

夏学期第三周作业参考答案

5-9 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为： $G(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)}$ ，试绘制其根轨迹图，并

求出使系统产生重实根和纯虚根的 K 值。

解：

开环零点： $z_1=1$ ，开环极点 $p_1=0$ ， $p_2=-2$

因为开环传递函数分子的最高次幂的系数为负，所以其根轨迹图为零度根轨迹。

(1) 实轴上的根轨迹： $[-2 \ 0]$ ， $[1 \ \infty]$

(2) 渐近线夹角： 0°

(3) 根轨迹的分离点 d ： $\frac{1}{d-1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2}$ $d = 1 \pm \sqrt{3}$ $d_1 = 2.732$ $d_2 = -0.732$

分离角： $\pm \frac{\pi}{2}$

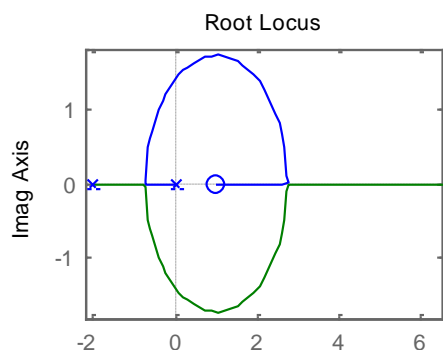
(4) 根轨迹与虚轴的交点：

闭环系统特征方程： $s^2 + (2-K)s + K = 0$ ，将 $s = j\omega$ 代入闭环系统的特征方程，得：

$$\begin{cases} K = \omega^2 \\ (2-K)\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 2 \end{cases}$$

所以系统产生纯虚根的 K 为： $K^*=2$

系统产生重实根的 K 为： $K_1 = \frac{|d_1||d_1+2|}{|d_1-1|} = 0.536$ $K_2 = \frac{|d_2||d_2+2|}{|d_2-1|} = 7.464$



5-10 设系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{30(s+b)}{s(s+10)}$ ，试画出 b 从零变到无穷时的根轨迹图。

解：系统闭环传递函数的特征方程为： $D(s) = s^2 + 40s + 30b = 0$ ，进行等效变换

$$1 + \frac{30b}{s(s+40)} = 0$$

等效开环传递函数为： $G_1(s) = \frac{30b}{s(s+40)}$

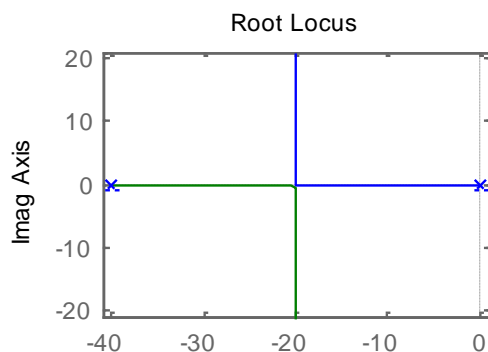
无开环有限零点，开环有限极点： $p_1=0$ ， $p_2=-40$

实轴上的根轨迹为: $[-40, 0]$

根轨迹有 2 条渐近线, $\sigma_a = \frac{-40}{2} = -20$, $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$

根轨迹的分离点 d : $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+40} = 0$, $d = -20$, 分离角 $\pm 90^\circ$

根轨迹图如图所示:



5-12 已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{s+a}{s^2(s+2)}$ 。试求 a 从 $0 \rightarrow \infty$ 的闭环根轨迹,

并求闭环稳定时的 a 的取值范围。

解: $\because G(S) = \frac{s+a}{s^2(s+2)} \therefore 1+G(S) = \frac{s+a}{s^2(s+2)} + 1 = 0 \therefore$

可等效为: $G(S)' = \frac{a}{s(s+1)^2}$

画根轨迹步骤如下:

1: 系统的开环极点为: $s_1 = 0$ $s_{2,3} = -1$ (二阶)

2: 根轨迹关于实轴对称, 实轴上的根轨迹: $(-\infty, 0)$

3: 渐进线

于实轴交点: $\sigma = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3-0} = \frac{-2}{3}$

渐进线倾角为:

$\phi = \frac{360^\circ l + 180^\circ}{3-0} = 120^\circ l + 60^\circ$ 即有: $\phi_1 = 60^\circ$ $\phi_2 = 180^\circ$ $\phi_3 = -60^\circ$

4: 由相位条件可得极点的出射角: 180° 0°

5: 与虚轴的交点: 把 $j\omega$ 代入特征方程:

$$S^3 + 2S^2 + S + ak = 0$$

$$\text{即: } -j\omega_0^3 - 2\omega_0^2 + j\omega_0 + a = 0$$

$$\text{有实部虚部分别为零: } \omega_0^3 - \omega_0 = 0 \quad a - 2\omega_0^2 = 0$$

$$\text{解之: } \begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \omega_0 = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

6: 与实轴的分离点与会合点

$$b(s) \frac{da(s)}{ds} - a(s) \frac{db(s)}{ds} = 0$$

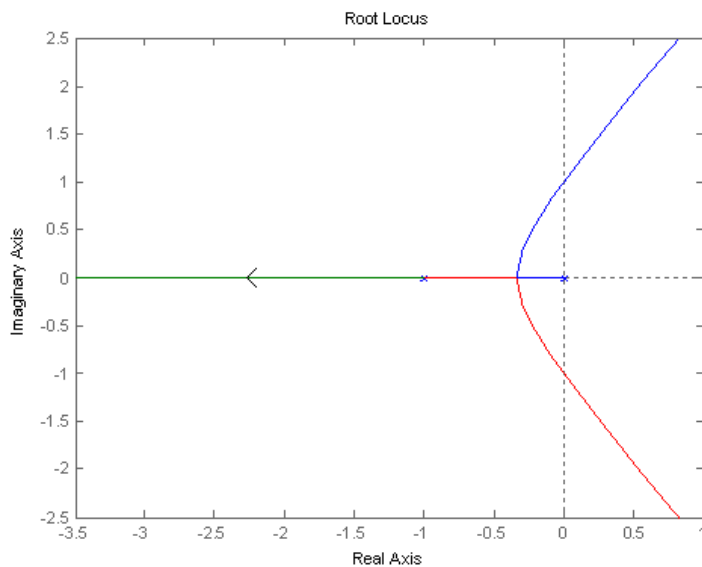
$$\text{已知: } a(s) = s^3 + 2s^2 + s, \quad b(s) = 1$$

$$\text{代入解得: } s_1 = -1, \quad s_2 = -\frac{1}{3}$$

经相位条件检验可知: s_1, s_2 满足条件,

$$\text{所以分离点为: } s_1 = -1 \quad s_2 = -\frac{1}{3}$$

综上所述, 可得根轨迹草图为:



由根轨迹图中可以知道, 要使系统稳定, 闭环极点必须在左半平面, 也就是 α 要满足: $0 < \alpha < 2$