

第六周作业参考答案

3-1(b)、3-5、3-7、3-8(1)(3)(5)、3-9

3-1 分别采用时域方法与拉氏变换方法求解下列微分方程，假设初始条件为零。

$$(b) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4.25x = t + 1$$

参考答案：

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left\{\frac{0.18}{s} + \frac{0.2353}{s^2} - \frac{0.18(s + \frac{1}{2})}{s^2 + s + 4.25} - \frac{0.16 \cdot 2}{s^2 + s + 4.25}\right\} \\ &= 0.18 + 0.2353t - 0.18e^{-0.5t} \cos 2t - 0.16e^{-0.5t} \sin 2t \end{aligned}$$

3-5 设单位负反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$ ，求这个系统的单位阶跃响应。

解：系统的闭环传递函数：
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{4}{s(s+5)+4} = \frac{4}{s^2+5s+4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{4}{(s+4)(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+1}$$

系统的单位阶跃响应：
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 + \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{4}{3}e^{-t}$$

3-7 某控制系统的传递函数是 $G(s) = \frac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$ ，求出该系统的单位脉冲响应 $g(t)$

与单位阶跃响应 $h(t)$ 。

解：(1) 因为单位脉冲输入为： $u(t) = \delta(t)$ ；其拉氏变换为： $U(s) = 1$

故单位脉冲响应

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left\{-\frac{2}{s+1} + 2\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} + \frac{11}{(s+2)^2+2^2}\right]\right\} \\ &= -2e^{-t} + 2e^{-2t} \cos 2t + 11e^{-2t} \sin 2t \end{aligned}$$

或：
$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left\{-\frac{2}{s+1} + \frac{2s+26}{s^2+4s+8}\right\}$$

因为 $L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{s+\alpha_0}{(s+\alpha)^2+w^2}\right] = \frac{1}{w} \sqrt{w^2+(\alpha_0-\alpha)^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(wt+\varphi)$

此题： $\alpha_0 = 13, \quad w = 2, \quad \alpha = 2, \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1}(\frac{w}{\alpha_0 - \alpha}) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{11} = 10.3^\circ$

故： $g(t) = -2e^{-2t} + 11.18e^{-2t} \sin(2t + 10.3^\circ)$

(2) 因为单位阶跃输入为： $u(t) = 1(t)$ ；其拉氏变换为： $U(s) = \frac{1}{s}$

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)} = \frac{1.25}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3.25s+11}{s^2+4s+8}$$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = 1.25 + 2e^{-t} - 3.25e^{-2t} \cos 2t - 2.25e^{-2t} \sin 2t$$

或： $h(t) = L^{-1}[H(s)] = 1.25 + 2e^{-t} - 3.95e^{-2t} \sin(2t + 55.3^\circ)$ 。

由于输入信号存在导数关系，由线性系统的性质，此题也可先求出单位阶跃响应 $h(t)$ ，然后对其求导即得单位脉冲响应 $g(t)$ 。

3-8 已知各系统的单位脉冲响应如下，试求系统的传递函数 $\Phi(s)$ 。

(1) $g(t) = 7 - 5e^{-6t}$ ；

(3) $g(t) = \frac{k}{\omega} \sin \omega t$ ；

(5) $g(t) = 0.02(e^{-0.5t} - e^{-0.2t})$ 。

解：(1) $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = L(7 - 5e^{-6t}) = \frac{7}{s} - \frac{5}{s+6} = \frac{2s+42}{s(s+6)}$

(3) $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = L(\frac{k}{\omega} \sin \omega t) = \frac{k}{s^2 + \omega^2}$

(5) $\Phi(s) = L\{0.02(e^{-0.5t} - e^{-0.2t})\} = 0.02(\frac{1}{s+0.5} - \frac{1}{s+0.2}) = -\frac{0.06}{(2s+1)(5s+1)}$

3-9 已知控制系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t} ;$$

试确定系统的阻尼比 ζ 和自然频率 ω_n 。

解：因为：系统的单位脉冲响应 $k(t)$ 的象函数为系统传递函数 $\Phi(s)$ ，故可以通过对 $k(t)$ 求拉氏变换得到系统传递函数 $\Phi(s)$ ，而 $k(t)$ 与单位阶跃响应成 D 关系：

$$k(t) = h'(t) = -12e^{-60t} + 12e^{-10t} = 12(e^{-10t} - e^{-60t})$$

故 $G(s) = L[k(t)] = 12 \left[\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+60} \right] = \frac{600}{s^2 + 70s + 600} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$

可见: $\omega_n = \sqrt{600} = 24.5$; $\zeta = 70 / (2 \cdot 24.5) = 1.43$