *yRx*。于是由 *xRy* 和 *yRx* 以及 R 的传递性即得 *xRx*。所以，R 是自反的。他的推论错在什么地方？这个结论是否对呢？

解： 若 $R=\varnothing$，则 R 是对称的，传递的，反自反的。

若 $R\neq\varnothing$，只有 $\forall x\in X$ 使得 xRx，才能说 R 是自反的。此人只是说明了 X 中的部分元素满足了 xRx，因而是错误的。

所以这个结论不对。

P_{92} **习题**

1.“父子“关系的平方是什么关系？

解：“父子“关系的平方是”祖孙“关系

2. 设 X={1,2,3,4},R={(1,2),(2,2),(3,4)},S={(2,3),(3,1),(4,2)}

试求：$R\circ S,S\circ R,R^2,S^2,R\circ(S\circ R),(R\circ S)\circ R$。

解：

$R\circ S=\{(1,3),(2,3),(3,2)\}$

$S\circ R=\{(2,4),(3,2),(4,2)\}$

$R^2=\{(1,2),(2,2)\}$

$S^2=\{(2,1),(4,3)\}$

$R\circ(S\circ R)=R\circ\{((2,4),(3,2),(4,2)\}$

$=\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$

$(R\circ S)\circ R=\{(1,3),(2,3),(3,2)\}\circ R$

$=\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$

3.设 R 与 S 为 X 上的任两个集合，下列命题哪些为真？

a）若 R,S 都是自反的，则 $R\circ S$ 也是自反的。

b）若 R,S 都是对称的，则 $R\circ S$ 也是对称的。

c）若 R,S 都是反自反的，则 $R\circ S$ 也是反自反的。

d）若 R,S 都是反对称的，则 $R\circ S$ 也是反对称的。

e）若 R,S 都是传递的，则 $R\circ S$ 也是传递的。

答案： 真假假假假

4. 设 R_1 是 A 到 B，R_2 和 R_3 是 B 到 C 的二元关系，则一般情况下

$R_1\circ(R_2\setminus R_3)\neq(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3)$。但有人声称等号成立，他的证明如下：设 $(a,c)\in R_1\circ(R_2\setminus R_3)$，则 $\exists b\in X$，使得 $(a,b)\in R_1$ 且 $(b,c)\in R_2\setminus R_3$。于是 $(b,c)\in R_2$ 且 $(b,c)\bar{\in} R_3$。从而 $(a,c)\in R_1\circ R_2$ 且 $(b,c)\notin R_1\bullet R_3$，所以 $(a,c)\in(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3)$，即 $R_1\circ(R_2\setminus R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3)$。同理可证相反的包含关系成立，故等式成立，这个证明错在什么地方？

解: 由 $(a,c)\in R_1,(b,c)\in R_2$ 且 $(b,c)\bar{\in}R_3$，只能得到 $(a,b)\in R_1\circ R_2$。但 $(a,c)\bar{\in}R_1\circ R_3$ 不一定成立。

例如 $(a,a)\in R_1,(a,c)\in R_3$ 时，$(a,c)\in(R_1\circ R_3)$

故这步推理错误

5.设 R，S 是 X 上的满足$R\circ S\subseteq S\circ R$的对称关系，证明$R\circ S=S\circ R$.

证 1：设$(x,z)\in S\circ R$，则$\exists y\in X$,使得$(x,y)\in S$且$(y,z)\in R$。

因为 R，S 均对称，所以$R=R^{-1},S=S^{-1}$

于是$(y,x)\in S^{-1}=S,(z,y)\in R^{-1}=R$

从而$(z,x)\in R\circ S,(x,z)\in (R\circ S)^{-1}\subseteq (S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}=R\circ S$

因此$S\circ R\subseteq R\circ S$

故$S\circ R=R\circ S$

证 2 $S\circ R=S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}\subseteq (S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}=R\circ S$，故$S\circ R\subseteq R\circ S$，于是$R\circ S=S\circ R$

6.设 R 为 X 上的对称关系，证明：$\forall n\in N,R^n$是对称关系。

证 1 $(R^n)^{-1}=(R\circ R\circ\cdots\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ R^{-1}\circ\cdots\circ R^{-1}=R\circ R\circ\cdots R=R^n$，故 R 对称。

证 2 $\forall(x,y)\in R^n$，则$\exists y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\in X$，使得

$(x,y_1)\in R,(y_1,y_2)\in R,\cdots,(y_{n-1},y)\in R$ 。因为 R 对称，所以 $(y,y_{n-1})\in R,(y_{n-1},y_{n-2})\in R,\cdots,(y_2,y_1)\in R,(y_1,x\in R)$，因此$(y,x)\in R^n$，故 R 对称。

证 3 用数学归纳法对 n 进行归纳。

当 n=1 时，R^n=R 显然是对称的。

假设当 n=k 时，R^k 对称。

当 n=k+1 时，$R^{k+1}=R^k\circ R=R\circ R^k$。

$\forall(x,y)\in R^{k+1}$，则$\exists z\in X$，使得$(x,z)\in R^k,(z,y)\in R$。

因为 R^k，R 均是对称的，所以$(y,z)\in R,(z,x)\in R^k$，于是$(y,x)\in R\circ R^k=R^{k+1}$。

因此 R^{k+1} 对称。

综上，R^n 对$n\in N$都是对称关系。

7.设$R_1,R_2,R_3,\cdots$是 X 上的二元关系的一个无穷序列，则当每个 R_i 是对称关系时，

$\bigcup_{i=1}^{\infty}Ri$还是对称的吗？

证：$\forall(x,y)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}Ri$，则$\exists i_0$的使得$(x,y)\in R_{io}$。因为$R_{i0}$对称，所以有$(y,x)\in R_{io}$，故$(y,x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}Ri$。因此$\bigcup_{i=1}^{\infty}Ri$还是对称的。

P_{98}**习题**

1.设 R 是 X 上的二元关系，试证（1）

$(R^+)^+=R^+,(2)(R^*)^*=R^*,(3)R\circ R^*=R^*\circ R=R^+,(4)(R^+)^*=(R^*)^+=R^+$。

证：（1）因为$R^+\subseteq(R^+)^+$显然成立。

其次，设$(a,b)\in(R^+)^+$，因为$(R^+)^+$是一切包含R^+的传递关系的交，而$R^+\subseteq(R^+)^+$且R^+是传递的，故$(a,b)\in R^+$，即$(R^+)^+\subseteq R^+$。

因此$(R^+)^+=R^+$。

（2）因为$R^*\subseteq(R^*)^*$显然成立。

其次，设$(a,b)\in(R^*)^*$，因为$(R^*)^*$是一切包含R^*的自反传递关系的交，而R^*本身是自反的也是传递的且$R^*\subseteq(R^*)^*$，故$(a,b)\in R^*$，即$(R^*)^*\subseteq R^*$，因此$(R^*)^*=R^*$。

（3）$R\circ R^*=R\circ(R^0\cup R\cup R^2\cup\cdots)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=R^+$

$R^*\circ R=(R^0\cup R\cup R^2\cup\cdots)\circ R=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=R^+$

（4）先证$(R^+)^*=R^*$

$(R^+)^*=(R^+)^0\cup(R^+)^+=I_X\cup R^+=R^*$

再证$(R^*)^+=R^*$

因为$(R^*)^+$是包含R^*的一切传递关系的交，又因为$R^*\subseteq(R^*)^+$且R^*是传递的，所以$(R^*)^+=R^*$。

因此$(R^+)^*=(R^*)^+=R^*$。

2.设 X＝（a,b,c,d,e），R＝｛（a,b），（b,c），（c,d），（d,e）｝试求R^+和R^*。

解： $R^2=\{(a,c),(b,d),(c,e)\}$

$R^3=\{(a,d),(b,e)\}$
$R^4=\{(a,e)\}$
$R^5=\phi$

故 $R^+=R\cup R^1\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup R^5=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(a,c),$

$(b,d),(c,e),(a,d),(b,e),(a,e)\}$

$R^*=I_X\cup R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),$
$(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(a,c),(b,d),(c,e),(a,d),(b,e),(a,e)\}$

3.设 R,S 为 X 上的二元关系，试证：

（1）$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

（2）$(R\cup S)^*\supseteq R^*\cup S^*$。

证：（1）因为 $R\subseteq R\cup S, S\subseteq R\cup S$

所以 $R^+\subseteq (R\cup S)^+, S^+\subseteq (R\cup S)^+$

因此 $R^+\cup S^+\subseteq (R\cup S)^+$

（2）因为 $R\subseteq R\cup S, S\subseteq R\cup S$

所以 $R^*\subseteq (R\cup S)^*, S^*\subseteq (R\cup S)^*$

因此 $R^*\cup S^*\subseteq (R\cup S)^*$　　　　〔证毕〕

6.举例说明 $s(t(R))$ 与 $t(s(R))$ 确定不相等。

解：设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，在 N 上定义小于关系“＜”，则

$s(t(<))=s(<)=$“不等关系≠”。

$t(s(<))=t(\neq)=$“全关系”。

因此的确不相等。

7.是否可以定义二元关系的反自反闭包与二元关系的反对称闭包？为什么？

解：不可以。

因为二元关系的反自反闭包和反对称闭包是空集，没有多少研究价值。因此不定义二元关系的反自反闭包和反对称闭包。

8.是否存在 X（X=n）上的一个二元关系 R 使得 $R,R^2,\cdots,R^n$ 两两不相等。

解：存在。

设 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$，则 R 是 X 上的二元关系且 $R=\{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\}$ 即可满足要求。

9.证明：若 R 是对称的，则 R^+ 也是对称的。

证：

$\forall(x,y)\in R^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，则 $\exists m\in N$，使得 $(x,y)\in R^m$。因为若 R 是对称的，所以 R^m 也是对称的，因此 $(y,x)\in R^m\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。即 R^+ 也是对称的。

10.设 R_1,R_2 是 X 上的二元关系，证明：

（1）$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2）$S(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$

（3）$t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$

证：（1）因为 $r(R_1)$ 和 $r(R_2)$ 都是 A 上的自反关系，所以 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 也 A 上的自反关系。

由 $R_1\subseteq r(R_1),R_2\subseteq r(R_2)$，得 $R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$，所以 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 是包含 $R_1\cup R_2$ 的自反关系。由自反闭包的定义可知：$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$

又 $R_1\subseteq R_1\cup R_2,R_2\subseteq R_1\cup R_2$，故 $r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)$，$r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$，因此 $r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$。从而 $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2）同（1）的证明。

（3）因为 $R_1\subseteq R_1\cup R_2,R_2\subseteq R_1\cup R_2$，故 $t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2),t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，因此 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。

例：设 $X=\{a,b,c\}$，A 上的两个关系 $R_1=\{(a,b)\},R_2=\{(b,c)\}$。于是

$t(R_1)=\{(a,b)\},t(R_2)=\{(b,c)\}$，故 $t(R_1)\cup t(R_2)=\{(a,b),(b,c)\}$，但

$R_1\cup R_2=\{(a,b),(b,c)\},t(R_1\cup R_2)=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$。

因此 $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$。

P_{113} 习题

1. 设 $X=\{1,2,3\}, Y=\{1,2\}, S=\{f \mid f: X \to Y\}$。$\cong$是 S 上的二元关系：

$f,g \in S, f \cong g \Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)$。证明（1）$\cong$是 S 上的等价关系，（2）求等价类的集合。

证：（1）等价关系显然。

（2）$f: X \to Y$，共有 8 个，如图 4 所示。

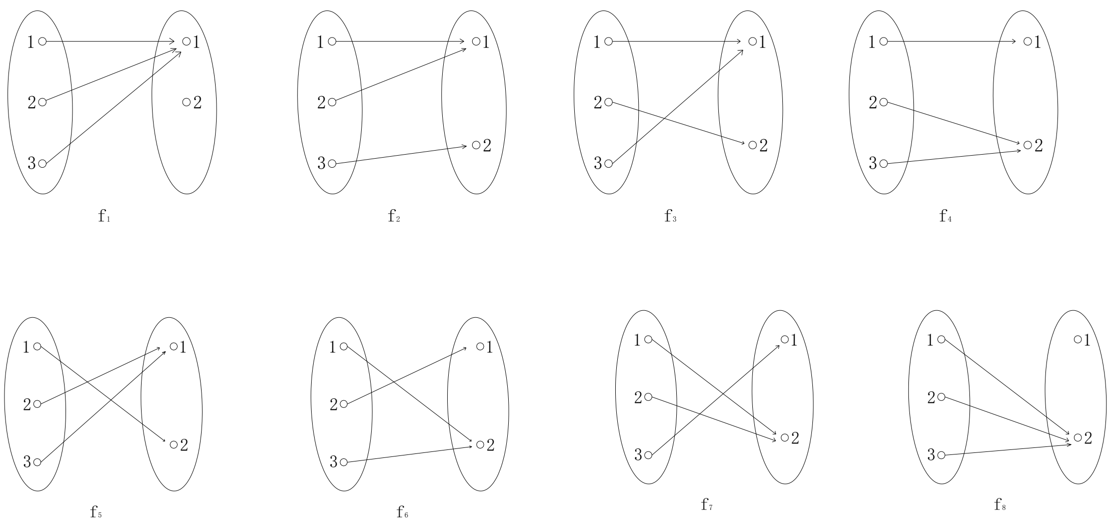


图 4

$\forall f \in S$，$[f]_R=\{g \mid I_m(f)=I_m(g)\}$，故

$[f_1]_R=\{f_1\}$，$[f_2]_R=\{f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$，$[f_3]_R=\{f_3\}$。

故等价类集合为$\{[f_1]_R,[f_2]_R,[f_3]_R\}$。

2. $\left(P_{113}^2\right)$（1）等价关系显然。

(2) 如图 4 所示。

$\forall f \in S$，$[f]_R=\{g \mid f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)\}$。故

$$[f_1]_R=\{f_1\}=\{g \mid g(1)+g(2)+g(3)=3\},$$
$$[f_2]_R=\{f_2,f_3,f_5\}=\{g \mid g(1)+g(2)+g(3)=4\},$$
$$[f_4]_R=\{f_{4,}f_6,f_7\}=\{g \mid g(1)+g(2)+g(3)=5\},$$
$$[f_8]_R=\{f_8\}=\{g \mid g(1)+g(2)+g(3)=6\}.$$

3. $\left(P_{113}^3\right)$（1）$\cong$是等价关系显然。

（2）$\forall f \in S$，$[f]_R = \{g \mid \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\}\}$。

$[f_1]_R = \{f_1, f_8\} = \{\{1,2,3\}, \phi\}$
$[f_2]_R = \{f_2, f_7\} = \{\{1,2\}, \{3\}\}$
$[f_3]_R = \{f_3, f_6\} = \{\{1,3\}, \{2\}\}$
$[f_4]_R = \{f_4, f_5\} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$

故等价类集合为$\{[f_1]_R,[f_2]_R,[f_3]_R,[f_4]_R\}$。

4. 由置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 确定了 $X = \{1, 2, \cdots, 8\}$ 上的一个关系 $\cong: i, j \in X, i \cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中，证明：$\cong$ 是 X 上的等价关系，求 $X/\cong$。

证； $\sigma = (1\ \ 3\ \ 5)(2\ \ 6)(4\ \ 8)(7)$

$\forall i \in X$，i 与 i 必在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，即 $i \cong i$，则 $\cong$ 是自反的。

$\forall i, j \in X$，若 $i \cong j$，即 i 与 j 在 σ 的循环分解式中和同一个循环置换中，则 j 与 i 也在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，故 $j \cong i$。因而 $\cong$ 是对称性的。

$\forall i, j, k \in X$，若 $i \cong j, j \cong k$，则 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，j 与 k 在 σ 的循环分解式的同一个循环置换中，因而 i 与 k 也在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，即 $i \cong k$。因而 $\cong$ 是传递性的。

所以 $\cong$ 是 X 上的等价关系。

5. 给出 X＝{1,2,3,4}上两个等价关系 R 与 S，使得 $R \circ S$ 不是等价关系。

解： 如 $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$

$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2)\}$
$R \circ S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2), (1,2), (1,3), (2,1)\}$

因为 $(1,3) \in R \circ S$，但 $(1,3) \notin R \circ S$，所以 $R \circ S$ 不对称..

因此 $R \circ S$ 不是等价关系。

13. 设 X 是一个集合，$|X| = n$，试求：

（1）X 上自反二元关系的个数；
（2）X 上反自反二元关系的个数；
（3）X 上对称二元关系的个数；
（4）X 上自反或对称关系的个数；

解：（1）X 上自反二元关系的个数为 2^{n^2-n}

（2）X 上反自反二元关系的个数为2^{n^2-n}

（3）X 上对称二元关系的个数为$2^{\frac{n^2+n}{2}}$

（4）X 上自反或对称关系的个数为$2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$

P_{125}**习题**

1. 设$[a,b]$是一个有限区间。令S是区间$[a,b]$上的有限划分的集合，$[a,b]$的一个划分π是形如$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b,n\in N$的点的集合。在$S$上定义二元关系$R$如下：

$$\forall\pi_1,\pi_2\in S,\pi_1R\pi_2\Leftrightarrow\pi_2\text{的每个分点也是}\pi_1\text{的分点。}$$

证明：R是S上的偏序关系（注意，这里的划分与等价关系中的划分不同）。

证：$\forall\pi\in S,\pi$的每个分点也是π的分点，故$\pi R\pi$，因此R是自反的；

$\forall\pi_1,\pi_2\in S$，若$\pi_1R\pi_2$且$\pi_2R\pi_1$，则π_2的每个分点也是π_1的分点且π_1的每个分点也是π_2的分点，故$\pi_1=\pi_2$。因此R是反对称的；

$\forall\pi_1,\pi_2,\pi_3\in S$，若$\pi_1R\pi_2$且$\pi_2R\pi_3$，则$\pi_2$的每个分点是$\pi_1$的分点，而且$\pi_3$的每个分点也是$\pi_2$的分点，因此$\pi_3$的每个分点也是$\pi_1$的分点，故$\pi_1R\pi_3$。因此$R$是传递的。

综上可知：R是S上的偏序关系。

2. 设$(S,\leq_1),(T,\leq_2)$是偏序集。在$S\times T$上定义二元关系$T,\leq_3$如下：

$$\forall(s,t),(s',t')\in S\times T,\quad (s,t)\leq_3(s',t')\Leftrightarrow(s\leq_1 s',\,t\leq_2 t')\text{。}$$

证明：（1）$\leq_3$是$S\times T$上的偏序关系；

（2）若$(s,t)\leq_3(s',t')\Leftrightarrow s\leq_1 s'$或$t\leq_2 t'$，则$\leq_3$是$S\times T$上的偏序关系吗？

证：1. (1) $\forall(s,t)\in S\times T$，则$s\in S,t\in T$。由于$(S,\leq_1),(T,\leq_2)$是偏序集，故有

$$s\leq_1 s,t\leq_2 t\Leftrightarrow(s,t)\leq_3(s,t)\text{。}$$

从而$\leq_3$是自反的；

(2) $\forall(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in S\times T$，若$(s_1,t_1)\leq_3(s_2,t_2)$且$(s_2,t_2)\leq_3(s_1,t_1)$，则

$$(s_1 \le_1 s_2 \text{且} s_2 \le_1 s_1) \text{且} (t_1 \le_2 t_2 \text{且} t_2 \le_2 t_1)。$$

由 $(S,\le_1),(T,\le_2)$ 是偏序集可知，$s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$，故 $(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$。

因此“$\le_3$”是对称的。

(3) $\forall (s_1,t_1),(s_2,t_2),(s_3,t_3) \in S\times T$，若 $(s_1,t_1) \le_3 (s_2,t_2)$ 且 $(s_2,t_2) \le_3 (s_1,t_1)$，有 $(s_1 \le_1 s_2,\ s_2 \le_1 s_3)$ 且 $(t_1 \le_2 t_2,\ t_2 \le_2 t_3)$。由 $(S,\le_1),(T,\le_2)$ 是偏序集可知：$\le_1$ 与 $\le_2$ 是传递的，所以 $s_1 \le_1 s_3$ 且 $t_1 \le_2 t_3$。故 $(s_1,t_1) \le_3 (s_3,t_3)$，因此 $\le_3$ 是传递的。

综上可知：$\le_3$ 是 $S\times T$ 上的一个偏序关系。

2. 此题若改为：$(s,t) \le_3 (s',t') \Leftrightarrow s \le_1 t$ 或 $s' \le_2 t'$，则 $\le_3$ 不是偏序关系。因为 $\le_3$ 不满足反对称性。

例如： $(I,\le_3)$，则 $(1,2) \le_3 (2,1)$ 且 $(2,1) \le_3 (1,2)$，但 $(1,2) \ne (2,1)$。故 $\le_3$ 不满足反对称性，因此 $\le_3$ 不是 $S\times T$ 偏序关系。

3. 存在一个偏序关系 $\le$，使得 $(X,\le)$ 中有唯一的极大元素，但没有最大元素？若有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

解： 存在。

设 $X=\{i,1,2,3,\cdots\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。在 X 上定义的小于或等于关系“$\le$”，则 $(X,\le)$ 就是一个没有最大元素，但却有唯一极大元 i 的偏序集。

5. 令 S＝｛1，2，…，12｝，画出偏序集（S,|）的 Hass 图，其中“|”是整除关系，它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素

极大元素有 6 个，分别是 7，8，9，10，11，12

极小元素有 1 个是 1

6. 设 R 是 X 的自反且传递的二元关系，则

（1）给出 R 的一个实例；

（2）在 X 上定义二元关系 $\sim$ 是：$x \sim y \Leftrightarrow xRy, yRx$。

证明：$\sim$ 是 X 上的等价关系。

（3）在商集 $X/_{\sim}$ 上定义二元关系 $\le$ 是：$[a] \le [b] \Leftrightarrow aRb$。

证明：$\le$ 是 $X/_{\sim}$ 上的偏序关系。

证：（1）$(I,\le)$ 即可

（2）自反、对称显然。下面看传递性

因为若 $x \sim y$ 且 $y \sim z \Leftrightarrow xRy, yRx$ 且 yRz, zRy；由 R 是传递的，有 $xRz,\ zRx$。

由题意有 $x \sim z$，故 $\sim$ 是传递的。

因此 $\sim$ 是 X 上的等价关系。

（3）$\forall [a] \in X/\sim$，因为 R 是 X 上的自反关系，故 aRa。而 $aRa \Leftrightarrow [a] \le [a]$，所以 $\le$ 是自反的；

$\forall [a],[b] \in X/\sim$，若 $[a] \le [b],[b] \le [a] \Leftrightarrow aRb, bRa$，则 a 与 b 在一个等类中，故 $[a]=[b]$，因此 $\le$ 是反对称的；

$\forall [a],[b],[c] \in X/\sim$，若 $[a] \le [b],[b] \le [c] \Leftrightarrow aRb, bRc$，则由 R 的传递性有 aRc，即 $[a] \le [c]$。因此 $\le$ 是传递的。

综上可知：$\le$ 是 $X/\sim$ 上的偏序关系。

7. 设 R 是 X 上的偏序关系，证明：

$$R \text{ 是 } X \text{ 上的全序关系} \Leftrightarrow X \times X = R \cup R^{-1}。$$

证：$\Rightarrow$ $\forall (x,y) \in X \times X$，由于 R 是 X 上的全序关系，故 $(x,y) \in R$ 或 $(y,x) \in R^{-1}$ 必有一个成立。所以 $(x,y) \in R \cup R^{-1}$，即 $X \times X \subseteq R \cup R^{-1}$；

反之，因为 R 是 X 上的关系，故 $R \subseteq X \times X$，$R^{-1} \subseteq X \times X$，所以

$$R \cup R^{-1} \subseteq X \times X。$$

因此 $X \times X = R \cup R^{-1}$。

$\Leftarrow$ $\forall (x,y) \in X \times X = R \cup R^{-1}$，有 $(x,y) \in R$ 或 $(x,y) \in R^{-1}$，即 xRy 与 yRx 必有一个成立，故 R 是 X 上的全序关系。

第四章 无穷集合及其基数

P_{136} **习题**

1. 设 A 为由序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

的所有项组成的集合，则是否市可数的？为什么？

解：因为序列是可以重复的，故

若 A 是由有限个数组成的集合，则 A 是有限的集合；

若 A 是由无限个数组成的集合，则 A 是可数的。

故本题 A 是至多可数的。

2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多可数。

证：在每个开区间中取一个有理数，则这些有理数构成的集合是整个有理数集合 Q 的子集，因此是至多可数的。

3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多可数。

证：设 A 是所有不连续点的集合，f 是一个单调函数，则 $\forall x_0 \in A, x_0$ 对应着一个区间 $(f(x_0-0), f(x+0))$，于是由上题便得到证明。

4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集合。

证：设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, B=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}\}$，则 $B \subseteq A$ 且 $|B|=k<\infty$。

令 $\mathrm{B}=\{B \mid B \subseteq A, |B|<\infty\}$，

设 $\varphi: A \to \{0,1\}$，则 φ 是 A 的子集的特征函数。

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B)=$ {0，1 的有穷序列}，即 $\forall a_i \in A$，

若 $a_i \in B$，则对应 1；若 $a_i \notin B$ 则对应 0。于是

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B)$ 就对应着一个由 0，1 组成的有限序列 0，1，1，0，…，0，1。此序列对应着一个二进制小数，而此小数是有理数。于是，可数集 A 的所有有限子集 B 对应着有理数的一个子集。

又 $\forall B_1, B_2 \in \mathrm{B}, B_1 \neq B_2, B_1, B_2$ 对应的小数也不同，故 φ 是单射。而可数集 A 的

所有有限子集B是无穷的，故B是可数的。

5．判断下列命题之真伪：

(1)若 $f: X \to Y$ 且 f 是满射，则只要 X 是可数的，那么 Y 是至多可数的；

(2)若 $f: X \to Y$ 且 f 是单射，那么只要 Y 是可数的，则 X 也是可数的；

(3)可数集在任一映射下的像也是可数的；

答案：对，错，错。

7．设A是有限集，B是可数集，证明：$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$ 是可数的。

证：令 $A = \{1, 2, \cdots, n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$，B可数。

设 $f: A \to B, \forall i \in A, f(i) \in B$。

（B^A 中的每个 f 实际上就是B的一个有限子集，可数集的有限子集是可数的。于是由4题即可证明）

（$f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_n)) \in B \times B \times \cdots \times B = B^n$。

用数学归纳法可以证明 B^A 是可数的，但 $\left|B^n\right| = \left|B^A\right|$。

8. 设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*。证明 Σ^* 是可数集

证1：设有限字母Σ上所有字（包括空字 ε）所形成的集 Σ^*，则 Σ^* 是可数的。

A_1＝{长度为1的字符串}

A_2＝{长度为2的字符串}

⋮　　　⋮

A_n＝{长度为n的字符串}

⋮　　　⋮

因为 A_i 中每个长度都是有限的，而 $\Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Ai$，故 Σ^* 是至多可数的。又 Σ^* 显然是无穷的，故 Σ^* 是可数的。

证2：不妨假设 $\Sigma = \{a, b, c\}$（**令** $\Sigma = \{0,1\}$ **也是可以**），则可按字典序排序为：

$\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \cdots, aaa, aab, \cdots$。由于$\Sigma^*$的全部元素可以排成无重复项的无穷序列，故$\Sigma^*$是可数的。

P_{142} **习题**

2. 找一个初等可数$f(x)$，使得它是$(0,1)$到实数R的一一对应。

解： $Ctgx$，或tgx，或$tg(x-\dfrac{\pi}{2})$

3. 试给出一个具体的函数，使得它是从$(0,1)$到$[0,1]$的一一对应。

证： $(0,1)$中包含一个可数子集$A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$可数。

$A_1 = A \cup \{0,1\} = \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$——可数的，故$A \sim A_1$。

令$\varphi:(0,1)\to[0,1], \forall x\in(0,1)$

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{当} x \overline{\in} A \\ 0 & \text{当} x=\frac{1}{2} \\ 1 & \text{当} x=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{i-2}} & \text{当} x=\frac{1}{2^i}, i\ge 3 \end{cases}$$

$\varphi(x)$即为所求。

4. 证明：若A可数，则2^A不可数。（用对角线方法）。

证： A可数，则令$A=\{1,2,3,\cdots\}$。

假设2^A可数，则A的子集（即2^A的元素）是可数的，故2^A中元素可排成一个无重复项的无穷序列：

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$$

而$2^A \sim Ch(A)=\{f \mid f:A\to\{0,1\}\}$，于是特征函$Ch(A)$可数，即$Ch(A)$可写成下列无穷序列形式：

$$f_1, f_2, \cdots, f_n \cdots$$

$$\begin{array}{l} f_1 : a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ f_2 : a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ f_3 : a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ f_n : a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{array} \qquad 其中\ a_{ij}=0\ 或\ 1,\ j=1,2,3,\cdots。$$

造一个特征函数 β。令 $\beta=\{b_i\}_1^{\infty}$

$$b_1=\begin{cases}1 & 若 a_{11}=0\\ 0 & 若 a_{11}=1\end{cases}$$

$$b_2=\begin{cases}1 & 若 a_{22}=0\\ 0 & 若 a_{22}=1\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$b_n=\begin{cases}1 & 若 a_{nn}=0\\ 0 & 若 a_{nn}=1\end{cases}$$

$$\vdots$$

则 $\beta\neq f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n,\cdots$，但 β 确实是 A 到 $\{0,1\}$ 的一个映射，即 β 是 A 的子集的特征函数，矛盾。故 2^A 不可数。

5．令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，$S=\{f\,|\,f:N\to\{0,1\}\}$，利用康托对角线法证明 S 是不可数集。

证:假设从 N 到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个函数 f_i 确定了一个 0, 1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$。构造序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为 $f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。