

## 夏学期第二周作业参考答案

5-7 已知系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125s)^2}$ 。试：(1)

绘制闭环系统的根轨迹图( $K_0 > 0$ )； (2) 确定闭环系统稳定  $K_0$  值范围。

答案：

传递函数改写为：

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125s)^2} = \frac{640K_0}{(s+2)(s+5)(s+8)^2} \\ &= \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+8)^2} \end{aligned}$$

(1) 开环极点：  $n=4$ ,  $p_1=-2$ ,  $p_2=-5$ ,  $p_3=p_4=-8$

开环零点：  $w=0$

(2) 实轴上的根轨迹：  $[-2, -5]$

(3) 渐近线：  $\gamma = \frac{(1+2n)\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^4 (p_i)}{4} = \frac{-2-5-8-8}{4} = -5.75$$

(4) 实轴上的分离点：

$$\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} + \frac{2}{d+8} = 0 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -6.17 (\text{abandoned}) \\ d_2 = -3.1 \end{cases}$$

(5) 与虚轴的交点： 可以用两种方法。这里采用劳斯判据：

$$1 + G(s)H(s) = (s+2)(s+5)(s+8)^2 + K = s^4 + 23s^3 + 186s^2 + 608s + 640 + K = 0$$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 186 & 640 + K \\ s^3 & 23 & 608 & \\ s^2 & \frac{186 \times 23 - 608}{23} = 159.6 & 640 + K & \\ s & \frac{159.6 \times 608 - (640 + K) \times 23}{159.6} & & \end{array}$$

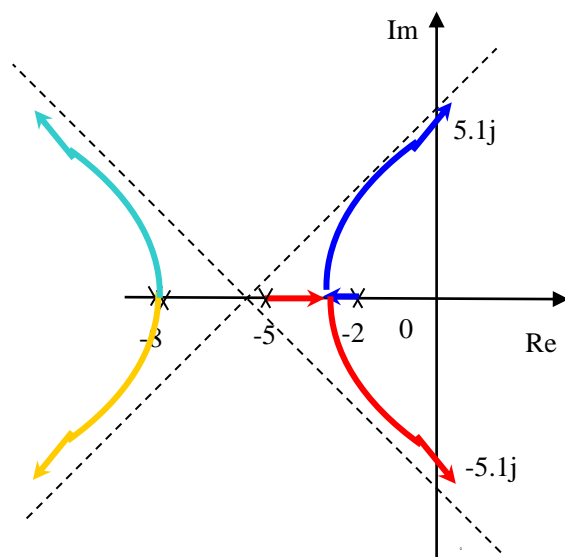
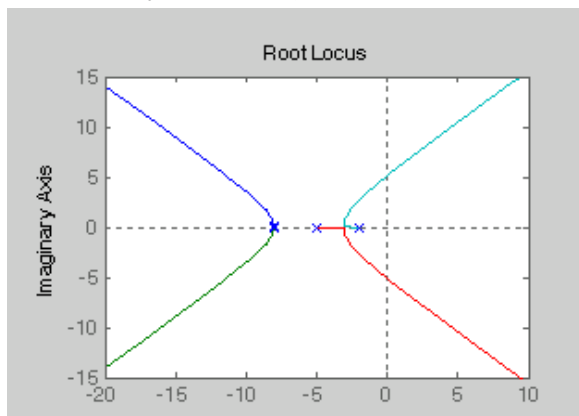
由  $s^1$  行为零可得

$$159.6 \times 608 - 23(640 + K) = 0 \Rightarrow K \approx 3578 \Rightarrow K_0 \approx 5.6$$

由  $s^2$  行：

$$159.6s^2 + 640 + K = 0 \Rightarrow s^2 = -26.4 \text{ 可以求出与虚轴交点: } s_{1,2} = \pm j5.1$$

因此当  $-1 < K_0 < 5.6$ , 系统稳定。



**5-8** 设单位负反馈控制系统的开环传递函数如下, 要求:

(1) 确定  $G(s) = \frac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$  产生纯虚根为  $\pm j1$  的  $z$  值和  $K^*$  值;

(2) 概略绘出  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$  的闭环根轨迹图 (要求确定根

轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点)。

答案:

(1) 该系统的闭环特征方程为:

$$s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$$

将系统纯虚根  $\pm j1$  代入闭环特征方程可得:

$$\begin{cases} 1 - j30 - 200 + jK^* + K^*z = 0 \\ 1 + j30 - 200 - jK^* + K^*z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K^* = 30 \\ z = \frac{199}{30} \end{cases}$$

(2)

① 系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为：  $p_1=0$ ，  $p_2=-1$ ，  $p_3=-3.5$ ，  $p_{4,5}=-3\pm j2$

② 实轴上的根轨迹区间为：  $[-\infty, -3.5]$ ，  $[-1, 0]$

③ 根轨迹渐近线有  $n-m=5$  条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：  $\sigma_a = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 p_i = -2.1$ ，与

实轴的交角为：  $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{5} = \pm 36^\circ, \pm 108^\circ, 180^\circ$

④ 根轨迹的分离点方程：  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3.5} + \frac{1}{d+3+j2} + \frac{1}{d+3-j2} = 0$ ，用试探法求得

分离点为：  $d \approx -0.4$ ，分离角为：  $\frac{(2k+1)\pi}{l} = \pm \frac{\pi}{2}$

⑤ 根轨迹的起始角：

$$\theta_{p_4} = 180^\circ + \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^5 \angle(p_4 - p_j)\right) = 180^\circ - (146^\circ + 136^\circ + 76^\circ + 90^\circ) = -268^\circ, \quad \theta_{p_5} = 268^\circ$$

⑥ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^5 + 10.5s^4 + 43.5s^3 + 79.5s^2 + 45.5s + K^* = 0$$

将  $s = j\omega$  代入，并使  $\operatorname{Re}[D(j\omega)] = 0, \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$ ，得

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ K^* = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{2,3} = \pm 1.034 \\ K^* = 73.04 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{4,5} = \pm 6.514 \\ K^* = -15530 \end{cases}$$

因为  $\omega = \omega_{4,5}$  时， $K^* < 0$ ，所以  $\omega_{4,5}$  不是所求根轨迹与虚轴的交点，根轨迹和虚轴的交点

为  $\omega_1$  和  $\omega_{2,3}$ 。

系统的闭环根轨迹图如图所示：

