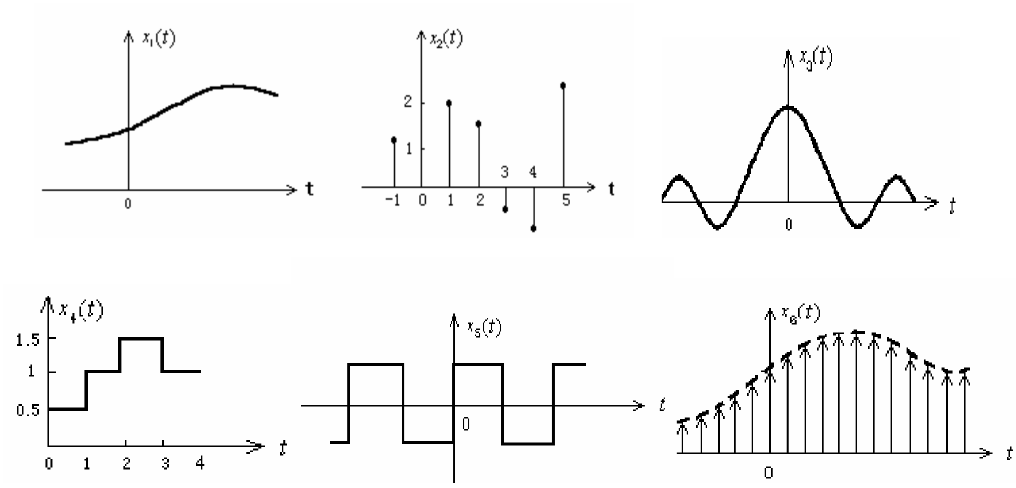
习题一 (P7)

1．指出题图 1－1 所示各信号是连续时间信号？还是离散时间信号。



题图 1－1

解：$x_1(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)$ 是连续时间信号

$x_2(t), x_6(t)$ 是离散时间信号。

2．判断下列各信号是否是周期信号，如果是周期信号，求出它的基波周期。

(1) $x(t) = 2\cos(3t + \pi/4)$　　(2) $x(n) = \cos(8\pi n/7 + 2)$

(3) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$　　(4) $x(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$

(5) $x(n) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\delta(n-3m) - \delta(n-1-3m)\right]$　　(6) $x(t) = \cos 2\pi t \times u(t)$

(7) $x(n) = \cos(n/4) \times \cos(n\pi/4)$

(8) $x(n) = 2\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/8) - 2\sin(n\pi/2 + \pi/6)$

分析：

（1） 离散时间复指数信号的周期性：

为了使 $e^{j\Omega n}$ 为周期性的，周期 $N > 0$，就必须有 $e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n}$，因此有 $e^{j\Omega n} = 1$。ΩN 必须为 2π 的整数倍，即必须有一个整数 m,满足

$$\Omega N = 2\pi m$$

所以

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

因此，若 $\frac{\Omega}{2\pi}$ 为一有理数，$e^{j\Omega n}$ 为周期性的，否则，不为周期性的。

所以，周期信号 $e^{j\Omega n}$ 基波频率为：$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega}{m}$ ，基波周期为：$N = m\frac{2\pi}{\Omega}$。

（2） 连续时间信号的周期性：（略）

答案：

（1） 是周期信号，$T=\dfrac{2\pi}{3}$

（2） 是周期信号，$T=\dfrac{7m}{4}=7$

（3） 是周期信号，$T=2$

（4） 不是周期信号

（5） 不是周期信号

（6） 不是周期信号

（7） 不是周期信号

（8） 是周期信号，$T=16$

3．试判断下列信号是能量信号还是功率信号。

（1）$x_1(t)=Ae^{-t} \quad t\ge 0$

（2）$x_2(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$

（3）$x_3(t)=\sin 2t+\sin 2\pi t$

（4）$x_4(t)=e^{-t}\sin 2t$

解：

（1）$x_1(t)=Ae^{-t} \qquad t\ge 0$

$$w=\lim_{T\to\infty}\int_0^T A^2e^{-2t}dt=\lim_{T\to\infty}A^2\left[\frac{1}{-2}e^{-2t}\right]_0^T$$

$$=\frac{A^2}{-2}\lim_{T\to\infty}\left(e^{-2T}-1\right)=-\frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2T}}-1\right)=\frac{A^2}{2}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T A^2e^{-2t}dt=-\frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2Te^{2T}}-\frac{1}{2T}\right)=0$$

$\therefore x_1(t)$为能量信号

（2）$x_2(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$

$$w=\infty \qquad P=\frac{A^2}{2}$$

$$w=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega_0+\theta)dt$$

$$=A^2\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\cos(2\omega_0 t+2\theta)+1}{2}dt$$

$$=\frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 t+2\theta)+t\right]_{-T}^{T}$$

$$=\frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T+2\theta)-\frac{1}{2\omega_0}\sin(-2\omega_0 T+2\theta)+2T\right]$$

$$=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_2^2(t)dt$$

$$=\frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T+2\theta)-\frac{1}{2\omega_0}\sin(-2\omega_0 T+2\theta)}{2T}+1\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}+\lim_{T\to\infty}\frac{\sin(2\omega_0 T+2\theta)-\sin(-2\omega_0 T+2\theta)}{4\omega_0 T}$$

$$=\frac{A^2}{2}$$

$\therefore x_2(t)$为功率信号

（3） $x_3(t)=\sin 2t+\sin 2\pi t$

$$w=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(\sin 2t+\sin 2\pi t)^2\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(\sin^2 2t+2\sin 2t\sin 2\pi t+\sin^2 2\pi t)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[\frac{1-\cos 4t}{2}+\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}+\frac{1-\cos 4\pi t}{2}\right]dt \qquad \begin{matrix}\alpha=2t\\ \beta=2\pi t\end{matrix}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[1-\frac{\cos 4t}{2}+\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}-\frac{\cos 4\pi t}{2}\right]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[t-\frac{\sin 4t}{8}+\frac{\sin(2+2\pi)t}{(2+2\pi)2}-\frac{\sin(2-2\pi)t}{(2-2\pi)2}-\frac{\sin 4\pi t}{8\pi}\right]_{-T}^{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[2T-\frac{\sin 4T}{8}+\frac{\sin(-4T)}{8}+\frac{\sin(2+2\pi)T}{4+4\pi}+\frac{\sin(2+2\pi)T}{4+4\pi}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(2-2\pi)T}{4-4\pi}-\frac{\sin(2-2\pi)T}{4-4\pi}-\frac{\sin 4\pi T}{8}-\frac{\sin 4\pi T}{8}\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[2T-\frac{\sin 4T}{4}+\frac{\sin(2+2\pi)T}{2+2\pi}-\frac{\sin(2-2\pi)T}{2-2\pi}-\frac{\sin 4\pi T}{4}\right]$$

$$=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_3^2(t)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[1-\frac{\sin 4T}{8T}+\frac{\sin(2+2\pi)T}{(2+2\pi)2T}-\frac{\sin(2-2\pi)T}{(2-2\pi)2T}-\frac{\sin 4\pi T}{8T}\right]$$

=1

$\therefore x_3(t)$为功率信号

（4）$x_4(t)=e^{-t}\sin 2t$

$$w=\lim_{t\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-t}\sin^2 2tdt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-t}\frac{1-2\cos 4t}{2}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-2t}}{2}dt-\lim_{t\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-2t}\cos 4tdt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-2t}}{-4}\right]_{-T}^{T}-\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-2t}\cos 4tdt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-2T}}{-4}+\frac{e^{2T}}{4}\right)-\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-2t}\cos 4tdt$$

$$\because \int_{-T}^{T}e^{-2t}\cos 4tdt=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t+e^{-2t}\sin 4t\right]_{-T}^{T}$$

$$\therefore w=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-2T}}{-4}+\frac{e^{2T}}{4}\right)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t+e^{-2t}\sin 4t\right]_{-T}^{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-2T}}{-4}+\frac{e^{2T}}{4}\right)-\frac{1}{5}\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2T}\cos 4T+e^{-2T}\sin 4T+\frac{1}{2}e^{2T}\cos 4T+e^{2T}\sin 4T\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-2T}}{-4}+\frac{e^{2T}}{4}+\frac{1}{10}e^{-2T}\cos 4T-\frac{1}{5}e^{-2T}\sin 4T-\frac{1}{10}e^{2T}\cos 4T-\frac{1}{5}e^{2T}\sin 4T\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}e^{-2T}\left[-\frac{1}{4}+\frac{\cos 4T}{10}-\frac{\sin 4T}{5}\right]+\lim_{T\to\infty}e^{2T}\left[\frac{1}{4}-\frac{\cos 4T}{10}-\frac{\sin 4T}{5}\right]$$

$$=0+\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{-2T}}{2T}\left[-\frac{1}{4}+\frac{\cos 4T}{10}-\frac{\sin 4T}{5}\right]+\lim_{T\to\infty}\frac{e^{2T}}{2T}\left[\frac{1}{4}-\frac{\cos 4T}{10}-\frac{\sin 4T}{5}\right]$$

$$=0+\infty$$

$\therefore x_4(t)$既非功率信号，也非能量信号。

4. 对下列每一个信号求能量 E 和功率 P：

(1) $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$　　(2) $x_2(t)=e^{j(2t+\pi/4)}$　　(3) $x_3(t)=\cos t$

(4) $x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$　　(5) $x_2[n]=e^{j(\pi/2n+\pi/8)}$　　(6) $x_3[n]=\cos(\frac{\pi}{4}n)$

解：

(1) $P_\infty=0, E_\infty=1/4$　　(2) $P_\infty=1, E_\infty=\infty$　　(3) $P_\infty=1/2, E_\infty=\infty$

(4) $P_\infty=0, E_\infty=4/3$　　(5) $P_\infty=1, E_\infty=\infty$　　(6) $P_\infty=1/2, E_\infty=\infty$

习　题

1．应用冲激信号的抽样特性，求下列各表达式的函数值。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = f(t-t_0)\big|_{t=0} = f(-t_0)$

（2）$\int_{0^-}^{\infty}(e^t+t)\delta(t+2)dt = 0$　(注意积分的上，下限)

（3）$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t-t_0)\big|_{t=t_0} = f(0)$

（4）$\int_{-\infty}^{\infty}(t+\sin t)\delta(t-\frac{\pi}{6})dt = t+\sin t\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

（5）$\int_{0^-}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt = u(t-\frac{t_0}{2})\Big|_{t=\frac{t_0}{2}} = u(\frac{t_0}{2}) = u(t_0)$

（6）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}(\delta(t)-\delta(t-t_0))dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt = 1-e^{-j\varpi t_0}$

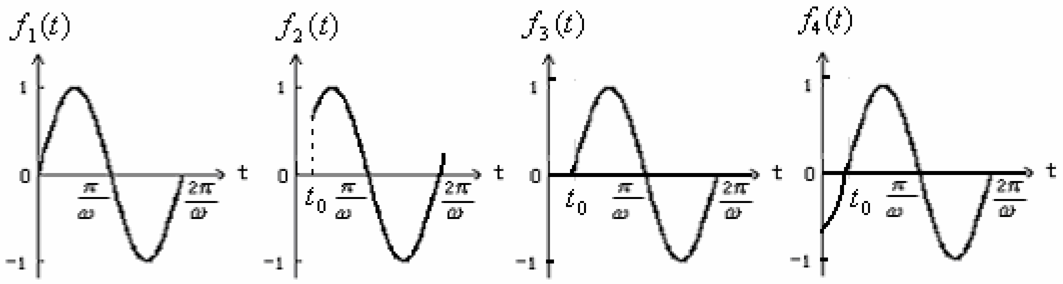
2．绘出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别。

（1）$f_1(t) = \sin\omega t\, u(t)$

（2）$f_2(t) = \sin\omega t\, u(t-t_0)$

（3）$f_3(t) = \sin\omega(t-t_0)u(t-t_0)$

（4）$f_4(t) = \sin\omega(t-t_0)u(t)$



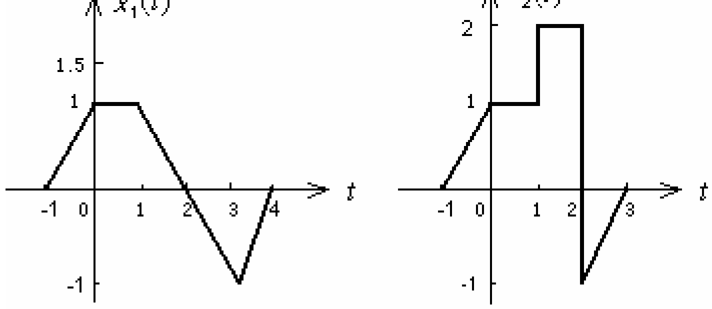
3．连续时间信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 如图示，试画出下列信号的波形。

（1）$2x_1(t)$　　（2）$0.5x_1(t)$　　（3）$x_1(t-2)$　　（4）$x_1(2t)$

（5）$x_1(2t+1)$ 和 $x_1(2t-1)$　　（6）$x_1(-t-1)$　　（7）$x_2(2-t/3)$

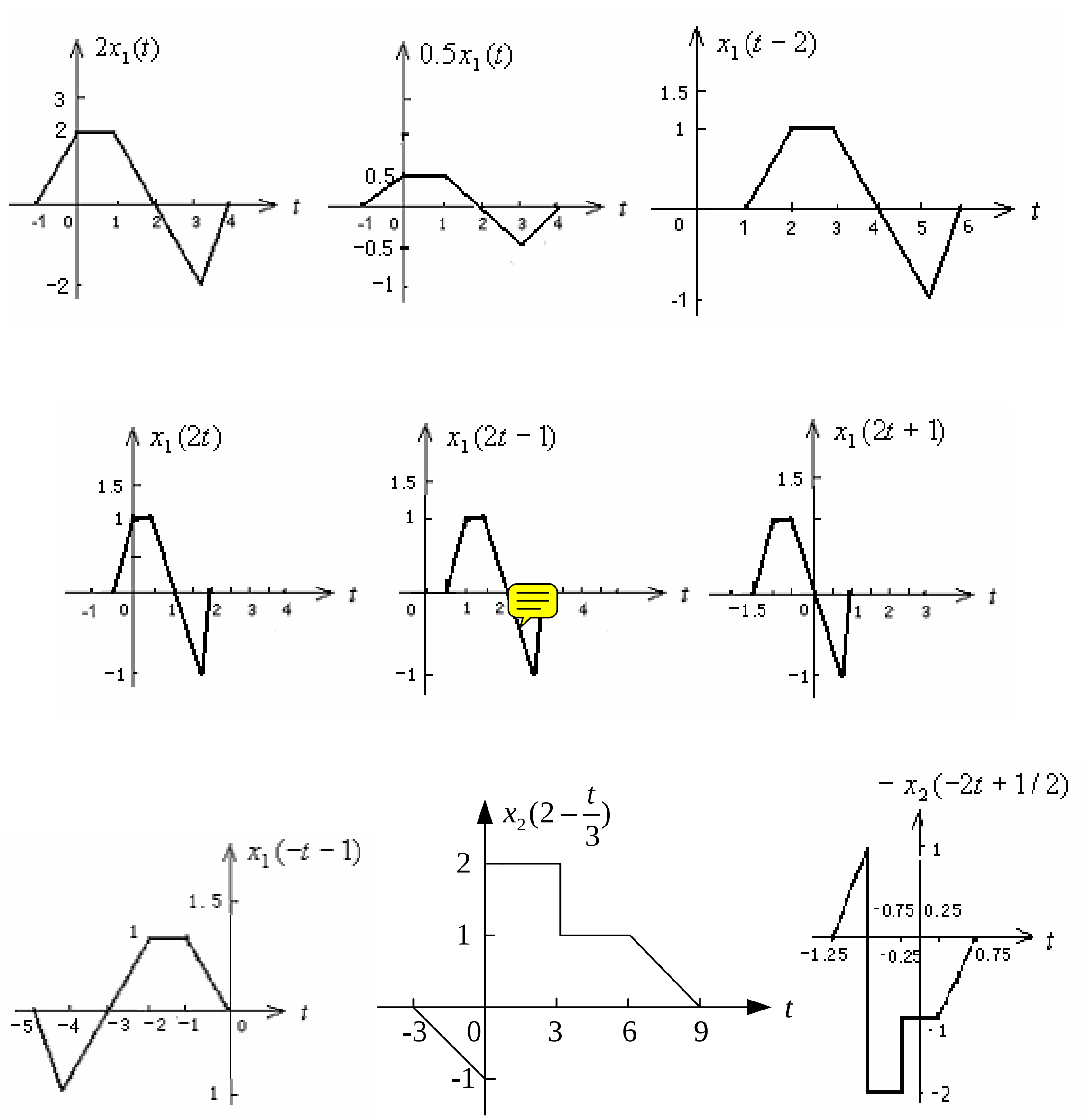
（8）$-x_2(-2t+1/2)$　　（9）$x_1(t)\cdot x_2(t)$

（10）分别画出 $x_1'(t)$ 和 $x_2'(t)$ 的波形并写出相应的表达式。



题 3 图

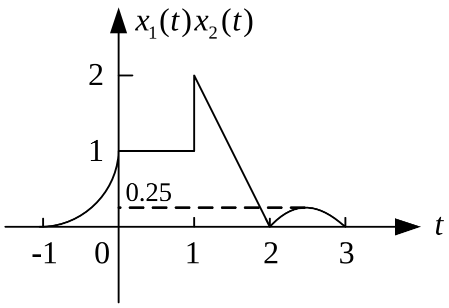
解：(1)-----(8)



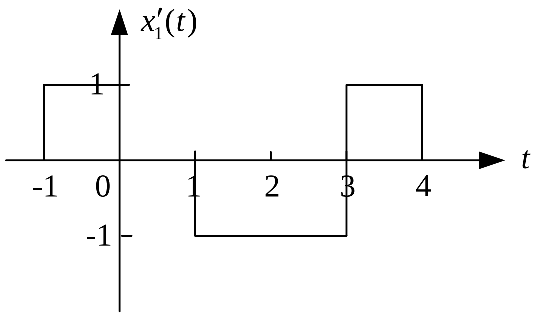
（7）$x_2(t) \to x_2(t+2) \to x_2(-t+2) \to x_2(2-\frac{t}{3})$

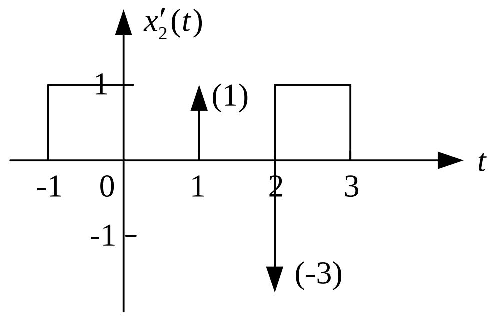
（9）$x_1(t)=\begin{cases} t+1,-1\le t<0 \\ 1,0\le t<1 \\ -t+2,1\le t<3 \\ t-4,3\le t\le 4 \\ 0,其它 \end{cases}$，　$x_2(t)=\begin{cases} t+1,-1\le t<0 \\ 1,0\le t<1 \\ 2,1\le t<2 \\ t-3,2\le t\le 3 \\ 0,其它 \end{cases}$

$$x_1(t)x_2(t)=\begin{cases}(t+1)^2, -1\le t<0\\ 1, 0\le t<1\\ -2t+4, 1\le t<2\\ -(t-2.5)^2+0.25, 2\le t\le 3\\ 0, 其它\end{cases}$$



（10） $x_1'(t)=\begin{cases}1, -1\le t<0\\ 0, 0\le t<1\\ -1, 1\le t<3\\ 1, 3\le t\le 4\\ 0, 其它\end{cases}$ $x_2'(t)=\begin{cases}1, -1\le t<0\\ 0, 0\le t<1\\ \delta(t), t=1\\ 0, 1<t<2\\ -3\delta(t), t=2\\ 1, 2\le t\le 3\\ 0, 其它\end{cases}$

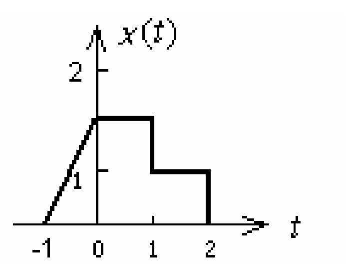




4．已知 $x(t)$ 如题图 1－2 所示，试画出 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的波形。

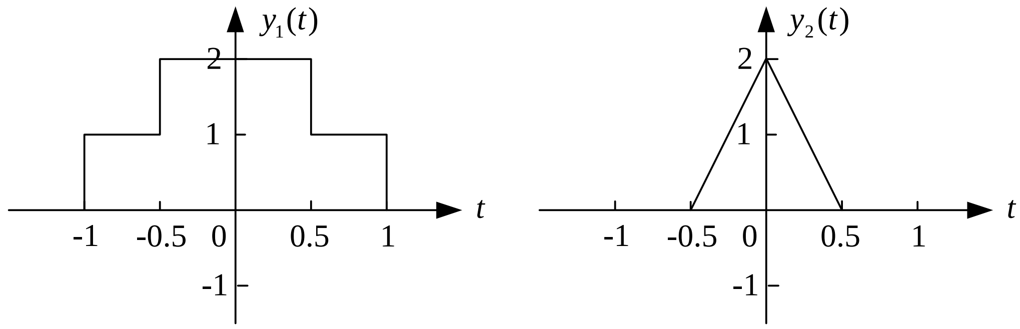
（1） $y_1(t)=x(2t)u(t)+x(-2t)u(-2t)$

（2） $y_2(t)=x(2t)u(-t)+x(-2t)u(t)$



题图 1－2

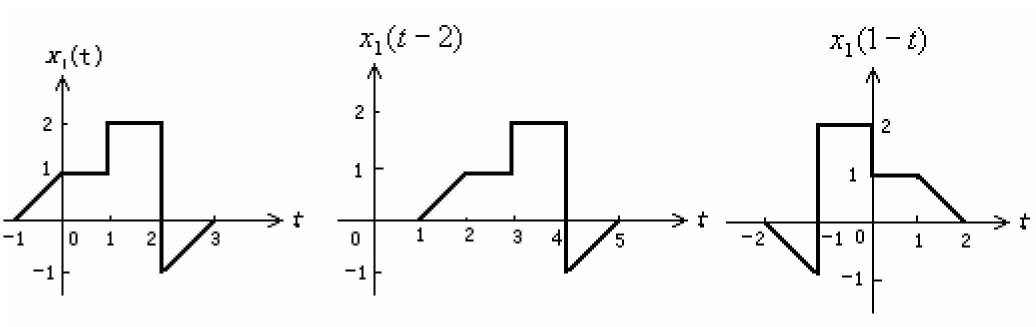
解：

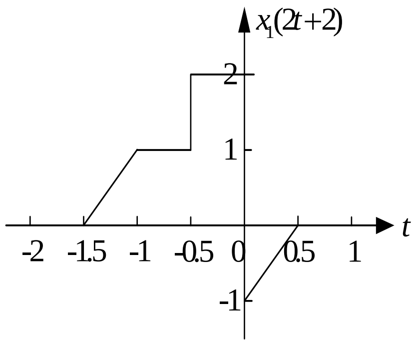


5．已知连续时间信号 $x_1(t)$ 如题图 1－3 所示，试画出下列各信号的波形图。

(1) $x_1(t-2)$ (2) $x_1(1-t)$ (3) $x_1(2t+2)$

解：

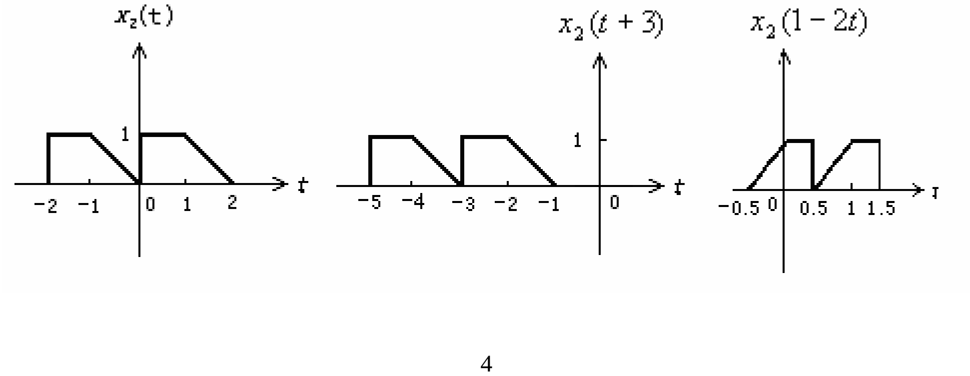


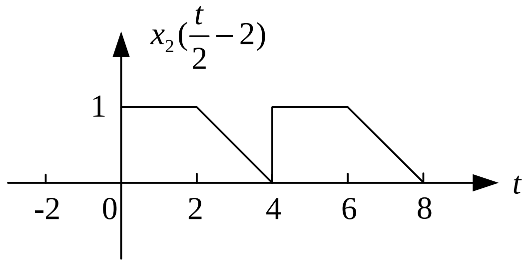


6．根据题图 1－4 所示的信号 $x_2(t)$,试画出下列各信号的波形图。

(1) $x_2(t+3)$ (2) $x_2(\frac{t}{2}-2)$ (3) $x_2(1-2t)$

解：





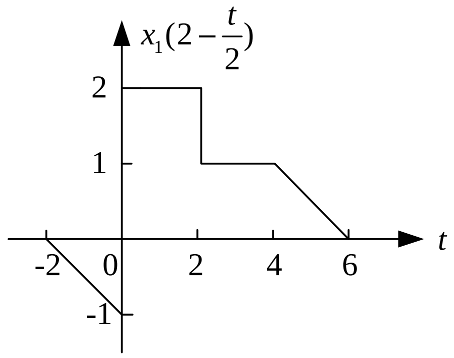
7．根据题图 1－3 和题图 1－4 所示的 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，画出下列各信号的波形图。

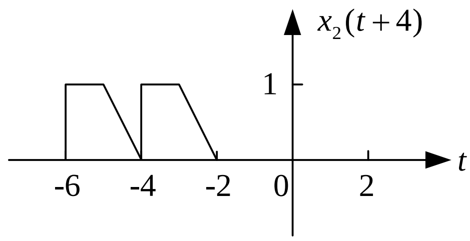
(1) $x_1(t)x_2(-t)$　　(2) $x_1(1-t)x_2(t-1)$　　(3) $x_1(2-\frac{t}{2})x_2(t+4)$

解：(1) $x_1(t)x_2(-t)=\begin{cases} t+2 & -2\le t<-1 \\ 1 & -1<t\le 0 \\ t & 0<t\le 1 \\ 1 & 1<t\le 2 \\ 0 & others \end{cases}$

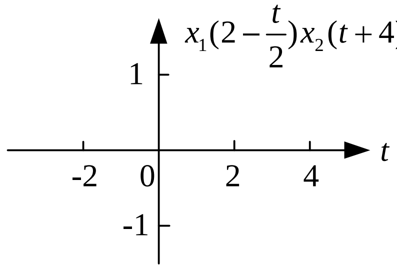
(2) $x_1(1-t)x_2(t-1)=\begin{cases} 2 & -1\le t\le 0 \\ 1-t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t\le 2 \\ 0 & others \end{cases}$

(3)



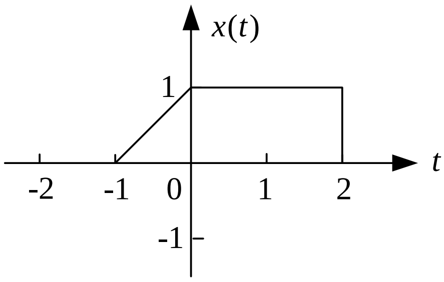


$x_1(2-\frac{t}{2})x_2(t+4)=0$



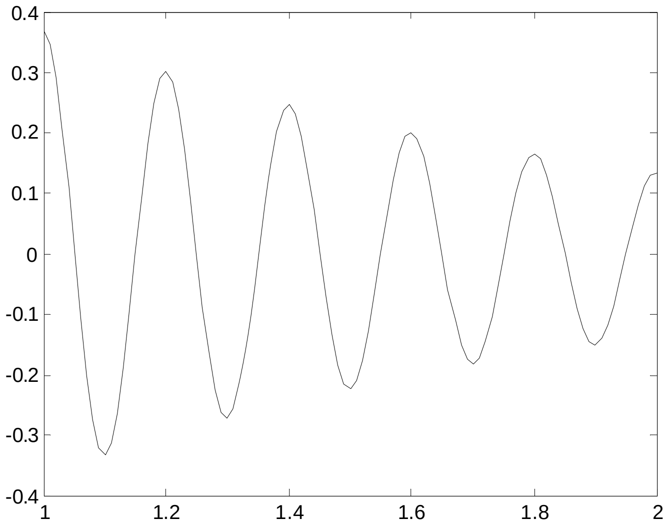
8．已知信号 $x(5-2t)$ 的波形如题图 1－5 所示，试画出 $x(t)$ 的波形图。

解：$x(5-2t)\to x(5-t)\to x(5+t)\to x(t)$



9．画出下列各信号的波形图

(2) $x(t)=e^{-t}\cos 10\pi t[u(t-1)-u(t-2)]$



10．已知信号 $x(t)=\sin t\times[u(t)-u(t-\pi)]$,求

(1) $x_1(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}x(t)+x(t)$ (2) $x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

解：(1) $\dfrac{dx_1(t)}{dt}=\cos t[u(t)-u(t-\pi)]+\sin t[\delta(t)-\delta(t-\pi)]$

$$=\cos t[u(t)-u(t-\pi)]$$

$$x_1(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)+x(t)$$

$$=-\sin t[u(t)-u(t-\pi)]+\cos t[\delta(t)-\delta(t-\pi)]+\sin t[u(t)-u(t-\pi)]$$

$$=\cos t[\delta(t)-\delta(t-\pi)]$$

$$=\delta(t)+\delta(t-\pi)$$

(2)(i)当 t<0 时， $x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\sin\tau[u(\tau)-u(\tau-\pi)]d\tau=0$

(ii)当 0≤t<π时， $x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}\sin\tau d\tau=1-\cos t$

(iii)当 t≥π时， $x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{0}^{\pi}\sin\tau d\tau=2$

综上分析， $x_2(t)=\begin{cases}0,t<0\\1-\cos t,0\le t<\pi\\2,t\ge\pi\end{cases}$

11．计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\sin t\cdot\delta(t-\frac{T_1}{2})dt=\sin\frac{T_1}{2}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\times\delta(t+2)dt=e^2$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+t+2)\delta(t-1)dt=4$

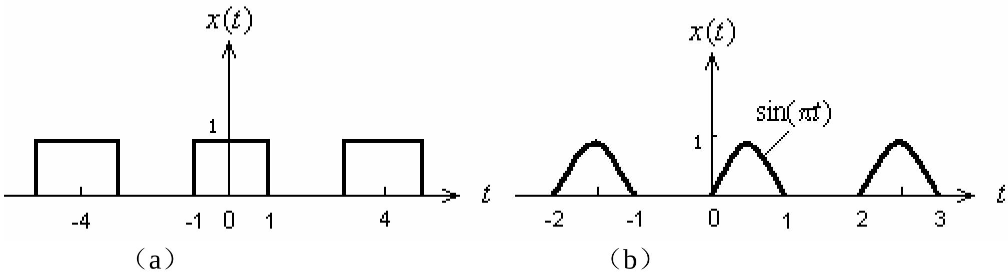
(4) $\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\frac{t_0}{2})\delta(t-t_0)dt=u(\frac{t_0}{2})$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}\delta(\tau)d\tau=1$

(6) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt=0$

习　题(p61)

1．用直接计算傅里叶系数的方法，求题图 1－6 所示周期函数的傅里叶系数（三角形式或指数形式）。



题图 1－6　周期函数的傅里叶系数

解：(a)周期为 $T_0=4,\omega_0=\dfrac{\pi}{2}$，信号在一个周期内的表达式为：$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

(1)三角形式

$$a_0=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dt=1$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\cos(n\omega_0 t)dt\quad n=1,2,\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}$$

$$=Sa(n\omega_0)$$

$$=Sa\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\sin(n\omega_0 t)dt\quad n=1,2,\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$=0$$

所以，$x(t)=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}sa\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\quad n=1,2\cdots$

(2)指数形式

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{jn\omega_0 t}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right)\times\frac{1}{jn\omega_0}$$

$$=\frac{1}{2n\omega_0}\sin(n\omega_0)$$

$$=\frac{1}{2}Sa(n\omega_0)$$

$$=\frac{1}{2}Sa\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

所以，$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}sa(\frac{\pi n}{2})e^{j\frac{\pi nt}{2}}$

(b)周期为$T_0=2,\omega_0=\pi$，信号在一个周期内的表达式为：

$$x(t)=\begin{cases}\sin(\pi t), & 0<t<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1)三角形式

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 x(t)dt=\int_0^1\sin(\pi t)dt=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^1 x(t)\cos(n\omega_0 t)dt\quad n=1,2,\cdots$$

$$=\int_0^1\sin(\pi t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$=-\frac{1}{2(\pi+n\omega_0)}\cos(\pi+n\omega_0)t\Big|_0^1-\frac{1}{2(\pi-n\omega_0)}\cos(\pi-n\omega_0)t\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2(\pi+n\omega_0)}\cos(\pi+n\omega_0)+\frac{1}{2(\pi+n\omega_0)}-\frac{1}{2(\pi-n\omega_0)}\cos(\pi-n\omega_0)+\frac{1}{2(\pi-n\omega_0)}$$

$$=\frac{\pi\cos(n\omega_0)}{\pi^2-n^2\omega_0^2}+\frac{\pi}{\pi^2-n^2\omega_0^2}$$

$$=\frac{\cos(\pi n)}{\pi(1-n^2)}+\frac{1}{\pi(1-n^2)}$$

$$=\frac{\cos(\pi n)+1}{\pi(1-n^2)}$$

$$b_n=\int_0^1\sin(\pi t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad n=1,2,\cdots$$

$$=-\frac{1}{2\left(\pi+n\omega_0\right)}\sin\left(\pi+n\omega_0\right)t\Big|_0^1+\frac{1}{2\left(\pi-n\omega_0\right)}\sin\left(\pi-n\omega_0\right)t\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{\pi^2-n^2\omega_0^2}\sin(n\omega_0)$$

$$=0$$

所以， $x(t)=\dfrac{1}{\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)+1}{\pi\left(1-n^2\right)}\cos(n\pi t)$

(b)指数形式

$$X\left(n\omega_0\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\sin(\pi t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2-n^2\omega_0^2}e^{-jn\omega_0 t}\left[-jn\omega_0\sin(\pi t)-\pi\cos(\pi t)\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi e^{-jn\omega_0}}{2(\pi^2-n^2\omega_0^2)}+\frac{\pi}{2(\pi^2-n^2\omega_0^2)}$$

$$=\frac{1+\mathrm{e}^{-jn\pi}}{2\pi\left(1-n^2\right)}$$

$$=\frac{1+\cos(n\pi)}{2\pi\left(1-n^2\right)}$$

所以， $x(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos(n\pi)}{2\pi\left(1-n^2\right)}e^{j\pi nt}$

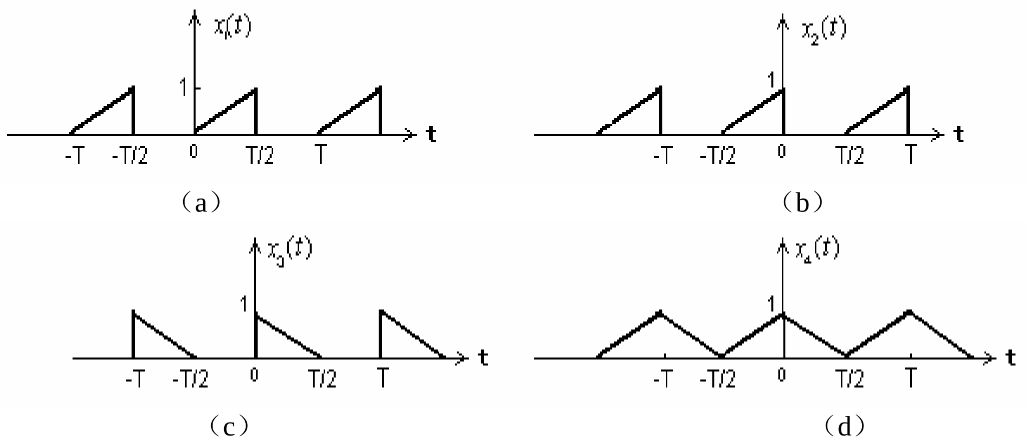
2．如题图 1－7 所示是四个周期相同的信号

（1） 用直接求傅立叶系数的方法求题图 1－7a 所示信号的傅立叶级数（三角形式）；

（2） 将题图 1－7a 的函数 $x_1(t)$ 左或右移 T/2，就得到题图 1－7b 函数 $x_2(t)$，利用(1)的结果求 $x_2(t)$ 的傅立叶级数；

（3） 利用以上结果求题图 1－7c 的函数 $x_3(t)$ 的傅立叶级数；

（4） 利用以上结果求题图 1－7d 的函数 $x_4(t)$ 的傅立叶级数。



题图 1－7

解：（1）$a_{01}=\dfrac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\dfrac{2t}{T}dt=\dfrac{2}{T^2}t^2\Big|_0^{\frac{T}{2}}=0.5$

$$
\begin{aligned}
a_{n1}&=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2t}{T}\cos(n\omega_0 t)dt\quad n=1,2,\cdots\\
&=\frac{4}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cos(n\omega_0 t)dt\\
&=\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\cos(n\omega_0 t)+\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)t\sin(n\omega_0 t)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\
&=\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\cos(n\pi)+\left(\frac{T}{2n\omega_0}\right)\sin(n\pi)-\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\right]\\
&=\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2\cos(n\pi)+\left(\frac{T^2}{4\pi n}\right)\sin(n\pi)-\left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{\pi^2n^2}\cos(n\pi)+\frac{1}{\pi n}\sin(n\pi)-\frac{1}{\pi^2n^2}\\
&=\frac{\cos(n\pi)-1}{\pi^2n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{n1}&=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2t}{T}\sin(n\omega_0 t)dt\quad n=1,2,\cdots\\
&=\frac{4}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\sin(n\omega_0 t)dt\\
&=\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\sin(n\omega_0 t)-\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)t\cos(n\omega_0 t)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\
&=\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2\sin(n\pi)-\left(\frac{T^2}{4\pi n}\right)\cos(n\pi)\right]\\
&=\frac{1}{\pi^2n^2}\sin(n\pi)-\frac{1}{\pi n}\cos(n\pi)\\
&=-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
x_1(t)&=\frac{a_{01}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n1}\cos(\frac{2\pi nt}{T})+b_{n1}\sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]\\
&=0.25+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{\pi^2n^2}\cos(\frac{2\pi nt}{T})-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]
\end{aligned}
$$

(2)

$$x_2(t)=x_1(t+\frac{T}{2})$$
$$=\frac{a_{01}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{n1}\cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t+\frac{T}{2})\right]+b_{n1}\sin\left[\frac{2\pi n}{T}(t+\frac{T}{2})\right]\right\}$$
$$=\frac{a_{01}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n1}\cos(\pi n)\cos(\frac{2\pi nt}{T})+b_{n1}\cos(\pi n)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]$$

所以，$a_{02}=a_{01}=0.5$，$a_{n2}=a_{n1}\cos(\pi n)=\frac{\cos(n\pi)-1}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi)=\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}$，

$b_{n2}=b_{n1}\cos(n\pi)=-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\cos(n\pi)=-\frac{1}{n\pi}$，$n=1,2,\cdots$

$$x_2(t)=0.25+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{2\pi nt}{T})-\frac{1}{n\pi}\sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]$$ 。

(3)

$$x_3(t)=x_2(-t)=0.25+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}\cos(-\frac{2\pi nt}{T})-\frac{1}{n\pi}\sin(-\frac{2\pi nt}{T})\right]$$
$$=0.25+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{2\pi nt}{T})+\frac{1}{n\pi}\sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]$$

所以，$a_{03}=0.5$，$a_{n3}=\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}$，$b_{n3}=\frac{1}{n\pi}$，$n=1,2,\cdots$

(4)

$$x_4(t)=x_2(t)+x_3(t)=0.5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{2\pi nt}{T})$$

所以，$a_{04}=1$，$a_{n4}=\frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi^2 n^2}$，$b_{n4}=0$，$n=1,2,\cdots$

3．实际中有一种利用非线性器件产生谐波的方法，其脉冲波形如图 P3.3 所示；

（1）求脉冲波形中三次谐波的幅度；

（2）使三次谐波幅度为最大的最佳截止角 θ_0 的值。

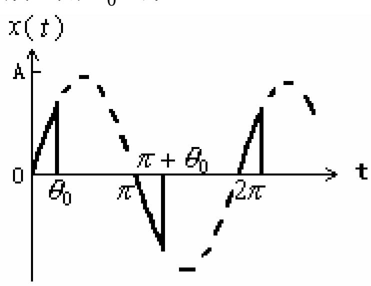


图 P3.3

解：由信号图可知，图示波形数学表达式为：

$$x(t)=A\sin\omega_0 t\cdot[u(t)-u(t-\theta_0)+u(t-\pi)-u(t-\pi-\theta_0)]$$

信号为周期信号，周期为$T=2\pi$，$\omega_0=1$，所以有

$$x(t) = A\sin t \cdot [u(t) - u(t-\theta_0) + u(t-\pi) - u(t-\pi-\theta_0)]$$

求解其傅立叶系数分别为：

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T_0}\int_0^{2\pi} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt \\
&= \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin t[u(t) - u(t-\theta_0) + u(t-\pi) - u(t-\pi-\theta_0)]dt \\
&= \frac{A}{\pi}[\int_0^{2\pi} \sin tdt - \int_{\theta_0}^{2\pi} \sin tdt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin tdt - \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} \sin tdt] \\
&= \frac{A}{\pi}[-\cos t\Big|_0^{2\pi} + \cos t\Big|_{\theta_0}^{2\pi} - \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + \cos t\Big|_{\pi+\theta_0}^{2\pi}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T_0}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt \\
&= \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\cos nt[u(t) - u(t-\theta_0) + u(t-\pi) - u(t-\pi-\theta_0)]dt \\
&= \frac{A}{\pi}[\int_0^{2\pi} \sin t\cos ntdt - \int_{\theta_0}^{2\pi} \sin t\cos ntdt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin t\cos ntdt - \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} \sin t\cos ntdt] \\
&= \frac{A}{2\pi}[\int_0^{2\pi} (\sin(t+nt) + \sin(t-nt))dt - \int_{\theta_0}^{2\pi} (\sin(t+nt) + \sin(t-nt))dt \\
&\quad + \int_{\pi}^{2\pi} (\sin(t+nt) + \sin(t-nt))dt - \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} (\sin(t+nt) + \sin(t-nt))dt] \\
&= \frac{A}{2\pi}\{[-\frac{1}{n+1}\cos(t+nt) - \frac{1}{1-n}\cos(t-nt)]\Big|_0^{2\pi} - [-\frac{1}{n+1}\cos(t+nt) - \frac{1}{1-n}\cos(t-nt)]\Big|_{\theta_0}^{2\pi} \\
&\quad + [-\frac{1}{n+1}\cos(t+nt) - \frac{1}{1-n}\cos(t-nt)]\Big|_{\pi}^{2\pi} - [-\frac{1}{n+1}\cos(t+nt) - \frac{1}{1-n}\cos(t-nt)]\Big|_{\pi+\theta_0}^{2\pi}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi}\{[-\frac{\cos(2\pi+2n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(2\pi-2n\pi)}{1-n} + \frac{\cos 0}{n+1} + \frac{\cos 0}{1-n}] \\
&\quad -[-\frac{\cos(2\pi+2n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(2\pi-2n\pi)}{1-n} + \frac{\cos(\theta_0+n\theta_0)}{n+1} + \frac{\cos(\theta_0-n\theta_0)}{1-n}] \\
&\quad +[-\frac{\cos(2\pi+2n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(2\pi-2n\pi)}{1-n} + \frac{\cos(\pi+n\pi)}{n+1} + \frac{\cos(\pi-n\pi)}{1-n}] \\
&\quad -[-\frac{\cos(2\pi+2n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(2\pi-2n\pi)}{1-n} + \frac{\cos(\pi+\theta_0+n\pi+n\theta_0)}{n+1} + \frac{\cos(\pi+\theta_0-n\pi-n\theta_0)}{1-n}]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi}[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n} - \frac{\cos(n+1)\theta_0}{n+1} - \frac{\cos(1-n)\theta_0}{1-n} + \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} \\
&\quad - \frac{\cos(n+1)\pi\cdot\cos(\theta_0+n\theta_0) - \sin(n+1)\pi\cdot\sin(\theta_0+n\theta_0)}{n+1} \\
&\quad - \frac{\cos(1-n)\pi\cdot\cos(\theta_0-n\theta_0) - \sin(1-n)\pi\cdot\sin(\theta_0-n\theta_0)}{n+1}]
\end{aligned}$$

即

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{A}{2\pi}(\dfrac{2-2\cos(n+1)\theta_0}{n+1}+\dfrac{2-2\cos(1-n)\theta_0}{1-n}) & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=0,2,4,6\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\sin nt[u(t)-u(t-\theta_0)+u(t-\pi)-u(t-\pi-\theta_0)]dt$$

$$=\frac{A}{\pi}[\int_0^{2\pi}\sin t\sin ntdt-\int_{\theta_0}^{2\pi}\sin t\sin ntdt+\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\sin ntdt-\int_{\pi+\theta_0}^{2\pi}\sin t\sin ntdt]$$

$$=-\frac{A}{2\pi}[\int_0^{2\pi}(\cos(t+nt)-\cos(t-nt))dt-\int_{\theta_0}^{2\pi}(\cos(t+nt)-\cos(t-nt))dt$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}(\cos(t+nt)-\cos(t-nt))dt-\int_{\pi+\theta_0}^{2\pi}(\cos(t+nt)-\cos(t-nt))dt]$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\{[\frac{1}{n+1}\sin(t+nt)-\frac{1}{1-n}\sin(t-nt)]\Big|_0^{2\pi}-[\frac{1}{n+1}\sin(t+nt)-\frac{1}{1-n}\sin(t-nt)]\Big|_{\theta_0}^{2\pi}$$

$$+[\frac{1}{n+1}\sin(t+nt)-\frac{1}{1-n}\sin(t-nt)]\Big|_{\pi}^{2\pi}-[\frac{1}{n+1}\sin(t+nt)-\frac{1}{1-n}\sin(t-nt)]\Big|_{\pi+\theta_0}^{2\pi}\}$$

$$=-\frac{A}{2\pi}[\frac{\sin(n+1)\theta_0}{n+1}-\frac{\sin(1-n)\theta_0}{1-n}+\frac{\sin(n+1)\theta_0\cos(1+n)\pi}{n+1}-\frac{\sin(1-n)\theta_0\cos(1-n)\pi}{1-n}]$$所以，有

$$b_n=\begin{cases}-\dfrac{A}{\pi}(\dfrac{\sin(n+1)\theta_0}{n+1}-\dfrac{\sin(1-n)\theta_0}{1-n}) & n=1,3,5,\cdots\\ -\dfrac{A}{2\pi}(\dfrac{\sin(n+1)\theta_0}{n+1}-\dfrac{\sin(1-n)\theta_0}{1-n}) & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

因此

$$a_3=\frac{A}{2\pi}[\frac{1-\cos4\theta_0}{2}-1+\cos2\theta_0]$$
$$=\frac{A}{4\pi}[-1-\cos4\theta_0+2\cos2\theta_0]$$

$$b_3=-\frac{A}{2\pi}[\frac{\sin4\theta_0}{4}-\frac{\sin(-2\theta_0)}{-2}]$$
$$=-\frac{A}{4\pi}[\sin4\theta_0-2\sin2\theta_0]$$

$$A_3=\sqrt{a_3^2+b_3^2}=\frac{A}{2\pi}(1-\cos2\theta_0)$$

当截止角 $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$ 时，3 次谐波幅值取最大值，即 $A_{3\max}=\dfrac{A}{\pi}$.

4．下列信号的傅立叶级数表达式。

（1） $x(t)=\cos4t+\sin6t$；

（2） $x(t)$ 是以 2 为周期的信号，且 $x(t)=e^{-t},-1<t<1$

解：（1）(i)三角形式：

两个周期信号相加后可否为周期信号？

假设 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 都是周期信号，对应的周期是 T_1, T_2,则它们的和是周期的，也即存在一个正数 T,使得

$$x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t)+x_2(t)$$

当且仅当 T_1/T_2 是两个正整数 q,r 之比 q/r 时，上式才成立。如果 q,r 是互质的，则 $T=rT_1$ 是 $x_1(t)$ + $x_2(t)$ 的基本周期。

$x(t)=\cos 4t+\sin 6t$ 的周期 $T_0=\pi$，$\omega_0=2$

$$a_0=0 \;,\; a_n=\begin{cases}1, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases},\; b_n=\begin{cases}1, & n=3\\ 0, & n\neq 3\end{cases},$$

所以，$x(t)$ 的三角傅里叶级数仍为 $x(t)=\cos 4t+\sin 6t$

(ii)复指数形式：

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=\pm 2\\ -\frac{1}{2}j, & n=3\\ \frac{1}{2}j, & n=-3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以，$x(t)$ 的指数傅里叶级数 $x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j4t}+e^{-j4t}\right)-\frac{1}{2}j\left(e^{j6t}-e^{-j6t}\right)$

(2) (i)三角形式：

$$a_0=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{-1}^{1}=e-e^{-1}$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}e^{-t}\cos(n\pi t)dt \quad n=1,2,\cdots$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}e^{-t}\left[n\pi\sin(n\pi t)-\cos(n\pi t)\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\left(e-e^{-1}\right)\cos(n\pi)}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^{-t}\sin(n\pi t)dt \quad n=1,2,\cdots$$
$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}e^{-t}\left[-\sin(n\pi t)-n\pi\cos(n\pi t)\right]\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{\left(e-e^{-1}\right)n\pi\cos(n\pi)}{1+n^2\pi^2}$$

所以，$x\left(t\right)=\dfrac{e-e^{-1}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\left(e-e^{-1}\right)\cos(n\pi)}{1+n^2\pi^2}\cos(n\pi t)+\dfrac{\left(e-e^{-1}\right)n\pi\cos(n\pi)}{1+n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right]$

(ii)复指数形式：

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}\left(a_n-jb_n\right)=\frac{\left(e-e^{-1}\right)\cos(n\pi)}{2(1+n^2\pi^2)}-\frac{j\left(e-e^{-1}\right)n\pi\cos(n\pi)}{2(1+n^2\pi^2)}$$
$$=\frac{\left(e-e^{-1}\right)(1-jn\pi)\cos(n\pi)}{2(1+n^2\pi^2)}=\frac{\left(e-e^{-1}\right)\cos(n\pi)}{2(1+jn\pi)}$$

所以，$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\left(e-e^{-1}\right)\cos(n\pi)}{2(1+jn\pi)}e^{jn\pi t}$

5．设 $x(t)$ 是一个周期信号，其基波周期为 T_0，傅立叶级数的系数为 A_k，用 A_k 表示下列信号的傅里叶级数系数。

（1）$x(t-t_0)$　　（2）$x(-t)$

（3）$x^*(t)$　　（4）$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，假设 $A_0=0$

（5）$\dfrac{dx(t)}{dt}$　　（6）$x(at),a>0$，（要先确定该信号的周期）

解：先确定是否为周期信号，设 $x(t)=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0t+\varphi_k)$

（1）$x(t-t_0)=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos[k\omega_0(t-t_0)+\varphi_k]=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos[k\omega_0t+\varphi_k-k\omega_0t_0]$

$A_{01}=A_0$，$A_{k1}=A_k$，$\varphi_{k1}=\varphi_k-k\omega_0t_0$，$k=1,2\cdots$

（2）$x(-t)=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos[k\omega_0(-t)+\varphi_k]=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0t-\varphi_k)$

$A_{02}=A_0$，$A_{k2}=A_k$，$\varphi_{k2}=-\varphi_k$，$k=1,2\cdots$

（3）$x^*(t)=\dfrac{A_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^*\cos(k\omega_0t+\varphi_k)$

$A_{03}=A_0^*$，$A_{k3}=A_k^*$，$\varphi_{k3}=\varphi_k$，$k=1,2\cdots$

（4）$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ 不一定为周期信号，所以不存在傅里叶级数。

（5）$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\varphi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{d}{dt}\cos(k\omega_0 t+\varphi_k)$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}-k\omega_0 A_k\sin(k\omega_0 t+\varphi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}-k\omega_0 A_k\cos(k\omega_0 t+\varphi_k-\frac{\pi}{2})$$

$A_{05}=0$，$A_{k5}=-k\omega_0 A_k$，$\varphi_{k5}=\varphi_k-\frac{\pi}{2}$，$k=1,2\cdots$

（6）$x(t)$ 的周期为 $\frac{T_0}{a}$

$$x(at)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(ka\omega_0 t+\varphi_k)$$

$A_{06}=A_0$，$A_{k6}=A_k$，$\varphi_{k6}=\varphi_k$，$\omega_{06}=a\omega_0$，$k=1,2\cdots$

$$x(at)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_{05}t+\varphi_k)$$

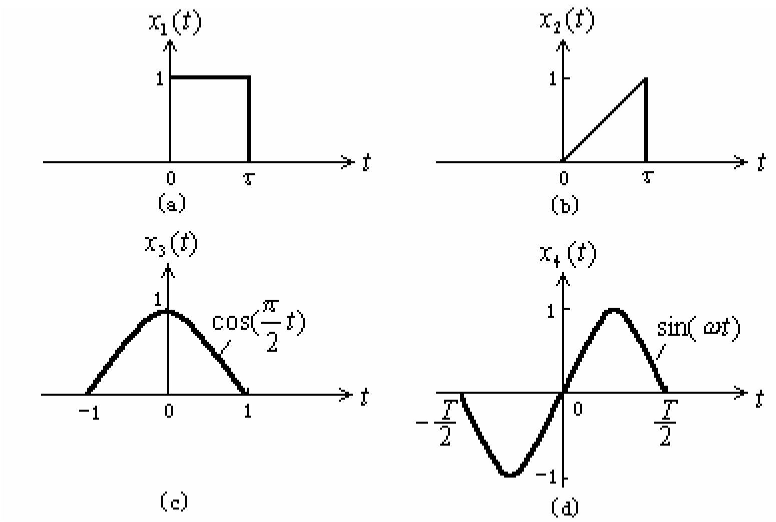
7．计算下列连续时间周期信号（基波频率 $\omega_0=\pi$ ）的傅立叶系数 a_k：

$$x(t)=\begin{cases}1.5 & 0\le t<1\\ -1.5 & 1\le t<2\end{cases}$$

解：

$$a_k=\int_0^2 x(t)\cos(n\pi t)dt=1.5\int_0^1\cos(n\pi t)dt-1.5\int_1^2\cos(n\pi t)dt=\frac{1.5}{n\pi}\sin(n\pi t)\Big|_0^1-\frac{1.5}{n\pi}\sin(n\pi t)\Big|_1^2=0$$

9．求题图 1－10 所示各信号的傅立叶变换。



题图 1－10

解：（a） $x_1(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\tau \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

解法 1：由定义 $X_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\tau}e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau}=\frac{1-e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$

$$=\frac{e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}(e^{\frac{j\omega\tau}{2}}-e^{-\frac{j\omega\tau}{2}})}{j\omega}=e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

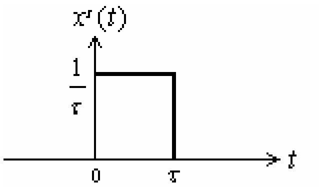
解法 2：由傅里叶变换的时移特性以及 $g(t)$的傅里叶变换可得 $x_1(t)=g(t-\frac{\tau}{2})$，所以

$F[g(t)]=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$X_1(\omega)=e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

（b） $x_2(t)=\begin{cases}\frac{t}{\tau}, & 0<t<\tau \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

解法 1：设 $x^{'}(t)=\frac{dx_2}{dt}$，如图所示



因为有： $x'\xleftrightarrow{F}Sa(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}$，则

$x_2(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}$

解法 2：按照定义求解：

$$X_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}te^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{(-j\omega)^2}(-j\omega t-1)e^{-j\omega t}\right]\Bigg|_0^{\tau}=\frac{(j\omega\tau+1)e^{-j\omega\tau}-1}{\omega^2\tau}$$

（c） $x_3(t)=\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}t), & 0<t<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$X_3(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_3(t)e^{-j\omega t}dt\ =\int_{-1}^{1}\cos(\frac{\pi}{2}t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{\left[\frac{\pi}{2}e^{-j\omega t}\sin(\frac{\pi}{2}t)-j\omega\cos(\frac{\pi}{2}t)\right]\Big|_{-1}^{1}}{(\frac{\pi}{2})^2+(j\omega)^2}=\frac{2\pi}{\pi^2-4\omega^2}\left(e^{-j\omega}+e^{j\omega}\right)\ =\frac{4\pi\cos\omega}{\pi^2-4\omega^2}$$

（d） $x_4(t)=\begin{cases}\sin(\omega_0 t), & -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$$X_4(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_4(t)e^{-j\omega t}dt\ =\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{(-j\omega)^2+\omega_0^2}e^{-j\omega t}\left[-j\omega\sin(\omega_0 t)-\omega_0\cos(\omega_0 t)\right]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{2\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}(e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}})=\frac{4j\omega_0\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega^2-\omega_0^2}=\frac{j8\pi\sin(\frac{\omega T}{2})}{T^2\omega^2-4\pi^2}$$

10．利用对偶性质求下列函数的傅立叶变换：

（1） $f(t)=\frac{\sin(2\pi(t-2))}{\pi(t-2)},-\infty<t<\infty$

（2） $f(t)=\frac{2a}{a^2+t^2},-\infty<t<\infty$

（3） $f(t)=\left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2,-\infty<t<\infty$

解：（1） $g(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}\longleftrightarrow\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})=\tau\frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}}$

由对偶特性

$$\tau Sa(\frac{t\tau}{2})=\tau\frac{\sin(\frac{t\tau}{2})}{\frac{t\tau}{2}}\longleftrightarrow 2\pi g(-\omega)=2\pi g(\omega)=\begin{cases}2\pi, & |\omega|<\frac{\tau}{2} \\ 0, & |\omega|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

令 $\tau=4\pi$

$$\frac{4\pi\sin(2\pi t)}{2\pi t}\longleftrightarrow 2\pi g(\omega)=\begin{cases}2\pi, & |\omega|<2\pi \\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}$$

$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \longleftrightarrow g(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\pi \\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}$$

$$\frac{\sin[2\pi(t-2)]}{\pi(t-2)} \longleftrightarrow e^{-j2\omega} g(\omega)=\begin{cases}e^{-j2\omega}, & |\omega|<2\pi \\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}$$

（2）$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$，$a>0$

$$f(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$F^{-1}[f(\omega)]=e^{-a|t|}，\ a>0$$

所以，有

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|}$$

（3）由（1）可知：$\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{2} g(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |\omega|<2\pi \\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}$

$$\left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}g(\omega)*\frac{1}{2}g(\omega)=\frac{1}{8\pi}g(\omega)*g(\omega)=\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)g(\omega-\tau)d\tau$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi}(\omega+4\pi), & -4\pi \le \omega \le 0 \\ \dfrac{1}{8\pi}(4\pi-\omega), & 0 \le \omega \le 4\pi\end{cases}$$

11．求下列信号的傅立叶变换。

（1）$f(t)=e^{-jt}\delta(t-2)$

（2）$f(t)=e^{-3(t-1)}\delta'(t-1)$

（3）$f(t)=\mathrm{sgn}(t^2-9)$

（4）$f(t)=e^{-2t}u(t+1)$

（5）$f(t)=u(\frac{t}{2}-1)$

解：(1) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt}\delta(t-2)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-j(\omega+1)t}dt=e^{-j2(1+\omega)}$

(2) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(t-1)}\delta'(t-1)e^{-j\omega t}dt=-\left.\dfrac{de^{-3(t-1)-j\omega t}}{dt}\right|_{t=1}=(3+j\omega)e^{-j\omega}$

(3) $f(t)=\mathrm{sgn}(t^2-9)=u(t-3)+u(-t-3)-g_{\tau=6}(t)$

$$F(\omega)=e^{-j3\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]+e^{j3\omega}\left[\pi\delta(-\omega)-\frac{1}{j\omega}\right]-6Sa(3\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)\cos 3\omega-\frac{2}{\omega}\sin 3\omega-6Sa(3\omega)$$

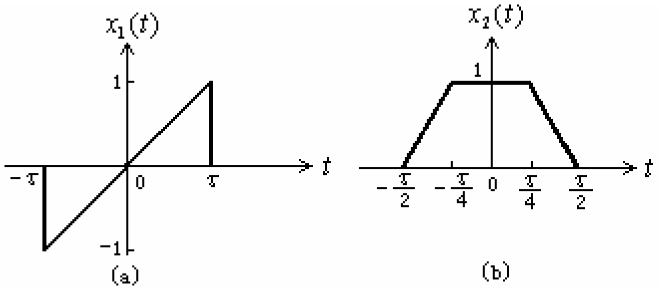
$$=2\pi\delta(\omega)\cos(3\omega)-12sa(3\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)-12Sa(3\omega)$$

(4) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}u(t+1)e^{-j\omega t}dt\ =\int_{-1}^{\infty}e^{-(2+j\omega)t}dt\ =-\left.\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{2+j\omega}\right|_{-1}^{\infty}\ =\frac{e^{2+j\omega}}{2+j\omega}$

(5) $F(\omega)=2\left[\pi\delta(2\omega)+\frac{1}{2j\omega}\right]e^{-j2\omega}=\left[2\pi\delta(2\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j2\omega}$

12．试用时域积分性质，求题图 1－11 所示信号的频谱。



题图 1－11

解：（1）$\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{1}{\tau}g_{\tau'=2\tau}(t)-\left[\delta(t-\tau)+\delta(t+\tau)\right]$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}\longleftrightarrow 2Sa(\omega\tau)-(e^{-j\omega\tau}+e^{j\omega\tau})=2Sa(\omega\tau)-2\cos(\omega\tau)$$

$x_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{dx_1(\xi)}{d\xi}d\xi$， $-\tau<t<\tau$

$$X_1(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[2Sa(\omega\tau)-2\cos(\omega\tau)\right]=\frac{2}{j\omega}\left[Sa(\omega\tau)-\cos(\omega\tau)\right]$$

13．若已知 $f(t)$ 的傅立叶变换 $F(\omega)$，试求下列函数的频谱：

（1）$tf(2t)$　　（2）$(t-2)f(t)$　　（3）$t\frac{df(t)}{dt}$

（4） $f(1-t)$　　（5）$(1-t)f(1-t)$　　（6） $f(2t-5)$

（7）$\int_{-\infty}^{1-0.5t}f(\tau)d\tau$　　（8）$e^{jt}f(3-2t)$　　（9）$\frac{df(t)}{dt}*\frac{1}{\pi t}$

解：（1）$tf(2t)\leftrightarrow\frac{1}{2}j\frac{dF(\frac{\omega}{2})}{d\omega}$

（2）$(t-2)f(t)\leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}-2F(\omega)$

（3）$t\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow -F(\omega)-\omega\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

（4） $f(1-t) \leftrightarrow F(-\omega)e^{-j\omega}$

（5）$(1-t)f(1-t) \leftrightarrow -j\dfrac{dF(-\omega)}{d\omega}e^{-j\omega}$

（6） $f(2t-5) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}F(\dfrac{\omega}{2})e^{-j\frac{5}{2}\omega}$

（7） $x(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

$$x(1-0.5t)=\int_{-\infty}^{1-0.5t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow 2\left[-\frac{F(-2\omega)}{2j\omega}+\pi F(0)\delta(-2\omega)\right]e^{-j2\omega}$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{jF(-2\omega)}{\omega}+2\pi F(0)\delta(2\omega)\right]$$

（8） $f(3-2t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{2}F\left(-\dfrac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}\omega}$

$$e^{jt}f(3-2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega-1}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}(\omega-1)}=\frac{1}{2}F\left(\frac{1-\omega}{2}\right)e^{j\frac{3}{2}(1-\omega)}$$

(9) $\dfrac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$， $\dfrac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$

$$\frac{df(t)}{dt}*\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow \frac{1}{\pi}j\omega F(\omega)=\frac{1}{\pi}j\omega F(\omega)[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]=\omega F(\omega)\mathrm{sgn}(\omega)$$

14．求下列函数的傅立叶逆变换：

（1） $X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_0\\ 0 & |\omega|>\omega_0\end{cases}$

（2） $X(\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$

（3） $X(\omega)=2\cos(3\omega)$

（4） $X(\omega)=[u(\omega)-u(\omega-2)]e^{-j\omega}$

（5） $X(\omega)=\sum_{n=0}^{2}\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j(2\pi+1)\omega}$

解：（1） $X(t)=\begin{cases}1 & |t|<\omega_0\\ 0 & |t|>\omega_0\end{cases}$

因为： $F[X(t)]=2\omega_0 Sa(\omega\omega_0)$

所以， $F[2\omega_0 Sa(\omega_0 t)]=2\pi X(\omega)$

即：$F^{-1}[X(\omega)]=\dfrac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$

（2）$X(\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$

因为：$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

所以：$x(t)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-j\omega_0 t}-\dfrac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$

（3）$X(\omega)=2\cos(3\omega)$

$F[X(t)]=2\pi\delta(\omega-3)+2\pi\delta(\omega+3)$

$F[2\pi\delta(t-3)+2\pi\delta(t+3)]=4\pi\cos 3\omega$

$F^{-1}[2\cos(3\omega)]=\delta(t-3)+\delta(t+3)$

（4）$X(\omega)=[u(\omega)-u(\omega-2)]e^{-j\omega}$

$F[u(t)-u(t-2)]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}-(\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega})e^{-2j\omega}$

$F[(u(t)-u(t-2))e^{-jt}]=\pi\delta(\omega+1)+\dfrac{1}{j(\omega+1)}-(\pi\delta(\omega+1)+\dfrac{1}{j(\omega+1)})e^{-2j(\omega+1)}$

由傅立叶变换对称性，得

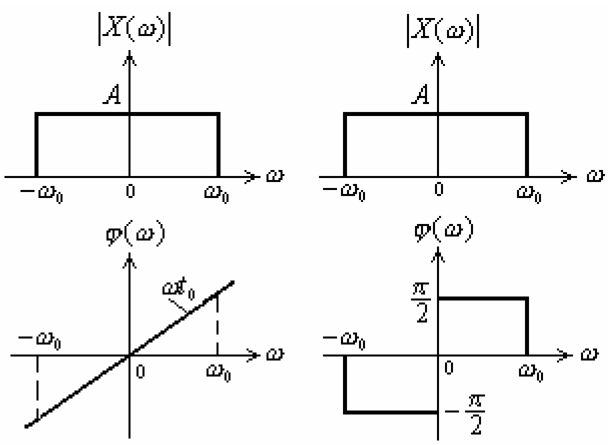
$F[X(t)]=2\pi x(-\omega)$

$$x(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}-[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}]e^{-2j(\omega+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2j(\omega+1)})\left[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}\right]$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2j(-t+1)})\left[\pi\delta(-t+1)+\frac{1}{j(-t+1)}\right]$$

15．利用傅里叶变换的性质，求题图 1－12 所示函数的傅里叶逆变换。



题图 1－12

解：(1) $X(\omega)=Ag_{2\omega_0}(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$g_{2\omega_0}(t)\longleftrightarrow 2\omega_0 Sa(\omega\omega_0)$$

由对偶性质

$$2\omega_0 Sa(\omega_0 t)\longleftrightarrow 2\pi g_{2\omega_0}(\omega)$$

$$\frac{A\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)\longleftrightarrow Ag_{2\omega_0}(\omega)$$

$$\frac{A\omega_0}{\pi}Sa\left[\omega_0(t+t_0)\right]\longleftrightarrow Ag_{2\omega_0}(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$x(t)=\frac{A\omega_0}{\pi}Sa\left[\omega_0(t+t_0)\right]$$

（2） $X(\omega)=-jA\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+jA\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$

解法 1：利用频域微积分特性

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega}=jA\left[-\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)+2\delta(\omega)\right]$$

$$\longleftrightarrow\frac{jA}{2\pi}\left[-e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t}+2\right]=\frac{jA[1-\cos(\omega_0 t)]}{\pi}$$

因为 $\frac{dX(\omega)}{d\omega}\longleftrightarrow(-jt)x(t)$，所以 $(-jt)x(t)=\frac{jA[1-\cos(\omega_0 t)]}{\pi}$

$$x(t)=\frac{A[\cos(\omega_0 t)-1]}{\pi t}$$

解法 2：利用对偶性和时域微积分特性

由对偶特性得

$$-jA\left[u(t+\omega_0)-u(t)\right]+jA\left[-u(t-\omega_0)+u(t)\right]\longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

对上式左边微分，再由时域微分特性得

$$jA\left[-\delta(t+\omega_0)-\delta(t-\omega_0)+2\delta(t)\right]\longleftrightarrow j\omega 2\pi x(-\omega)$$

上式左边的傅里叶变换与右边相等

$$jA\left(-e^{j\omega\omega_0}-e^{-j\omega\omega_0}+2\right)=j\omega 2\pi x(-\omega)$$

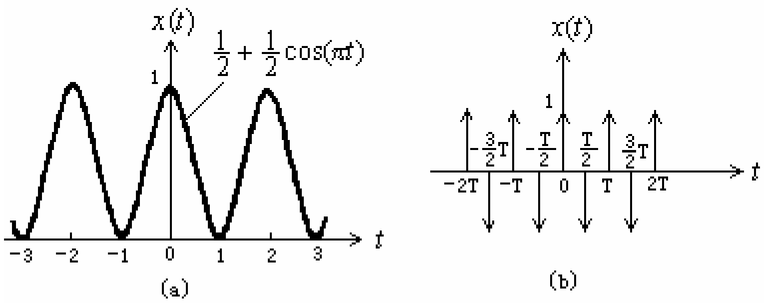
$$jA[-2\cos(\omega\omega_0)+2]=j\omega 2\pi x(-\omega)$$

$$x(-\omega)=\frac{A}{\pi\omega}\left(1-\cos\omega\omega_0\right)$$

将 t 代替－ω，得

$$x(t)=\frac{A[\cos(\omega_0 t)-1]}{\pi t}$$

16．试求题图 1－15 所示周期信号的频谱函数。图 1－15（b）中冲激函数的强度均为 1。



题图　1－15

解：(a) 解法 1：由定义 $X\left(n\omega_0\right)=\frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

$$X(n\pi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi t)\right]e^{-jn\pi t}dt \;=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}e^{-jn\pi t}dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)e^{-jn\pi t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-jn\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-jn\pi t}\left[\pi\sin(\pi t)-jn\pi\cos(\pi t)\right]}{(-n^2\pi^2+\pi^2)}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2n\pi\sin n\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=0\\ \frac{1}{4}, & n=\pm1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega)+\frac{1}{4}\cdot\left[2\pi\delta(\omega-\pi)+2\pi\delta(\omega+\pi)\right]$$

$$=\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega-\pi\right)+\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega+\pi\right)$$

解法 2：由傅里叶变换的性质和 $\cos(\pi t)$ 的傅里叶变换

$$\cos(\pi t)\longleftrightarrow\pi\left[\delta\left(\omega+\pi\right)+\delta\left(\omega-\pi\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi t)\longleftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{1}{2}\pi\left[\delta\left(\omega+\pi\right)+\delta\left(\omega-\pi\right)\right]$$

$$=\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{1}{2}\pi\left[\delta\left(\omega+\pi\right)+\delta\left(\omega-\pi\right)\right]$$

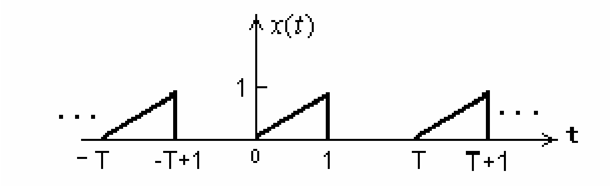
(b) $x\left(t\right)=\delta_{\mathrm{T}}\left(t\right)-\delta_{\mathrm{T}}\left(t-\frac{\mathrm{T}}{2}\right)$

$$X(\omega)=\quad\left[\delta_{\mathrm{T}}(t)\right]-e^{-\frac{j\omega T}{2}}\quad\left[\delta_{\mathrm{T}}(t)\right]$$

$$=\left(1-e^{-\frac{j\omega T}{2}}\right)\quad\left[\delta_{\mathrm{T}}(t)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{T}\left(1-e^{-\frac{j\omega T}{2}}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)$$

20．求题图 1－17 所示周期信号 $x(t)$ 的傅立叶变换。



题图 1－17

解：$X\left(n\omega_0\right)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^1 te^{-jn\omega_0 t}dt$，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{-n^2\omega_0^2T}\left(-jn\omega_0t-1\right)e^{-jn\omega_0t}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{n^2\omega_0^2T}-\frac{1}{n^2\omega_0^2T}\left(-jn\omega_0-1\right)e^{-jn\omega_0}$$

$$=\frac{1}{n^2\omega_0^2T}\left[\left(jn\omega_0+1\right)e^{-jn\omega_0}-1\right]$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X\left(n\omega_0\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{2\pi\frac{1}{n^2\cdot\dfrac{4\pi^2}{T}}\left[\left(j\frac{2\pi n}{T}+1\right)e^{-\frac{j2\pi n}{T}}-1\right]\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T}{2\pi n^2}\left[\left(1+j\frac{2\pi n}{T}\right)e^{-\frac{j2\pi n}{T}}-1\right]\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)$$

21．考虑信号

$$x(t)=\begin{cases}0, & t<-\dfrac{1}{2}\\ t+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}\\ 1 & t>\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

（1）利用傅里叶变换的微分和积分性质，求 $X(\omega)$；

（2） $g(t)=x(t)-\dfrac{1}{2}$ 的傅里叶变换是什么？

解：(1) $\dfrac{dx(t)}{dt}=g_{\tau=1}(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt}\longleftrightarrow Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{dx(\tau)}{d\tau}d\tau\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega}sa\left(\frac{\omega}{2}\right)+\pi\delta(\omega)$$

$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega}Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)+\pi\delta(\omega)$$

(2) $g(t)=x(t)-\dfrac{1}{2}$

$$F[g(t)]=F[x(t)]-\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})$$

习　题 (P78)

1．定义计算下列信号的拉普拉斯变换及收敛域。

（1）$e^{at}u(t), a>0$　　（2）$te^{at}u(t), a>0$

（3）$e^{-at}u(-t), a>0$　　（4）$(\cos\omega_c t)u(-t)$

（5）$[\cos(\omega_c t+\theta)]u(t)$　　（6）$[e^{-at}\sin(\omega_c t)]u(t), a>0$

（7）$\delta(at-b), a$ 和 b 为实数　　（8）$x(t)=\begin{cases} e^{-2t}, t>0 \\ e^{3t}\ , t<0 \end{cases}$

解：(1) $X_{b1}(s)=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt=\dfrac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{\infty}=-\dfrac{1}{a-s}\qquad(\sigma>a)$

(2) $X_{b2}(s)=\int_0^{\infty} te^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} te^{(a-s)t}dt=\dfrac{1}{a-s}(te^{(a-s)t}-\dfrac{1}{a-s}e^{(a-s)t})\Big|_0^{\infty}=\dfrac{1}{(a-s)^2}\qquad(\sigma>a)$

(3) $X_{b3}(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}dt=\dfrac{1}{a+s}e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\dfrac{1}{a+s}\qquad(\sigma<-a)$

(4) $X_{b4}(s)=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega_c te^{-st}dt=\dfrac{\omega_c e^{-st}\sin\omega_c t-se^{-st}\cos\omega_c t}{s^2+\omega_c^2}\Big|_{-\infty}^{0}=-\dfrac{s}{s^2+\omega_c^2}\qquad(\sigma<0)$

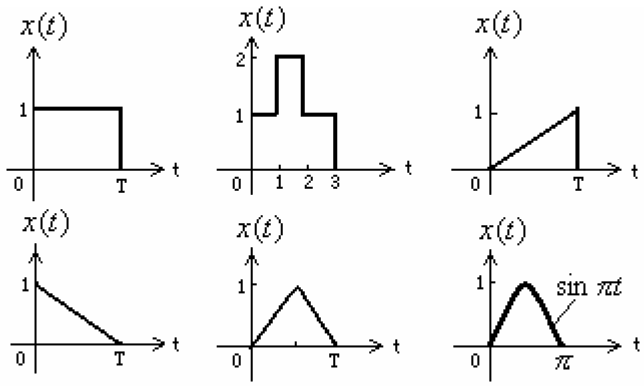
(5)
$$X_{b5}(s)=\int_0^{\infty}\cos(\omega_c t+\theta)e^{-st}dt=\frac{\omega_c e^{-st}\sin(\omega_c t+\theta)-se^{-st}\cos(\omega_c t+\theta)}{s^2+\omega_c^2}\Big|_0^{\infty}$$
$$=\frac{s\cos\theta-\omega_c\sin\theta}{s^2+\omega_c^2}\qquad(\sigma>0)$$

(6) $X_{b6}(s)=\int_0^{\infty}\sin\omega_c t\cdot e^{-(s+a)t}dt=\dfrac{\omega_c}{(s+a)^2+\omega_c^2}\qquad(\sigma>0)$

(7) $X_{b7}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at-b)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)e^{-s\frac{\tau+b}{a}}\dfrac{1}{a}d\tau=\dfrac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}\qquad(\sigma\in R)$

(8)
$$X_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{3t}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}e^{-2t}e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{3-s}e^{(3-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2+s}e^{-(2+s)t}\Big|_0^{\infty}$$
$$=\frac{1}{3-s}+\frac{1}{2+s}$$
$$=\frac{5}{(2+s)(3-s)}\quad(-2<\sigma<3)$$

2．用定义计算题图 1－18 所示各信号的拉普拉斯变换。



题图 1－18

解：(1) $X_{b1}(s)=\int_0^T e^{-st}dt=\frac{1}{-s}e^{(-s)t}\Big|_0^T=\frac{1-e^{-sT}}{s} \qquad (\sigma\in R)$

（2） $X_{b2}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 2e^{-st}dt+\int_2^3 e^{-st}dt$

$$=\int_0^3 e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^3+-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2$$

$$=\frac{1-e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}=\frac{1+e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$$

（收敛域为除坐标原点外的整个 S 平面）

(3)
$$X_{b3}(s)=\int_0^T\frac{1}{T}te^{-st}dt=\frac{1}{T}[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}]\Big|_0^T$$
$$=\frac{1}{T}(-\frac{1}{s}Te^{-sT}-\frac{1}{s^2}e^{-sT}+\frac{1}{s^2}) \qquad (\sigma\in R)$$

(4)
$$X_{b4}(s)=\int_0^T[-\frac{1}{T}t+b]e^{-st}dt=\{-\frac{1}{T}[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}]+b[-\frac{1}{s}e^{-st}]\}\Big|_0^T$$
$$=e^{-sT}[\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}-\frac{1}{Ts^2}-\frac{b}{s})+\frac{b}{s} \qquad (\sigma\in R)$$

（5）
$$X_{b5}(s)=\int_0^{T/2}\frac{2}{T}te^{-st}dt+\int_{T/2}^T(-\frac{2}{T}t+2)e^{-st}dt$$
$$=\frac{2}{T}[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}]\Big|_0^{T/2}-\frac{2}{T}[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}]\Big|_{T/2}^T+2[-\frac{1}{s}e^{-st}]\}\Big|_{T/2}^T$$
$$=\frac{2}{Ts^2}(-2e^{-sT/2}+e^{-sT}+1) \qquad (\sigma\in R)$$

(6) $$X_{b6}(s)=\int_0^{\pi}\sin \pi t e^{-st}dt=\frac{-\frac{1}{s}\sin \pi t\cdot e^{-st}+\frac{1}{\pi s}\cos \pi t\cdot e^{-st}}{1+\frac{1}{\pi^2 s}}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{-\pi^2\sin\pi^2\cdot e^{-\pi s}+\pi\cos\pi^2\cdot e^{-\pi s}-\pi}{\pi^2 s+1}\qquad(\sigma\in R)$$

3．确定时间函数 $x(t)$ 的拉普拉斯变换、零极点及其收敛域。

（1）$x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$　　（2）$x(t)=e^{-4t}u(t)+e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$

（3）$x(t)=e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)$　　（4）$x(t)=te^{-2|t|}$

（5）$x(t)=|t|e^{-2|t|}$　　（6）$x(t)=|t|e^{2t}u(-t)$

（7）$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　　（8）$x(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 2-t & 1\le t\le 2\end{cases}$

(9) $x(t)=\delta(t)+u(t)$　　（10）$x(t)=\delta(3t)+u(3t)$

解：

（1）$x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$

$$X_{b1}(s)=\int_0^{\infty}e^{-2t}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}e^{-3t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{s+3}e^{-(s+3)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\qquad(\sigma>-3)$$

（2）$x(t)=e^{-4t}u(t)+e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$

$$X_{b2}(s)=\int_0^{\infty}e^{-4t}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}e^{-5t}\sin 5t\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s+4}+\frac{1}{5(s+5)^2+1}\qquad(\sigma>-4)$$

（3）$x(t)=e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)$

$$X_{b3}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}e^{-st}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{3t}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2-s}e^{-(s-2)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{s-3}e^{-(s-3)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{2-s}+\frac{1}{3-s}\qquad(\sigma<3)$$

（4）$x(t)=te^{-2|t|}$

$$X_{b4}(s)=\int_{-\infty}^{0}te^{2t}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}te^{-2t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{(2-s)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}\qquad(-2<\sigma<2)$$

（5）$x(t)=|t|e^{-2|t|}$

$$X_{b5}(s)=\int_{-\infty}^{0}(-te^{2t}e^{-st})dt+\int_{0}^{\infty}te^{-2t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{(2-s)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}\qquad(-2<\sigma<2)$$

（6） $x(t)=|t|e^{2t}u(-t)$

$$X_{b6}(s)=-\int_{-\infty}^{0}te^{2t}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{(2-s)^2}\qquad(\sigma<2)$$

（7） $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0\end{cases}$

$$X_{b7}(s)=\int_{0}^{1}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

零极点均为 0，收敛域为整个 S 平面。

(8) $X_{b8}\left(s\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x_8(t)e^{-st}dt=\int_0^1 te^{-st}dt+\int_1^2(2-t)e^{-st}dt$

$$=-\frac{1}{s}\left[te^{-st}+\frac{1}{s}e^{-st}\right]\Bigg|_0^1-\frac{2}{s}e^{-st}\Bigg|_1^2+\frac{1}{s}\left[te^{-st}+\frac{1}{s}e^{-st}\right]\Bigg|_1^2$$

$$=\left(\frac{e^{-s}-1}{s}\right)^2$$

二重零点 s=0，二重极点 s=0，收敛域为除坐标原点外的整个 S 平面。

(9) $x(t)=\delta(t)+u(t)$

$$X_{b9}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=1+\frac{1}{s}$$

零点 s=-1，极点 s=0，收敛域为σ>0。

(10) $\left[x_8(t)\right]=\left[\delta\left(3t\right)+u\left(3t\right)\right]=\left[\delta\left(3t\right)\right]+\left[u\left(3t\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{s/3}=\frac{s+3}{3s}$

零点 s=－3, 极点 s=0，收敛域为σ>0。

5．若已知 $u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{s}$，收敛域为 $\Re e\{s\}>0$，试利用拉氏变换的性质，求下列信号的拉氏变换式及其收敛域。

（1）$[\cos(\omega_c t)]u(t)$　　（2）$[\sin(\omega_c t)+\cos(\omega_c t)]u(t)$

（3）$[e^{-at}\cos(\beta t)]u(t)$　　（4）$[t\cos(\omega_c t)]u(t)$

（5）$[te^{-at}\cos(\omega_c t)]u(t)$　　（6）$e^{-t}u(t-T)$

（7）$te^{-t}u(t-T)$　　（8）$t\delta'(t)$

（9）$t^2\delta''(t)$　　（10）$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-kT)$

解：(5) $e^{-at}\cos\left(\omega_c t\right)u\left(t\right) \longleftrightarrow \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_c^2}$

利用双边拉普拉斯变换的复频域微分特性

$$[te^{-at}\cos(\omega_c t)]u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_c^2}\right] = \frac{\left(s+a\right)^2-{\omega_c}^2}{\left[\left(s+a\right)^2+{\omega_c}^2\right]^2}$$

收敛域为σ>－a。

（16）$(1-e^{-at})u(t)=u(t)-e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}$

利用双边拉普拉斯变换的复频域积分特性

$$t^{-1}(1-e^{-at})u(t) \longleftrightarrow \int_s^{\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau+a}\right)d\tau = \ln\left|\frac{\tau}{\tau+a}\right|\Bigg|_s^{\infty} = \ln\left|\frac{s}{s+a}\right|$$

若 a>0，收敛域为σ>0；若 a<0，收敛域为σ>－a。

6．求下列函数的拉普拉斯反变换：

（1）$\dfrac{1}{s^2+9}$　$\mathrm{Re}\{s\}>0$　　（2）$\dfrac{s}{s^2+9}$　$\mathrm{Re}\{s\}<0$

（3）$\dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}$　$\mathrm{Re}\{s\}<-1$　　（4）$\dfrac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}$　$\mathrm{Re}\{s\}>0$

（5）$\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$　$-3<\mathrm{Re}\{s\}<-2$　　（6）$\dfrac{s+2}{s^2+7s+12}$　$-4<\mathrm{Re}\{s\}<-3$

（7）$\dfrac{(s+1)^2}{s^2-s+1}$　$\mathrm{Re}\{s\}>\dfrac{1}{2}$　　（8）$\dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$　$\mathrm{Re}\{s\}>-1$

（9）$\dfrac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$　$\mathrm{Re}\{s\}>-1$　　（10）$\dfrac{s^2-s+1}{s^3-s^2}$　$\mathrm{Re}\{s\}>1$

解：(1)

（7）$$\frac{(s+1)^2}{s^2-s+1} = 1+\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j}{s-\frac{1+\sqrt{3}}{2}j}+\frac{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j}{s-\frac{1-\sqrt{3}}{2}j} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>\frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}\right] = \delta(t)+(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}j}u(t)+(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}j}u(t)$$

(8) $$\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2} = 1+\frac{-3s}{(s+1)^2} = 1+\frac{-3}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$\left[\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}\right]=[\delta(t)-3e^{-t}+3te^{-t}]u(t)$$

(9) $\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}=1+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$ （部分分式展开）

$$[1]=\delta(t)$$

$$\left[\frac{2}{s+1}\right]=2e^{-t}u(t)$$

$$\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}u(t)$$

$$\left[\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}\right]=\delta(t)+2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)=\delta(t)+\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

（10） $\frac{s^2-s+1}{s^3-s^2}$ $\qquad \mathrm{Re}\{s\}>1$

$$\frac{s^2-s+1}{s^3-s^2}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>1$$

$$\left[\frac{s^2-s+1}{s^3-s^2}\right]=e^{t}u(t)-tu(t)$$

11．已知信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+5}$，试求下列信号的拉普拉斯变换。

（1） $x(2t-1)u(2t-1)$ （2） $tx(t)$ （3） $e^{-3t}x(t)$

（4） $\frac{dx(t)}{dt}$ （5） $2x(t/4)+3x(5t)$ （6） $x(t)\cos 7t$

解：（6） $[X(s)]=\left[\frac{s+2}{s^2+4s+5}\right]=\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]=e^{-2t}\cos tu(t)(\sigma>-2)$

所以，$x(t)\cos 7t=e^{-2t}\cos tu(t)\cos 7t=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)\left[\cos 8t+\cos 6t\right]$

$$=\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 8tu(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 6tu(t)$$

$$\left[x(t)\cos 7t\right]=\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos 8tu(t)\right]+\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos 6tu(t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+64}+\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+36}$$

$$=\frac{1}{2}(s+2)\left[\frac{1}{(s+2)^2+64}+\frac{1}{(s+2)^2+36}\right]\ (\sigma>-2)$$

或 $\left[x(t)\cos 7t\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{s+2+j}{(s+2+j)^2+49}+\frac{s+2-j}{(s+2-j)^2+49}\right]\ (\sigma>-2)$

13．由下列各象函数求原函数的傅立叶变换 $X(\omega)$。

（1）$\frac{1}{s}$ （2）$\frac{2}{s^2+1}$ （3）$\frac{s+2}{s^2+4s+8}$ （4）$\frac{s}{(s+4)^2}$

解：（3）$\frac{s+2}{s^2+4s+8}=\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}$

其收敛域为 $\sigma>-2$，因此 $j\omega$ 轴在 $X_b(s)$ 的收敛域内，所以

$$X(\omega)=X_b(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+8}=\frac{2+j\omega}{8-\omega^2+4j\omega}$$

14．设 $f(t)u(t)\leftrightarrow F(s)$，且有实常数 a>0，b>0，试证：

（1）$f(at-b)u(at-b)\leftrightarrow\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F(\frac{s}{a})$

（2）$\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})u(t)\leftrightarrow F(as+b)$

证明：（1）由拉普拉斯变换的定义

$$\left[f(at-b)u(at-b)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at-b)u(at-b)e^{-st}dt$$

$$\overset{\text{令}at-b=\tau}{\underset{t=\frac{\tau+b}{a}}{=\!=\!=}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(at-b)u(at-b)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-s\left(\frac{\tau+b}{a}\right)}d\left(\frac{\tau+b}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}d\tau=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F(\frac{s}{a})$$

（利用 $F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$）。

（2）由拉普拉斯变换的定义

$$\left[\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})u(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})u(t)e^{-st}dt$$

$$\overset{\text{令}\frac{t}{a}=\tau}{\underset{t=a\tau}{=\!=\!=}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}e^{-b\tau}f(\tau)u(a\tau)e^{-sa\tau}d(a\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(a\tau)e^{-(as+b)\tau}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-(as+b)\tau}dt=F(as+b)$$

（利用 $u(a\tau)=(\tau)(a>0)$， $F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ）

15．求下列象函数 $X(s)$ 的原函数的初值 $x(0_+)$ 和终值 $x(\infty)$ 。

（1） $X(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)^2}$ （2） $X(s)=\dfrac{3s+1}{s(s+1)}$

解：（1） $x(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s(2s+3)}{(s+1)^2}=2$，

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2}=0\text{ 。}$$

（2） $x(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s(3s+1)}{s(s+1)}=3$，

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(3s+1)}{s(s+1)}=1\text{ 。}$$

16．设信号 $x(t)$ 的有理拉普拉斯变换具有两个极点 s=－1 和 s=－3。若 $g(t)=e^{2t}x(t)$，其傅立叶变换 $G(\omega)$ 收敛，请问 $x(t)$ 是否是左边的、右边的、或是双边的？

解： $\left[x(t)\right]=X_b(s)=\dfrac{N(s)}{(s+1)(s+3)}$

$$\left[g(t)\right]=G(s)=X_b(s-2)=\frac{N(s-2)}{(s-1)(s+1)}$$

所以 $G(s)$ 的极点为 $s_1=-1, s_2=1$ 。由于 $G(\omega)$ 收敛，所以 $G(s)$ 存在，并且其收敛域包含 $j\omega$ 轴或以 $j\omega$ 轴为边界，再根据有理拉普拉斯变换的收敛域特点（P.79），可知 $G(s)$ 的收敛域为 $-1<\sigma<1$，由拉普拉斯变换的收敛域的基本特点（P.72），可知 $g(t)=e^{2t}x(t)$ 为双边信号， $x(t)=e^{-2t}g(t)$ 也为双边信号。

17．已知信号 $e^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\dfrac{1}{s+a}$ ，其中 $\Re e\{s\}>\Re e\{-a\}$ 。求 $X(s)=\dfrac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \Re e\{s\}>-3$ 的反变换。

解： $X(s)=\dfrac{2(s+2)}{s^2+7s+12}=\dfrac{-2}{s+3}+\dfrac{4}{s+4}$ （部分分式法展开）

$$\left[X(s)\right]=-2e^{-3t}u(t)+4e^{-4t}u(t)$$

习题（P155）

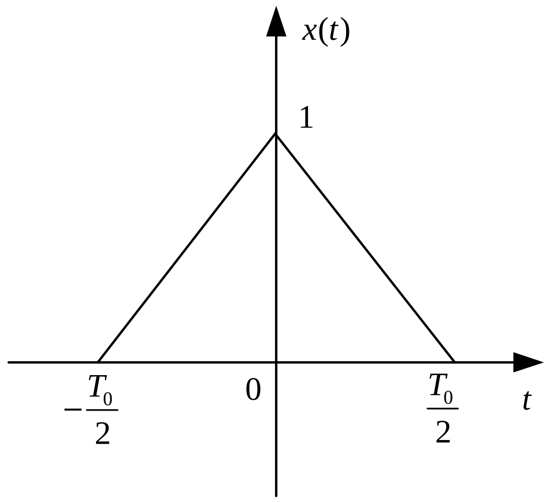
1．已知三角脉冲如题图 3－1 所示，试求

（1）三角脉冲的频谱；

（2）画出对 $x(t)$以等间隔 $T_0/8$ 进行理想采样所构成的采样信号 $x_s(t)$的频谱 $X_s(\omega)$;

（3）将 $x(t)$以周期 T_0 重复，构成周期信号 $x_p(t)$，画出对 $x_p(t)$以 $T_0/8$ 进行理想采样所构成的采样信号 $x_{ps}(t)$的频谱 $X_{ps}(\omega)$;

（4）若已知 $x(t)$的频谱函数 $X(\omega)$，对 $X(\omega)$进行频率采样，若想不失真地恢复信号 $x(t)$，需满足哪些条件？



题图 3－1

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

（1） $F[x(t)]=\frac{T_0}{2}Sa^2\left(\frac{\omega T_0}{4}\right)$

（2）
$$\begin{aligned}X_s(\omega)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4Sa^2\left[\frac{T_0}{4}\omega-4n\pi\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4Sa^2\left[\frac{T_0}{4}(\omega-n\omega_s)\right]\end{aligned}$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}=\frac{16\pi}{T_0}$$

$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}4Sa^2\left[\frac{T_0}{4}\omega-4n\pi\right]*$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{T_0}{2}Sa^2\left(\frac{\omega T_0}{4}\right)*\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$P(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{16\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{16n\pi}{T_s})$$

（3）

$$F[x(t)e^{j\omega_0 t}]=\frac{1}{2\pi}X(\omega)\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega_0)=X(\omega)\cdot\delta(\omega-\omega_0)=X(\omega-\omega_0)$$

$$X(\omega)=\frac{T_0}{2}Sa^2(\frac{n\omega_0 T_0}{4})$$

6.（1） $x(\Omega)=\dfrac{16e^{3j\Omega}}{2-e^{-j\Omega}}$

7. $\dfrac{1}{n\pi}\left(\sin\dfrac{3}{4}n\pi-\sin\dfrac{1}{4}n\pi\right)$

8. 设 $x(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\Omega})$，试求下列序列的傅里叶变换：

(1) $x(\alpha n)$ (2) $x^*(\alpha n)$

其中，$*$ 表示共轭，α 为任意常数。

解：(1) $x(\alpha n)$

$$F[x(an)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(an)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{\Omega}{a}n}=X(e^{j\frac{\Omega}{a}})$$

(2) $x^*(\alpha n)$

$$F[x^*(an)]=X^*(e^{-j\frac{\Omega}{a}})$$

10. 求下列周期序列的傅立叶级数

(1) $\left(\alpha^n u(n)\right)*\tilde{\delta}_8(n)$（$0<\alpha<1$）

(2) $\cos(\frac{\pi}{4}n)$

解：（1） $\left(\alpha^n u(n)\right)*\tilde{\delta}_8(n)$（$0<\alpha<1$）

令 $\tilde{x}_8(n)=[a^n u(n)]*\tilde{\delta}_8(n)$

则 $\tilde{X}_8(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}_8(n)e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{7}a^n e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$

$$\tilde{x}_8(n)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}[\sum_{n=0}^{7}a^n e^{-j\frac{\pi}{4}kn}]e^{j\frac{\pi}{4}kn}$$

（2）$\cos(\frac{\pi}{4}n)$

令 $\tilde{x}_8(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)$

则 $\tilde{X}_8(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}_8(n)e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{7}\cos(\frac{\pi}{4}n)e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$

$$\tilde{x}_8(n)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}[\sum_{n=0}^{7}\cos(\frac{\pi}{4}n)e^{-j\frac{\pi}{4}kn}]e^{j\frac{\pi}{4}kn}$$

12．设 $x_a(t)$是周期连续时间信号，

$$x_a(t)=A\cos(200\pi t)+B\cos(500\pi t)$$

以采样频率 $f_s=1\text{KHz}$ 对其进行采样，计算采样信号 $x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT_s}$ 的 DFS。

解：$X(k\Omega_0)=\frac{1}{20}(A\cos(\frac{n\pi}{5})+B\cos(\frac{n\pi}{2}))e^{-jk\frac{\pi}{10}n}$

19. 求下列序列的 Z 变换，并画出极零图和收敛区域。

（1）$x(n)=a^{|n|}$

解：

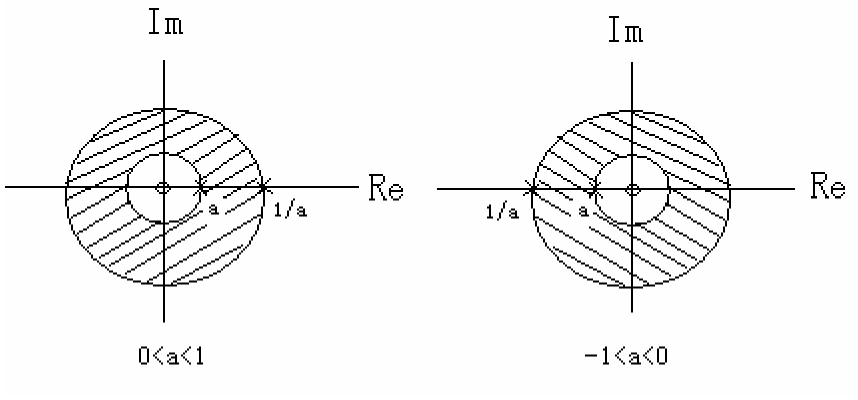
$$\begin{aligned}X(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}\\&=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}\\&=\frac{(1-a^2)z^{-1}}{(z^{-1}-a)(1-az^{-1})}\end{aligned}$$

收敛域为 $|az|<1,\text{且}|az^{-1}|<1,\text{且}|a|<1$

所以收敛域为 $|a|<1,\text{且}|a|<|z|<\left|\frac{1}{a}\right|$。

零点为 $z=0$，极点为 $z_1=\frac{1}{a},z_2=a$

收敛区域为下图阴影部分。



（2） $x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & n<0, n>N-1\end{cases}$

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

零点为 $z=1$，极点为 $z=1$，收敛域为 $|z|>0$。

（3） $x(n)=\begin{cases}n & ,0\le n\le N\\ 2N-n, & N+1\le n\le 2N\\ 0, & \text{其它 } n\end{cases}$

解：

$$\begin{aligned}x(n)&=n[u(n)-u(n-1)]+(2N-n)[u(n-N)-u(n-2N)]\\&=nu(n)-nu(n-N)+(2N-n)u(n-N)-(2N-n)u(n-2N)\\&=nu(n)-2(n-N)u(n-N)+(n-2N)u(n-2N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(z)&=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{2z^{-N}z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{z^{-2N}z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\\&=\frac{z^{-1}(1-z^{-N})^2}{(1-z^{-1})^2}\end{aligned}$$

收敛域为 $1<|z|\le\infty$

零点 $z=1$，极点 $z=0, z=1$。

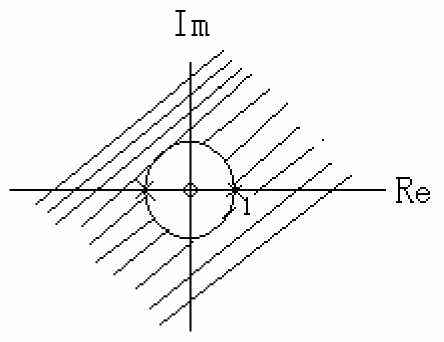
（4） $x(n)=n \qquad (n\ge 0)$

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{-n}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

零点为 $z=0$，极点为 $z_1=z_2=1$

收敛域为 $|z|>1$。



（5） $x(n)=\dfrac{1}{n!}\qquad(n\geq 0)$

（6） $x(n)=\cos an,\qquad(n\geq 0)\qquad$ (a为常数)

21. 设 $x(n)\xleftrightarrow{z}\dfrac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$，试问 $x(n)$ 在以下三种收敛域下，哪一种是左边序列、哪一种是右边序列、哪一种是双边序列？并求出各对应的 $x(n)$ 。

(1) |z|>2　　　　(2) |z|<0.5　　　　(3) 0.5<|z|<2

解：(1) |z|>2

$$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

因为|z|>2，所以 $|2z^{-1}|<1,|0.5z^{-1}|<1$

$$X(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}0.5^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n}-2^{n})z^{-n}$$

$x(n)=(2^{-n}-2^{n})u(n)$，为右边序列

(2) |z|<0.5

$$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{0.5z}{1-0.5z}-\frac{2z}{1-2z}$$

因为|z|<0.5，所以 $|0.5z|<1,|2z|<1$

$$X(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}z^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}0.5^{n}z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-2^{-n}+2^{n})z^{-n}$$

$x(n)=(-2^{-n}+2^{n})u(-n-1)$，为左边序列

(3) $0.5<|z|<2$

$$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{0.5z}{1-0.5z}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

因为 $0.5<|z|<2$

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}0.5^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}0.5^{n}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}0.5^{n}z^{-n}$$

$x(n)=2^{n}u(-n-1)+0.5^{n}u(n)$，为双边序列

22. 求下列 $F(z)$ 的 Z 反变换：

（1）$\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$, $\quad |z|>\dfrac{1}{a}$

（2）$\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}2\cos\Omega_0+z^{-2}}, |z|>1$

（3）$\dfrac{z^{-n_0}}{1+z^{-n_0}}, |z|>1, n_0$ 为某整数

解：

（1）$\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$, $\quad |z|>\dfrac{1}{a}$

因为 $\quad X(z)=\dfrac{z^{-1}-a^{-1}}{1-(az)^{-1}}=\dfrac{z^{-1}}{1-(az)^{-1}}-\dfrac{a^{-1}}{1-(az)^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n+1}z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}a^{-(n+1)}z^{-n}$

所以 $\quad x(n)=a^{-n+1}u(n-1)-a^{-(n+1)}u(n)$

（2）$\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}2\cos\Omega_0+z^{-2}}, |z|>1$

因为 $\quad X(z)=\dfrac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}+\dfrac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}\cdot\dfrac{1+\cos\Omega_0}{\sin\Omega_0}$

所以 $x(n)=\dfrac{\sin(n+1)\Omega_0}{\sin\Omega_0}u(n+1)+\dfrac{\sin n\Omega_0}{\sin\Omega_0}u(n)$

（3）$\dfrac{z^{-n_0}}{1+z^{-n_0}},|z|>1,n_0$ 为某整数

A. 当 $n_0=0$ 时，$X(z)=0.5$，则 $x(n)=0.5\delta(n)$

B. 当 $n_0\neq0$ 时，

$$X(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-z^{-n_0})^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{-n_0 n}=-\sum_{n'=n_0}^{\infty}(-1)^{\frac{n'}{n_0}}z^{-n'}=-\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{n_0}}z^{-n}$$

$$x(n)=(-1)^{\frac{n+n_0}{n_0}}u(n-n_0)$$

参考习题：

1. 求下列相应序列的频谱

(1) $e^{-an}\cos\Omega_0 n\cdot u(n)$

(2) $r_N(n)$

(3) $1/(1-az^{-1}),0<a<1$

(4) $1/(1-z^{-1}2a\cos\Omega_0+z^{-2}a^2),0<a<1$

解：

(4) $1/(1-z^{-1}2a\cos\Omega_0+z^{-2}a^2),0<a<1$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}2a\cos\Omega_0+z^{-1}a^2}$$

$$a<|z|\le\infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

令 $z=e^{j\Omega}$，则

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}2a\cos\Omega_0+e^{-sj\Omega}a^2}$$

2. 设 $x(n)\xleftrightarrow{F} X(e^{j\Omega})$，求 $|X(e^{j\Omega})|^2$ 的傅立叶反变换。

解：

$$\left|X(e^{j\Omega})\right|^2=X(e^{j\Omega})\cdot X^*(e^{j\Omega})$$

$$\begin{aligned}F^{-1}[\left|X(e^{j\Omega})\right|^2]&=F^{-1}[X(e^{j\Omega})\cdot X^*(e^{j\Omega})]\\&=F^{-1}[X(e^{j\Omega})]*F^{-1}[X(e^{j\Omega})]\\&=x(n)*x^*(-n)\end{aligned}$$

3、试求 $\frac{2t}{t^2-1}\cos\frac{\pi t}{2}$ 的不失真采样的最大采样周期

解：设$x1(t)=\dfrac{2t}{t^2-1}\leftrightarrow X1(\omega)$

$x2(t)=\cos\dfrac{\pi t}{2}\leftrightarrow X2(\omega)$

$X(\omega)=F[x1(t)x2(t)]=X1(\omega)*X2(\omega)$

$\because F[\dfrac{1}{t}]=-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$

$\therefore F[\dfrac{1}{t+1}]=e^{j\omega}[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$

$F[\dfrac{1}{t-1}]=e^{-j\omega}[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$

$\therefore F[\dfrac{2t}{t^2-1}]=F[\dfrac{1}{t+1}]+F[\dfrac{1}{t-1}]=e^{j\omega}[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]+e^{-j\omega}[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$

$=2\cos\omega[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$

而$F[\cos\dfrac{\pi t}{2}]=\pi[\delta(\omega+\dfrac{\pi}{2})+\delta(\omega-\dfrac{\pi}{2})]$

$\therefore X(\omega)=X1(\omega)*X2(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\pi[\delta(\tau+\dfrac{\pi}{2})+\delta(\tau-\dfrac{\pi}{2})]\cdot 2\cos(\omega-\tau)[-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega-\tau)]d\tau$

$=\dfrac{1}{2\pi}[\pi\times 2\cos(\omega-\tau)(-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega-\tau))|_{\tau=\frac{-\pi}{2}}+\pi\times 2\cos(\omega-\tau)(-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega-\tau))|_{\tau=\frac{\pi}{2}}]$

$=j\pi\sin(\omega)[\mathrm{sgn}(\omega+\dfrac{\pi}{2})-\mathrm{sgn}(\omega-\dfrac{\pi}{2})]$

$=\begin{cases}2j\pi\sin(\omega) & |\omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |\omega|\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\therefore \omega_m=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$最小采样频率为$\Omega_s=2\omega_m=\pi$

$\therefore$最大采样周期为$T=\dfrac{2\pi}{\Omega_s}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

4、一个理想采样系统频率为$\Omega_s=8\pi$，采样后经过低通$L(\omega)$还原：

$L(\omega)=\begin{cases}\cos\frac{\omega}{8\pi} & |\omega|<4\pi\\ 0 & |\omega|\ge 4\pi\end{cases}$今有输入 x(t)=$\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$,问输出信号 y(t)有没有失真？是什么失真？

解：$\because x(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}=Sa(\pi t)$

$\therefore X(\omega)=\{_{0\quad |\omega|\ge\pi}^{1\quad |\omega|<\pi}$，

$\therefore X^{"}(\omega)=\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\Omega_s)=4\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\times 8\pi)$

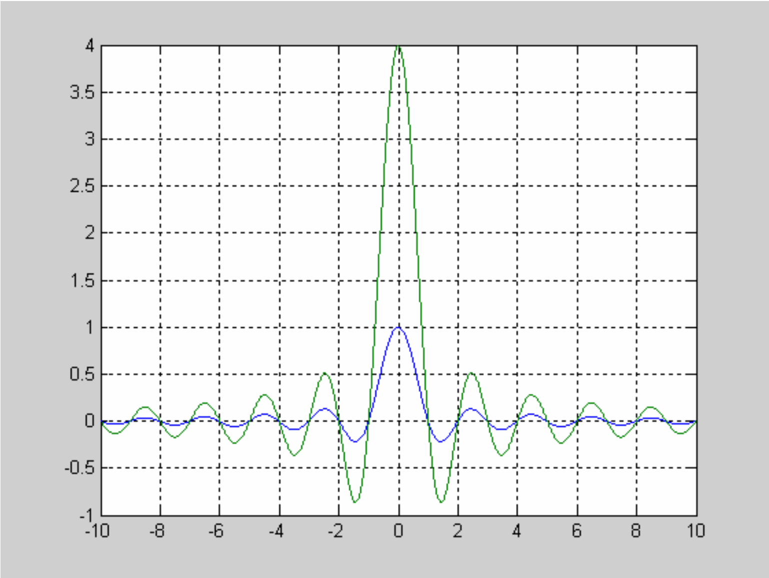
$\therefore Y(\omega)=L(\omega)X^{"}(\omega)=L(\omega)4\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\times 8\pi)=4\cos\dfrac{\omega}{8\pi}X(\omega)$

$\because F^{-1}[\cos\dfrac{\omega}{8\pi}]=\dfrac{1}{2}[\delta(-t+\dfrac{1}{8\pi})+\delta(-t-\dfrac{1}{8\pi})]$

$\therefore y(t)=4F^{-1}[\cos\dfrac{\omega}{8\pi}]*x(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(-\tau+\dfrac{1}{8\pi})+\delta(-\tau-\dfrac{1}{8\pi})]\cdot Sa((t-\tau)\pi)d\tau$

$2[Sa((t-\tau)\pi)|_{\tau=\frac{1}{8\pi}}+Sa((t-\tau)\pi)|_{\tau=-\frac{1}{8\pi}}]=2[Sa(\pi t-\dfrac{1}{8})+Sa(\pi t+\dfrac{1}{8})]$

$\therefore y(t)$应该有失真。



产生幅度失真。

5. 试指出如下序列的因果性及稳定性。

（1） $2^n u(-n)$

解：

$$x(n)=2^n u(-n)$$

$$x(n)u(n)=2^n u(-n)u(n)=2^n\ \Big|_{n=0}=1$$

所以

$$x(n)\neq x(n)u(n)$$

所以 $x(n)$ 不是因果信号。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{0}2^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n} = 2 < \infty$$

所以 $x(n)$ 是稳定信号。

(2) $\dfrac{1}{n}\ u(n)$

解：$x(n)u(n) = \dfrac{1}{n}u(n)u(n) = \dfrac{1}{n}u(n) = x(n)$

所以 $x(n)$ 是因果信号。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}$$

所以 $x(n)$ 是不稳定信号。

6、设 h(n)={-2,2,0,1,5},x(n)={2,1,6,1,-1,4},求 y(n)=h(n)*x(n)

解：

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
 & 2 & 1 & 6 & 1 & -1 & 4 & & & & \\
\times & -2 & 2 & 0 & 1 & 5 & & & & & \\
\hline
 & -4 & -2 & -12 & -2 & 2 & -8 & & & & \\
 & & 4 & 2 & 12 & 2 & -2 & 8 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 2 & 1 & 6 & 1 & -1 & 4 & \\
+ & & & & & 10 & 5 & 30 & 5 & -5 & 20 \\
\hline
 & -4 & 2 & -10 & 12 & 15 & 1 & 39 & 4 & -1 & 20
\end{array}$$

即 y(n)={-4　2　–10　12　15　1　39　4　-1　20}

7. 分别以 4、8 为周期，将 $x(n) = \{x(-1), x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\} = \{-1,0,1,2,3,4\}$ 周期化，求其周期信号 $\tilde{x}_N(n)$。

解：（1）$N=4, \tilde{x}_4(n)=\{4,1,2,2\}$

（2）$N=8, \tilde{x}_8(n)=\{0,1,2,3,4,0,0,-1\}$

习题（P202）

1. 某线性时不变系统，当激励为图 P3.1(a)所示三个形状相同的波形时，其零状态响应 $y_1(t)$ 如图 P3.1(b)所示。试求当激励为图 P3.1(c)所示的 $x_2(t)$ [每个波形与图(a)中的任一形状相同]时的零状态响应 $y_2(t)$ 。

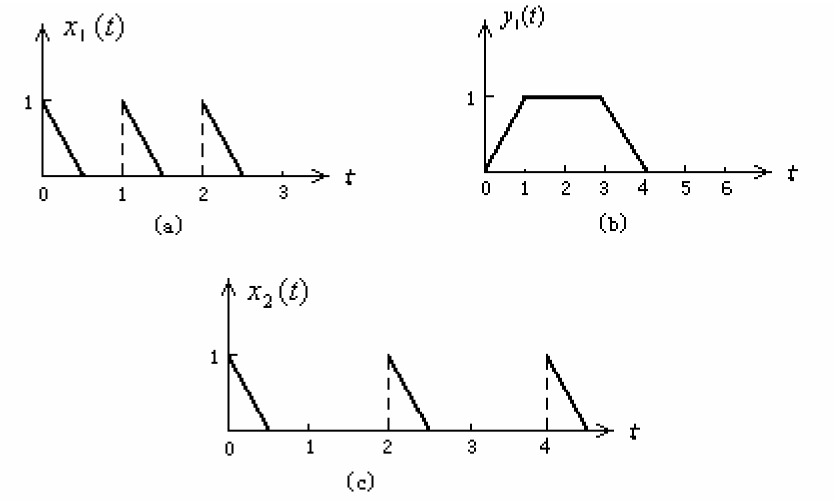


图 P3.1

解：

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-1) + x_1(t-2)$$
$$\therefore y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-1) + y_1(t-2)$$

令

$$\alpha(t) = t\cdot[u(t)-u(t-1)] + (-t+2)[u(t-1)-u(t-2)]$$
$$= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

$$y_2(t) = \alpha(t) + \alpha(t-2) + \alpha(t-4)$$
$$= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) + (t-2)u(t-2)$$
$$-2(t-3)u(t-3) + (t-4)u(t-4) + (t-4)u(t-4) - 2(t-5)u(t-5) + (t-6)u(t-6)$$
$$= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) - 2(t-3)u(t-3) + 2(t-4)u(t-4)$$
$$-2(t-5)u(t-5) + (t-6)u(t-6)$$

6. 某一线性时不变系统，在相同的初始条件下，

若当激励为 $x(t)$ 时，其全响应为 $y_1(t) = (2e^{-3t} + \sin 2t)U(t)$；

若当激励为 $2x(t)$，其全响应为 $y_2(t) = (e^{-3t} + 2\sin 2t)U(t)$ 。

求：（1）初始条件不变，当激励为 $x(t-t_0)$ 时的全响应 $y_3(t)$, t_0 为大于零的实常数；

(2) 初始条件增大 1 倍，当激励为 $0.5x(t)$ 时的全响应 $y_4(t)$ 。

解：因为系统是线性时不变的，

$$\therefore\ y_1(t)=y_1'(t)+y_1''(t)=(2e^{-3t}+\sin 2t)u(t)$$

其中 $y_1'(t)$ 是零输入响应， $y_1''(t)$ 是零状态响应

则 $y_2(t)=y_1'(t)+y_2''(t)=y_1'(t)+2y_1''(t)=(e^{-3t}+2\sin 2t)u(t)$

$$\therefore y_1''(t)=y_2(t)-y_1(t)=(-e^{-3t}+\sin 2t)u(t)$$
$$y_1'(t)=3e^{-3t}u(t)$$

当初始条件不变，激励为 $x_1(t-t_0)$ 时,

$$y_3(t)=y_1'(t)+y_1''(t-t_0)=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin 2(t-t_0)]u(t-t_0)$$

(2)、当初始条件增大一倍，激励为 $0.5\,x_1(t)$ 时，有：

$$y_4(t)=2y_1'(t)+0.5y_1''(t)=6e^{-3t}u(t)+(-0.5e^{-3t}+0.5\sin 2t)u(t)$$
$$=(5.5e^{-3t}+0.5\sin 2t)u(t)$$

9. 如图 P3.4 所示系统是由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为

$h_1(t)=U(t)$ （积分器）

$h_2(t)=\delta(t-1)$ （单位延时器）

$h_3(t)=-\delta(t)$ （倒相器）

求总系统的冲激响应 $h(t)$ 。

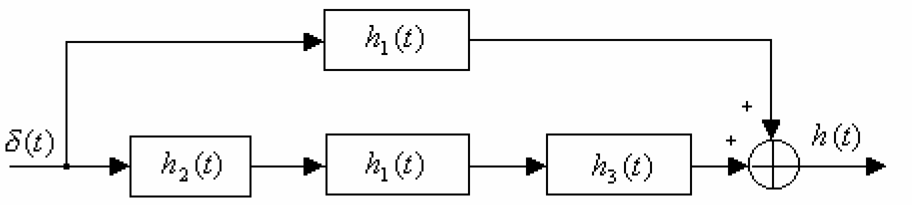


图 P3.4

解：

$$h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)+h_1(t)$$
$$=u(t)-\delta(t-1)*\delta(t)*u(t)$$
$$=u(t)-u(t-1)$$

11. 考虑一个线性时不变系统 S 和一信号 $x(t)=2e^{-3t}u(t-1)$,若

$$x(t)\rightarrow y(t)$$

和
$$\frac{dx(t)}{dt}\rightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

求系统 S 的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解：$\because\ y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-3\tau}u(\tau-1)h(t-\tau)d\tau$

又$\because -3y(t)+e^{-2t}u(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}*h(t)$

把$y(t)$代入有$-3\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-3\tau}u(\tau-1)h(t-\tau)d\tau+e^{-2t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx(\tau)}{d\tau}\cdot h(t-\tau)d\tau=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d[2e^{-3\tau}u(\tau-1)]}{d\tau}\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[-6e^{-3\tau}u(\tau-1)+2e^{-3\tau}\delta(\tau-1)]\cdot h(t-\tau)d\tau$$

即：$\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-3\tau}\delta(\tau-1)h(t-\tau)d\tau=e^{-2t}u(t)$

$$\therefore 2e^{-3}h(t-1)=e^{-2t}u(t)$$

$$h(t-1)=\frac{1}{2}e^{3}e^{-2t}u(t)$$

$$\text{h(t)}=\frac{1}{2}e^{-2t+1}u(t+1)$$

19. 在图 P3.14（a）所示系统中，已知 $H_1(\omega)$ 如图 P3.14（c）所示；$h_2(t)$ 的波形如图 P3.14（b）所示；$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n), n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。求零状态响应 $y(t)$ 。

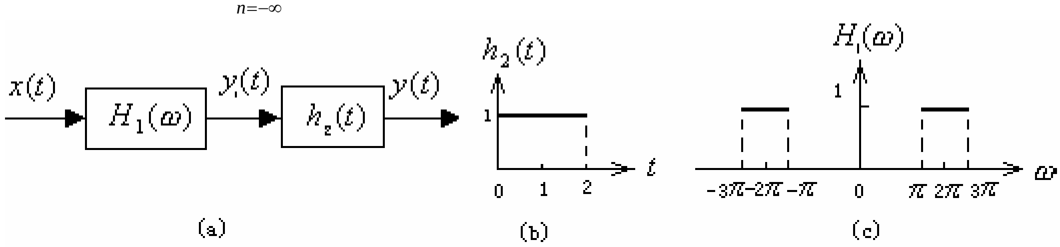


图 P3.14

解；$H_2(\omega)=\dfrac{2e^{-j\omega}\sin\omega}{\omega}$

$$X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi n)$$

$$Y(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_1(2\pi n)H_2(2\pi n)\delta(\omega-2\pi n)=0$$

$$\therefore y(t)=0$$

21. 有一因果线性时不变滤波器，其频率响应$H(\omega)$如图 P3.16 所示。对以下给定的输入，求经过滤波后的输出$y(t)$。

（1） $x(t)=e^{jt}$ （2） $x(t)=(\sin\omega_0 t)u(t)$

（3） $X(\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)(6+j\omega)}$ （4） $X(\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}$

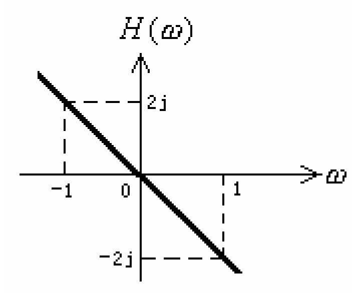


图 P3.16

解：由图 3.16 可知

$$H(\omega)=-2j\omega$$
$$H(s)=-2s$$

（1） $x(t)=e^{jt}$

$$x(t)=e^{jt}=\cos t+j\sin t$$

$$X(s)=\frac{s}{s^2+1}+j\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=-2+\frac{2}{s^2+1}+j\frac{2s}{s^2+1}$$

$$y(t)=-2\delta(t)+2\sin tu(t)+j2\cos tu(t)$$

（2） $x(t)=(\sin\omega_0 t)u(t)$

$$X(s)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=-2s\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}=-2\omega_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$y(t)=-2\omega_0\cos\omega_0 tu(t)$$

（3） $X(\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)(6+j\omega)}$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{-2j\omega}{j\omega(6+j\omega)}=\frac{-2}{6+j\omega}$$

$$y(t) = -2e^{-6t}u(t)$$

（4） $X(\omega) = \dfrac{1}{2 + j\omega}$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{-2j\omega}{2 + j\omega} = -2 + \frac{4}{2 + j\omega}$$

$$y(t) = -2\delta(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

24. 已知如图 P3.18 所示系统。

（1） 求 $H(s) = \dfrac{Y(s)}{F(s)}$；

（2） 求冲激响应 $h(t)$ 与阶跃响应 $g(t)$；

（3） 若 $f(t) = U(t-1) - U(t-2)$，求零状态响应 $y(t)$ 。

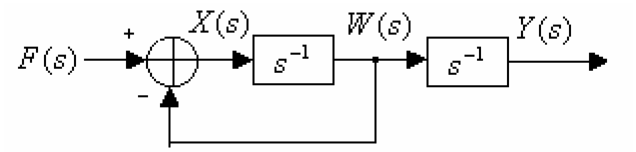


图 P3.18

解：

（1） $H(s) = \dfrac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s(s+1)}$

（2） $h(t) = u(t) - e^{-t}u(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ (冲激响应 收敛域 $\sigma > 0$)

$$G(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$g(t) = (e^{-t} - 1 + t)u(t)$ (阶跃响应 收敛域 $\sigma > 0$)

（3） 根据线性时不变系统的性质：

$$y(t) = g(t-1) - g(t-2) = (e^{-t+1} + t - 2)u(t-1) - (e^{-t+2} + t - 3)u(t-2)$$

参考习题：

1. 如图 P3.9(a)所示为理想低通滤波器系统，已知激励

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), n = 0, \pm1, \pm2, \cdots, T = 10^{-3}\,s;$$

系统的$H(\omega)=2G_{2\omega_m}(\omega)e^{-j\omega t_0}$，如图 P3.9 (b)所示，$\omega_m=10^4 rad/s$。求响应$y(t)$。

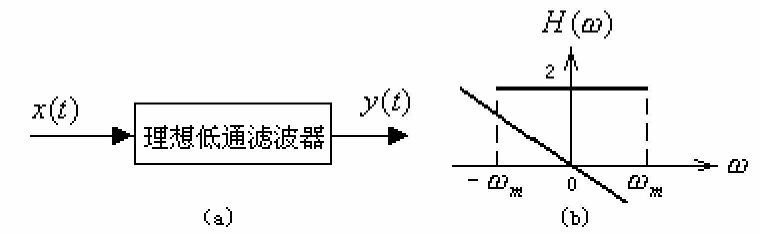


图 P3.9

解：
$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\frac{1}{T}\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$Y(\omega)=2\omega_0[\delta(\omega)+\delta(\omega-\omega_0)e^{-j\omega_0 t_0}+\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega_0 t}]$$

$$\begin{aligned}y(t)&=2\omega_0[\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t_0\cos\omega_0 t+\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t_0\sin\omega_0 t]\\&=\frac{\omega_0}{\pi}[1+2\cos\omega_0(t-t_0)]=\frac{2}{T}[1+2\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)]\\&=2000[1+2\cos 2000\pi(t-t_0)]\end{aligned}$$

2. 已知系统频率特性$H(\omega)=\dfrac{j\omega}{-\omega^2+j5\omega+6}$，系统的初始状态$y(0)=2, y'(0)=1$,激励$x(t)=e^{-t}U(t)$。求全响应$y(t)$。

解：

$$H(\omega)=\frac{j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{j\omega}{-\omega^2+j5\omega+6}=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+j5\omega+6}$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)$$

$$(s^2+5s+6)Y(s)-2s-11=sX(s)=\frac{s}{s+1}$$

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{2s^2+14s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)}\\&=\frac{-0.5}{s+1}+\frac{9}{s+2}+\frac{-12.5}{s+3}\end{aligned}$$

$$y(t) = -0.5e^{-t} + 9e^{-2t} - 6.5e^{-3t}$$

3. 考虑一个离散时间系统其输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 关系为

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

式中 n_0 为某一有限正整数。

（1）系统是线性的吗？

（2）系统是时不变的吗？

（3）若 $x(n)$ 为有界且界定为一有限整数 B(即对全部 n, $|x(n)| < B$),可以证明 $y(n)$ 是被界定到某一有限数 C。因此可以得出该系统是稳定的。请用 B 和 n_0 来表示 C。

解：(1)、 $x_1(k) \to y_1(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k)$

$$x_2(k) \to y_2(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)$$

$$x_3(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$$

其中a,b为任意常数

$$\therefore y_3(n) = \sum_{k=n-n_0}^{k=n+n_0} x_3(k) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} [ax_1(k) + bx_2(k)] = a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)$$

$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

因此系统是线性的。

(2)、 $y_1(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k)$ $\qquad y_1(n-n_1) = \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x_1(k)$

$$x_2(k) = x_1(k-n_1)$$

$$\therefore y_2(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k-n_1) \overset{令k' = k-n_1}{=\!=\!=\!=} \sum_{k'=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x_1(k')$$

$$= \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x_1(k) = y_1(n-n_1)$$

所以系统是时不变的。

(3)、 $|y(n)| = |\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)| \le \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| < \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} B = (2n_0+1)B = C$

$\therefore |y(n)| < C$且$C = (2n_0+1)B$ $\qquad$ 系统是稳定的。