

## 第五周作业参考答案

**2-9** 图 2-85 所示为三个储槽组成的系统，其中  $Q_i$  为输入变量， $h_3$  为输出变量。试建立该系统下列三种形式的数学模型。（1）微分方程式；（2）传递函数；（3）状态空间模型。其中  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  分别为三只阀线性化后的阻力系数。 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  为三只储槽的截面积。

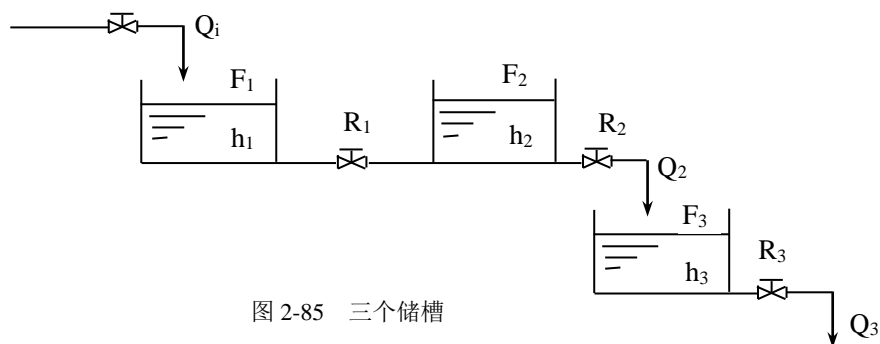


图 2-85 三个储槽

解：（1）微分方程式：

$$F_1 R_1 F_2 R_2 F_3 R_3 \frac{d^3 h_3}{dt^3} + (F_1 R_1 F_2 R_2 + F_1 R_1 F_3 R_3 + F_2 R_2 F_3 R_3 + F_1 R_2 F_3 R_3) \frac{d^2 h_3}{dt^2} + (F_1 R_1 + F_2 R_2 + F_3 R_3 + F_1 R_2) \frac{dh_3}{dt} + h_3 = R_3 Q_i$$

（2）传递函数：若令：

$$a_0 = F_1 R_1 F_2 R_2 F_3 R_3$$

$$a_1 = F_1 R_1 F_2 R_2 + F_1 R_1 F_3 R_3 + F_2 R_2 F_3 R_3 + F_1 R_2 F_3 R_3$$

$$a_2 = F_1 R_1 + F_2 R_2 + F_3 R_3 + F_1 R_2$$

则 
$$G(s) = \frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_3}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$$

（3）状态空间模型

$$\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R_3}{a_0} \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

**2-12** 图 2-88 表示弹簧阻尼器系统，图中， $f$  表示粘性摩擦系数， $k$  表示弹簧刚度。试列写输入位移  $x_i$  与输出位移  $x_o$  之间的微分方程式。（相似系统不需要证明）

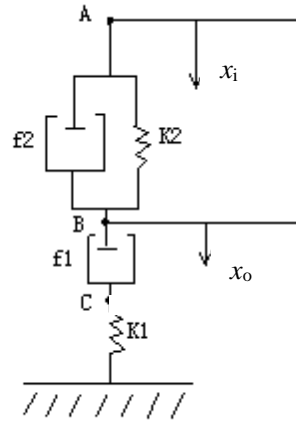


图 2-88 弹簧阻尼器系统

解：  $F_{f2} + F_{k2} = F_B = F_C$

设 C 点的位移为  $x_c$ ，方向向下。则  $F_B = F_{f1} = f_1(\dot{x}_c - \dot{x}_o)$ ，  $F_C = k_1 x_c$

$$F_{f2} = f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o), \quad F_{k2} = k_2(x_i - x_o)$$

利用  $F_B = F_C$  将  $x_c$  用  $x_o$  表示，回代入  $F_{f2} + F_{k2} = F_B = F_C$ ，得到输入位移  $x_i$  与

输出位移  $x_o$  之间的微分方程式为

$$f_1 f_2 \ddot{x}_o + (f_1 k_2 + f_1 k_1 + f_2 k_1) \dot{x}_o + k_1 k_2 x_o = f_1 f_2 \ddot{x}_i + (f_1 k_2 + f_2 k_1) \dot{x}_i + k_1 k_2 x_i$$

**2-33** 设弹簧特性由下式描述：  $F = 12.65y^{1.1}$

其中， $F$  是弹簧力， $y$  是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近作微小变化，试推导  $\Delta F$  的线性化方程。

解：根据题意，我们在  $y=0.25$  附近将  $F$  展开为泰勒级数，并取一次项近似，则有

$$F \approx F_0 + \dot{F} \Big|_{y=0.25} (y - 0.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= F - F_0 = \dot{F} \Big|_{y=0.25} (y - 0.25) = 12.65 \times 1.1 \times 0.25^{0.1} (y - 0.25) \\ &= 12.11(y - 0.25) = 12.11\Delta y \end{aligned}$$