

夏学期第四周作业参考答案

第一题 5-15 设系统的框图如图 5-44 所示。

- (1) 绘制 $\alpha=0.5$ 时的根轨迹;
- (2) 求 $\alpha=0.5, K=10$ 时的系统的闭环极点与相应的 ζ 值;
- (3) 求在 $K=1$ 时, α 分别等于 0, 0.5, 4 的阶跃响应的 $\sigma\%$ 与 T_s , 并讨论 α 值大小对动态性能的影响。

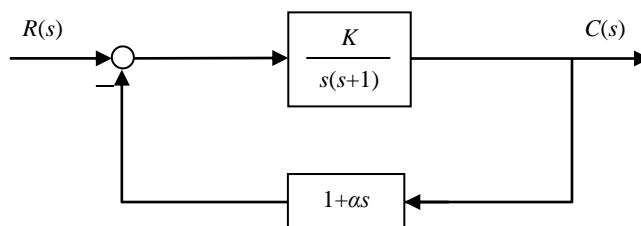


图 5-44 题 5-15 系统框图

解: 系统的特征方程 $s^2 + s + k(1 + \alpha s) = 0$

当 $\alpha=0.5$ 时有: $1 + \frac{0.5k(s+2)}{s(s+1)} = 0$

(1) $G_e(s)$ 中开环极点: $S_1 = 0$ $S_2 = -1$; 开环零点为: $S_3 = -2$

(2) 根轨迹关于实轴对称, 实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$

(3) 渐进线有一条, 为实轴

(4): 出射角: $s_1 = 0$ $\varphi_1 = 180^\circ$
 $s_2 = -1$ $\varphi_2 = 0^\circ$

(5): 与虚轴的交点

有其特征方程: 把 $j\omega_0$ 带入 $s^2 + (2+K\alpha)s + K = 0$

有实部虚部分别相等 $\begin{matrix} K - \omega_0^2 = 0 \\ (2 + 0.5K)\omega_0 = 0 \end{matrix}$ 可得: $\omega_0 = 0$; $K=0$

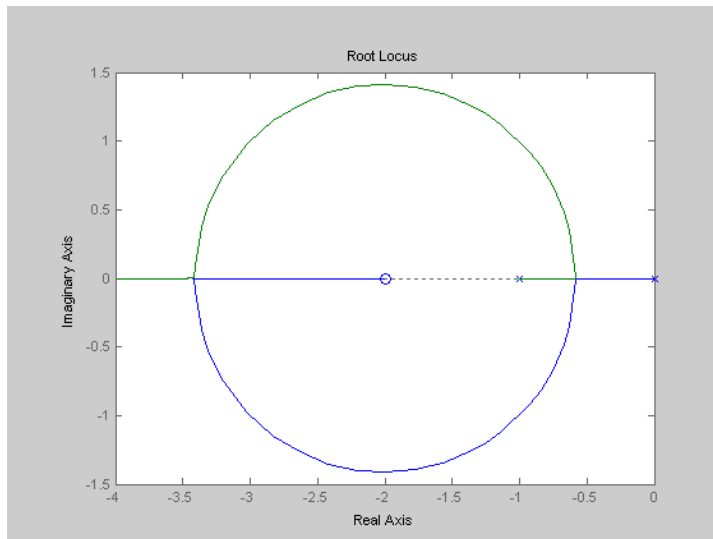
(6) 可能的分离点:

$$b(s) \frac{da(s)}{ds} - a(s) \frac{db(s)}{ds} = 0$$

已知: $a(s) = s^2 + s$, $b(s) = 0.5s + 1$, 入解得: $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$

经相位条件检验可知: $s_{1,2}$ 满足条件。所以分离点为: $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$

综上所述, 可得根轨迹草图为:



(2) 当 $\alpha=0.5, K=10$ 时 特征方程 $s^2 + 6s + 10 = 0$

极点 $s_{1,2} = -3 \pm j$

令 $S = -\alpha \pm j\beta$ 则有 $\alpha=3; \beta=1$

$\therefore \alpha = \zeta\omega_0 = 3$

$$\beta = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = 1 \quad \text{解之得: } \zeta = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.949$$

(3) 当 $K=1$ 时 $\Phi(S) = \frac{1}{S^2 + (1+\alpha)S + 1}$

当: $\alpha = 0$ 时

$$\Phi(S) = \frac{1}{S^2 + S + 1}$$

所以:

$$2\zeta\omega_0 = 1$$

$$\omega_0^2 = 1 \quad \text{解得:}$$

$$\zeta = 0.5; \omega_0 = 1$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_0} = 6$$

当: $\alpha = 0.5$ 时

$$\Phi(S) = \frac{1}{S^2 + 1.5S + 1}$$

所以:

$$2\zeta\omega_0 = 1.5$$

$$\omega_0^2 = 1 \quad \text{解得:}$$

$$\zeta = 0.75; \omega_0 = 1$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 2.8\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_0} = 4$$

当: $\alpha = 4$ 时 $\Phi(S) = \frac{1}{S^2 + 5S + 1}$

所以: $2\zeta\omega_0 = 5$

$$\omega_0^2 = 1 \quad \text{解得: } \zeta = 2.5; \omega_0 = 1$$

此时系统不振荡。

第二题 5-17

设负反馈控制系统中，前向通道传递函数 $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}$ ($K^* > 0$)，

$H(s) = 1$ 。

- (1) 概略绘出系统的根轨迹图，并判断闭环系统的稳定性；
- (2) 如果改变反馈通道的传递函数，使 $H(s) = 1 + 2s$ ，试判断 $H(s)$ 改变后的系统稳定性，研究由于 $H(s)$ 改变所产生的效应。

解：(1) 绘制根轨迹图

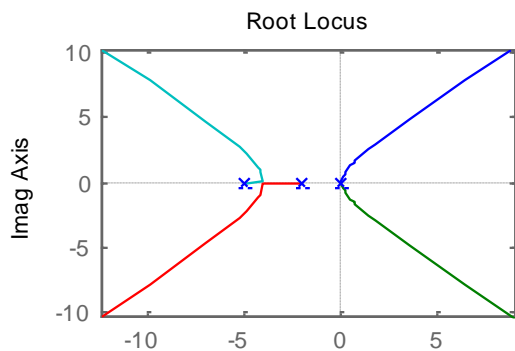
系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为： $p_1 = p_2 = 0$ ， $p_3 = -2$ ， $p_4 = -5$

实轴上根轨迹区间为： $[-5, -2]$

根轨迹有 4 条渐近线，且 $\sigma_a = -1.75$ ， $\varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

根轨迹的分离点 d ： $\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$ ， $d = -4$ ， 分离角 $\frac{(2k+1)\pi}{l} = \pm \frac{\pi}{2}$

概略绘制系统根轨迹：



(2) $H(s) = 1 + 2s$ 时，分析系统根轨迹

系统开环传递函数为： $G(s)H(s) = \frac{K_1^*(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)}$ ， 其中 $K_1^* = 2K^*$ ， $H(s)$ 的改变使系统增加

了一个开环零点。

系统开环有限零点： $z_1 = -0.5$ ， 系统的开环有限极点为： $p_1 = p_2 = 0$ ， $p_3 = -2$ ， $p_4 = -5$

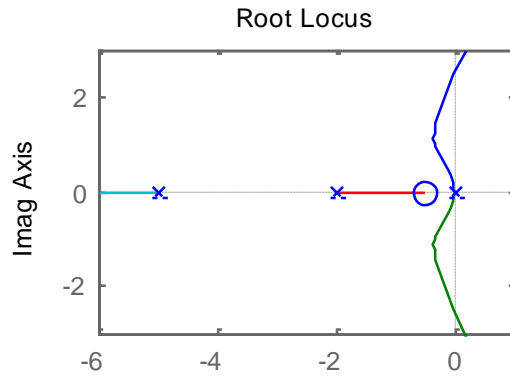
实轴上的根轨迹区间为： $(-\infty, -5)$ ， $[-2, -0.5]$

根轨迹有 3 条渐近线， $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^4 p_i - z_1}{3} = -2.17$ ， $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$

根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为 $D(s) = s^4 + 7s^3 + 10s^2 + 2K^*s + K^* = 0$ ，由劳思表

可解得根轨迹与虚轴得交点为： $s_{1,2} = \pm j2.55, K^* = 22.75$ 。

概略绘制系统根轨迹如下：



由图知：当 $0 < K^* < 22.75$ 时，闭环系统稳定。

附加得开环零点 $z_1 = -0.5$ ，使系统的根轨迹向 s 平面的左半平面弯曲，因而闭环系统可在 K^* 的一定范围内稳定，改善了系统的稳定性。

第三题 5-22 设负反馈控制系统的前向通道传递函数 $G_x(s)$ 和反馈通道传递函数 $H_s(s)$ 分别为

$$G_x(s) = \frac{K_x}{s(s+1)(s+5)}; \quad H_s(s) = \frac{K_h(s+5)}{s+2}$$

- (1) 确定使闭环系统单位阶跃响应的稳态输出为 1 的 K_h 值；
- (2) 确定使闭环复数极点具有 $\zeta = 0.65$ 的 $K_x K_h$ 值；
- (3) 计算系统的 M_p, T_p, T_s 。

解：开环传递函数为：

$$G_x(s)H_s(s) = \frac{K_x}{s(s+1)(s+5)} \cdot \frac{K_h(s+5)}{s+2} = \frac{K_x K_h (s+5)}{s(s+1)(s+5)(s+2)}$$

$$= \frac{K_x K_h}{s(s+1)(s+2)}; \text{ note: } -5 \text{ is a closed-loop pole}$$

闭环传递函数 $C(s)/R(s)$:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_x(s)}{1 + G_x(s)H_s(s)} = \frac{\frac{K_x}{s(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{K_x K_h (s+5)}{s(s+1)(s+5)(s+2)}} = \frac{K_x(s+2)}{(s+5)[s(s+1)(s+2) + K_x K_h]}$$

- (1) K_h 对单位阶跃响应稳态输出为 1 $c(\infty) = 1$

$$C(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_x(s+2)}{(s+5)[s(s+1)(s+2) + K_x K_h]} = \frac{2K_x}{5K_x K_h} = \frac{2}{5K_h} = 1$$

因此， $K_h = 0.4$

- (2) 绘制根轨迹确定 $\zeta = 0.65$ 的根

(1) 开环极点： $n=3, p_1=0, p_2=-1, p_3=-2$

开环零点： $w=0$

(2) 实轴上的根轨迹： $[0, -1], [-2, -\infty]$

(3) 渐近线: $\gamma = \frac{(1+2n)\pi}{3} = \pm 60^\circ, \pi$

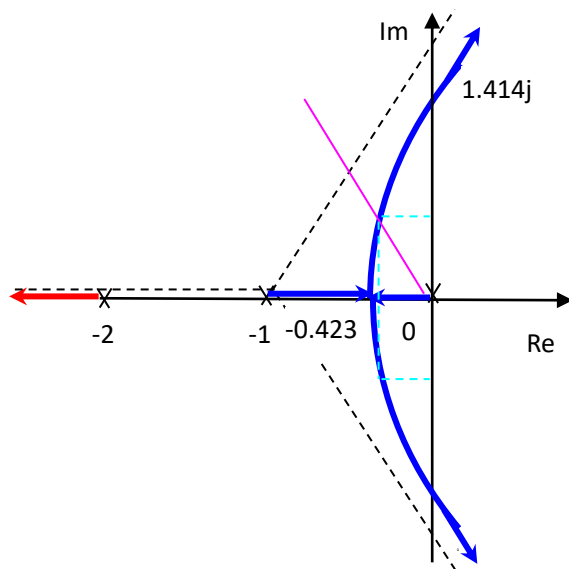
$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^3 \operatorname{Re}(p_i)}{3} = -1$$

(4) 实轴上的分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -0.423 \\ d_2 = -1.577(\text{abandon}) \end{cases}$

(5) 与虚轴的交点:

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} w^3 = w \\ K_x K_h = 3w^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \pm \sqrt{2} \\ K_x K_h = 6 \end{cases}$$

对 $\zeta = 0.65$, $\eta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1} 0.65 = 49.5^\circ$



共轭复根为 $-0.368 + j0.431, -0.368 - j0.431$

有幅值条件计算 $K_x K_h$:

$$K_x K_h = |s - p_1| \cdot |s - p_2| \cdot |s - p_3| = 0.731$$

(3) 由共轭复根 $-0.368 + j0.431, -0.368 - j0.431$ 可以求出

$$T_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = \frac{3.5}{0.368} = 9.51 \quad \sigma\% = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\% = 6.8\%$$

$$M_p = 1 + 0.068 = 1.068$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0.431} = 7.285$$

