数学知识点总结

引言

1. 课程内容：

必修课程 由 5 个模块组成：

必修 1：集合、函数概念与基本初等函数（指、对、幂函数）

必修 2：立体几何初步、平面解析几何初步。

必修 3：算法初步、统计、概率。

必修 4：基本初等函数（三角函数）、平面向量、三角恒等变换。

必修 5：解三角形、数列、不等式。

以上是每一个高中学生所必须学习的。

上述内容覆盖了高中阶段传统的数学基础知识和基本技能的主要部分，其中包括集合、函数、数列、不等式、解三角形、立体几何初步、平面解析几何初步等。不同的是在保证打好基础的同时，进一步强调了这些知识的发生、发展过程和实际应用，而不在技巧与难度上做过高的要求。

此外，基础内容还增加了向量、算法、概率、统计等内容。

选修课程 有 4 个系列：

系列 1：由 2 个模块组成。

选修 1—1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

选修 1—2：统计案例、推理与证明、数系的扩充与复数、框图

系列 2：由 3 个模块组成。

选修 2—1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、

空间向量与立体几何。

选修 2—2：导数及其应用，推理与证明、数系的扩充与复数

选修 2—3：计数原理、随机变量及其分布列，统计案例。

系列 3：由 6 个专题组成。

选修 3—1：数学史选讲。

选修 3—2：信息安全与密码。

选修 3—3：球面上的几何。

选修 3—4：对称与群。

选修 3—5：欧拉公式与闭曲面分类。

选修 3—6：三等分角与数域扩充。

系列 4：由 10 个专题组成。

选修 4—1：几何证明选讲。

选修 4—2：矩阵与变换。

选修 4—3：数列与差分。

选修 4—4：坐标系与参数方程。

选修 4—5：不等式选讲。

选修 4—6：初等数论初步。

选修 4—7：优选法与试验设计初步。

选修 4—8：统筹法与图论初步。

选修 4—9：风险与决策。

选修 4—10：开关电路与布尔代数。

2. 重难点及考点：

重点：函数，数列，三角函数，平面向量，圆锥曲线，立体几何，导数

难点： 函数、圆锥曲线

高考相关考点：

⑴集合与简易逻辑 :集合的概念与运算、简易逻辑、充要条件

⑵函数：映射与函数、函数解析式与定义域、值域与最值、反函数、三大性质、函数图象、指数与指数函数、对数与对数函数、函数的应用

⑶数列：数列的有关概念、等差数列、等比数列、数列求和、数列的应用

⑷三角函数：有关概念、同角关系与诱导公式、和、差、倍、半公式、求值、化简、证明、三角函数的图象与性质、三角函数的应用

⑸平面向量：有关概念与初等运算、坐标运算、数量积及其应用

⑹不等式：概念与性质、均值不等式、不等式的证明、不等式的解法、绝对值不等式、不等式的应用

⑺直线和圆的方程：直线的方程、两直线的位置关系、线性规划、圆、直线与圆的位置关系

⑻圆锥曲线方程：椭圆、双曲线、抛物线、直线与圆锥曲线的位置关系、轨迹问题、圆锥曲线的应用

⑼直线、平面、简单几何体：空间直线、直线与平面、平面与平面、棱柱、棱锥、球、空间向量

⑽排列、组合和概率：排列、组合应用题、二项式定理及其应用

⑾概率与统计：概率、分布列、期望、方差、抽样、正态分布

⑿导数：导数的概念、求导、导数的应用

⒀复数：复数的概念与运算

高中数学 必修 1 知识点

第一章 集合与函数概念

〖1.1 〗集合

【1.1.1 】集合的含义与表示

（1）集合的概念

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性 .

（2）常用数集及其记法

N 表示自然数集， N^* 或 N_+ 表示正整数集， Z 表示整数集， Q 表示有理数集， R 表示实数集 .

（3）集合与元素间的关系

对象 a 与集合 M 的关系是 $a\in M$ ，或者 $a\notin M$ ，两者必居其一 .

（4）集合的表示法

①自然语言法：用文字叙述的形式来描述集合 .

②列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合 .

③描述法： $\{x|\ x$ 具有的性质 $\}$，其中 x 为集合的代表元素 .

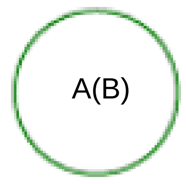
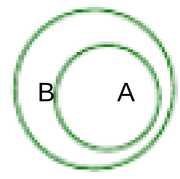
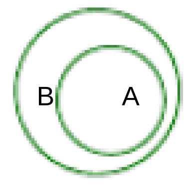
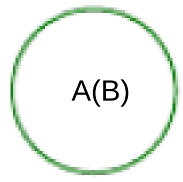
④图示法：用数轴或韦恩图来表示集合 .

（5）集合的分类

①含有有限个元素的集合叫做有限集 . ②含有无限个元素的集合叫做无限集 . ③不含有任何元素的集合叫做空集 ($\varnothing$).

【1.1.2 】集合间的基本关系

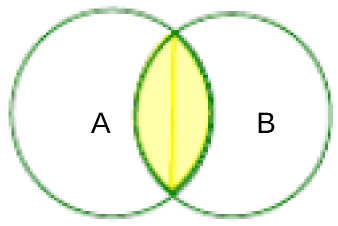
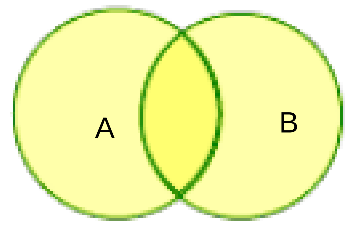
（6）子集、真子集、集合相等

名称	记号	意义	性质	示意图
子集	$A\subseteq B$ （或 $B\supseteq A$)	A 中的任一元素都属于 B	(1)$A\subseteq A$ (2)$\varnothing\subseteq A$ (3)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$ (4)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$	 或 
真子集	$A\subsetneqq B$ （或 $B\supsetneqq A$）	$A\subseteq B$，且 B 中至少有一元素不属于 A	（1） $\varnothing\subsetneqq A$（A 为非空子集） (2)若 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$	
集合相等	$A=B$	A 中的任一元素都属于 B，B 中的任一元素都属于 A	(1)$A\subseteq B$ (2)$B\subseteq A$	

（7）已知集合 A 有 $n(n\geq1)$ 个元素，则它有 2^n 个子集，它有 2^n-1 个真子集，它有 2^n-1 个非空子集，它有 2^n-2 非空真子集 .

【1.1.3 】集合的基本运算

（8）交集、并集、补集

名称	记号	意义	性质	示意图
交集	$A\cap B$	$\{x\mid x\in A$, 且 $x\in B\}$	（1） $A\cap A=A$ （2） $A\cap\varnothing=\varnothing$ （3） $A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$	
并集	$A\cup B$	$\{x\mid x\in A$, 或 $x\in B\}$	（1） $A\cup A=A$ （2） $A\cup\varnothing=A$ （3） $A\cup B\supseteq A$ $A\cup B\supseteq B$	
补集	$\complement_U A$	$\{x\mid x\in U$, 且 $x\notin A\}$	$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 1 $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$ 2 $A\cup(\complement_U A)=U$	

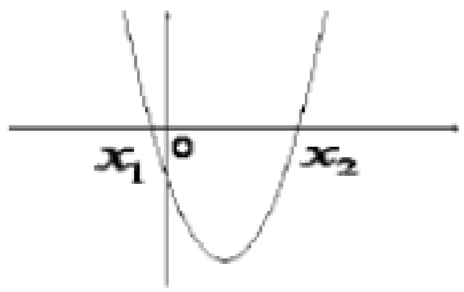
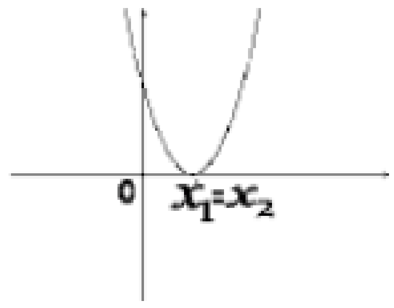
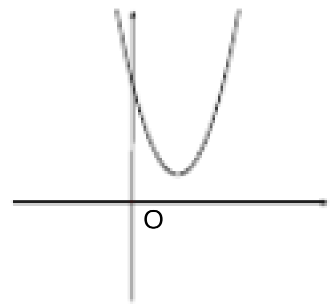
【补充知识】含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

（1）含绝对值的不等式的解法

不等式	解集
$\lvert x\rvert<a(a>0)$	$\{x\mid -a<x<a\}$
$\lvert x\rvert>a(a>0)$	$x\mid x<-a$ 或 $x>a\}$

$\lvert ax+b\rvert<c, \lvert ax+b\rvert>c(c>0)$	把 $ax+b$ 看成一个整体，化成 $\lvert x\rvert<a$，$\lvert x\rvert>a(a>0)$ 型不等式来求解

（2）一元二次不等式的解法

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（其中 $x_1<x_2$）	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

〖1.2〗函数及其表示

【1.2.1】函数的概念

（1）函数的概念

①设 A、B 是两个非空的数集，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么这样的对应（包括集合 A，B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做集合 A 到 B 的一个函数，记作 $f:A\to B$.

②函数的三要素：定义域、值域和对应法则.

③只有定义域相同，且对应法则也相同的两个函数才是同一函数.

（2）区间的概念及表示法

①设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，满足 $a\le x\le b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，记做 $[a,b]$；满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，记做 (a,b)；满足 $a\le x<b$，或 $a<x\le b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别记做 $[a,b)$，$(a,b]$；满足 $x\ge a, x>a, x\le b, x<b$ 的实数 x 的集合分别记做 $[a,+\infty), (a,+\infty), (-\infty,b], (-\infty,b)$

注意：对于集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 与区间 (a,b)，前者 a 可以大于或等于 b，而后者必须

$a<b$，（前者可以不成立，为空集；而后者必须成立）.

（3）求函数的定义域时，一般遵循以下原则：

① $f(x)$ 是整式时，定义域是全体实数.

② $f(x)$ 是分式函数时，定义域是使分母不为零的一切实数.

③ $f(x)$ 是偶次根式时，定义域是使被开方式为非负值时的实数的集合.

④对数函数的真数大于零，当对数或指数函数的底数中含变量时，底数须大于零且不等于 1.

⑤ $y=\tan x$ 中，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

⑥零（负）指数幂的底数不能为零.

⑦若 $f(x)$ 是由有限个基本初等函数的四则运算而合成的函数时，则其定义域一般是各基本初等函数的定义域的交集.

⑧对于求复合函数定义域问题，一般步骤是：若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域应由不等式 $a\leq g(x)\leq b$ 解出.

⑨对于含字母参数的函数，求其定义域，根据问题具体情况需对字母参数进行分类讨论.

⑩由实际问题确定的函数，其定义域除使函数有意义外，还要符合问题的实际意义.

（4）求函数的值域或最值

求函数最值的常用方法和求函数值域的方法基本上是相同的．事实上，如果在函数的值域中存在一个最小（大）数，这个数就是函数的最小（大）值．因此求函数的最值与值域，其实质是相同的，只是提问的角度不同．求函数值域与最值的常用方法：

①观察法：对于比较简单的函数，我们可以通过观察直接得到值域或最值.

②配方法：将函数解析式化成含有自变量的平方式与常数的和，然后根据变量的取值范围确定函数的值域或最值.

③判别式法：若函数 $y=f(x)$ 可以化成一个系数含有 y 的关于 x 的二次方程 $a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$，则在 $a(y)\neq 0$ 时，由于 x,y 为实数，故必须有 $\Delta=b^2(y)-4a(y)\cdot c(y)\geq 0$，从而确定函数的值域或最值.

④不等式法：利用基本不等式确定函数的值域或最值.

⑤换元法：通过变量代换达到化繁为简、化难为易的目的，三角代换可将代数函数的最值问题转化为三角函数的最值问题.

⑥反函数法：利用函数和它的反函数的定义域与值域的互逆关系确定函数的值域或最值.

⑦数形结合法：利用函数图象或几何方法确定函数的值域或最值.

⑧函数的单调性法.

【1.2.2 】函数的表示法

（5）函数的表示方法

表示函数的方法，常用的有解析法、列表法、图象法三种.

解析法：就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系．列表法：就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系．图象法：就是用图象表示两个变量之间的对应关系.

（6）映射的概念

①设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的

元素和它对应，那么这样的对应（包括集合 A，B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做集合 A 到 B 的映射，记作 $f: A \to B$.

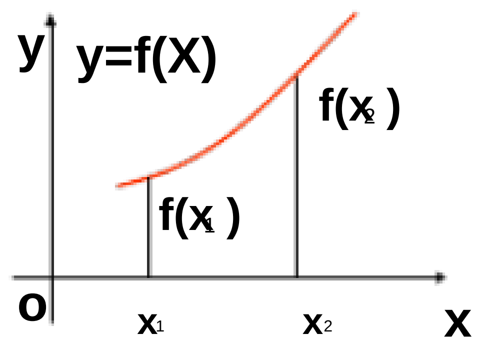
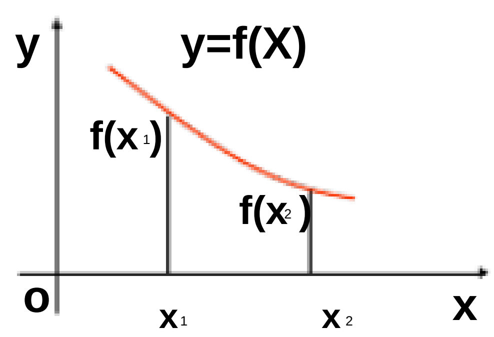
②给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a \in A, b \in B$．如果元素 a 和元素 b 对应，那么我们把元素 b 叫做元素 a 的象，元素 a 叫做元素 b 的原象.

〖1.3〗函数的基本性质

【1.3.1】单调性与最大（小）值

（1）函数的单调性

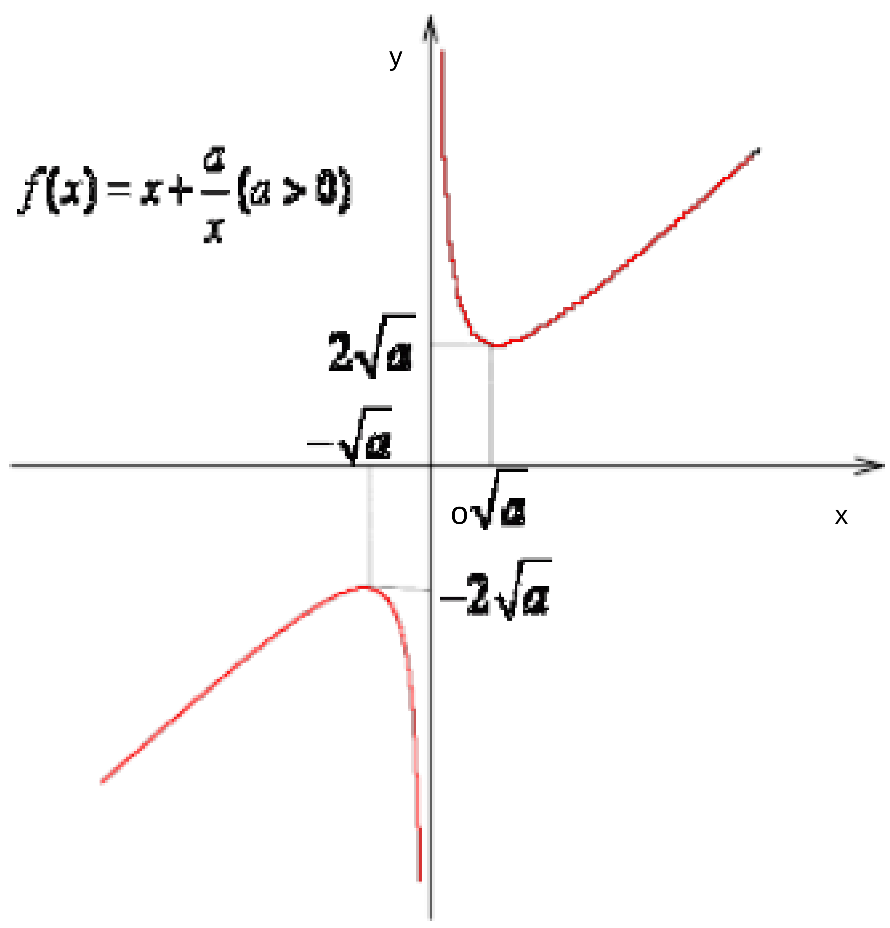
①定义及判定方法

函数的性质	定义	图象	判定方法
函数的单调性	如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那么就说 f(x) 在这个区间上是增函数．		（1）利用定义 （2）利用已知函数的单调性 （3）利用函数图象（在某个区间图象上升为增） （4）利用复合函数
	如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么就说 f(x) 在这个区间上是减函数．		（1）利用定义 （2）利用已知函数的单调性 （3）利用函数图象（在某个区间图象下降为减） （4）利用复合函数

②在公共定义域内，两个增函数的和是增函数，两个减函数的和是减函数，增函数减去一个减函数为增函数，减函数减去一个增函数为减函数.

③对于复合函数 $y = f[g(x)]$，令 $u = g(x)$，若 $y = f(u)$ 为增，$u = g(x)$ 为增，则 $y = f[g(x)]$ 为增；若 $y = f(u)$ 为减，$u = g(x)$ 为减，则 $y = f[g(x)]$ 为增；若 $y = f(u)$ 为增，$u = g(x)$ 为减，则 $y = f[g(x)]$ 为减；若 $y = f(u)$ 为减，$u = g(x)$ 为增，则 $y = f[g(x)]$ 为减.

（2）打“√”函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的图象与性质



$f(x)$ 分别在 $(-\infty, -\sqrt{a}]$、$[\sqrt{a}, +\infty)$ 上为增函数，分别在 $[-\sqrt{a}, 0)$、$(0, \sqrt{a}]$ 上为减函数.

（3）最大（小）值定义

①一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：（1）对于任意的 $x \in I$，都有 $f(x) \le M$；

（2）存在 $x_0 \in I$，使得 $f(x_0)=M$．那么，我们称 M 是函数 $f(x)$ 的最大值，记作 $f_{max}(x)=M$．

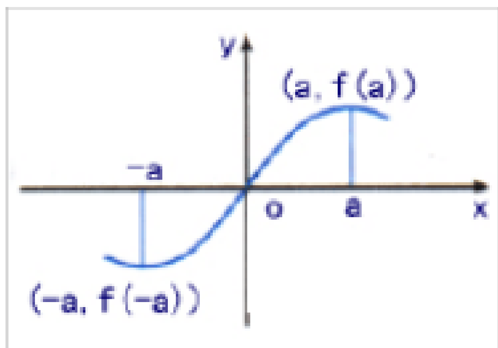
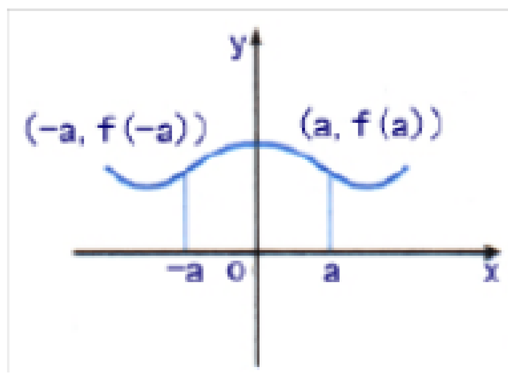
②一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 m 满足：（1）对于任意的 $x \in I$，都有 $f(x) \geq m$；

（2）存在 $x_0 \in I$，使得 $f(x_0)=m$．那么，我们称 m 是函数 $f(x)$ 的最小值，记作 $f_{max}(x)=m$．

【1.3.2 】奇偶性

（4）函数的奇偶性

①定义及判定方法

函数的性质	定义	图象	判定方法
函数的奇偶性	如果对于函数 f(x) 定义域内任意一个 x，都有 **f(－x)=－f(x)**，那么函数 f(x) 叫做奇函数．		（1）利用定义（要先判断定义域是否关于原点对称） （2）利用图象（图象关于原点对称）
	如果对于函数 f(x) 定义域内任意一个 x，都有 **f(－x)=f(x)**，那么函数 f(x) 叫做偶函数．		（1）利用定义（要先判断定义域是否关于原点对称） （2）利用图象（图象关于 y 轴对称）

②若函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$．

③奇函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相同，偶函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相反．

④在公共定义域内，两个偶函数（或奇函数）的和（或差）仍是偶函数（或奇函数），两个偶函数（或奇函数）的积（或商）是偶函数，一个偶函数与一个奇函数的积（或商）是奇函数．

〖补充知识〗函数的图象

（1）作图

利用描点法作图：

①确定函数的定义域； ②化解函数解析式；

③讨论函数的性质（奇偶性、单调性）； ④画出函数的图象．

利用基本函数图象的变换作图：

要准确记忆一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等各种基本初等函数的图象．

①平移变换

$$y=f(x)\xrightarrow[h<0,\text{右移}|h|\text{个单位}]{h>0,\text{左移}h\text{个单位}} y=f(x+h) \quad y=f(x)\xrightarrow[k<0,\text{下移}|k|\text{个单位}]{k>0,\text{上移}k\text{个单位}} y=f(x)+k$$

②伸缩变换

$$y=f(x)\xrightarrow[\omega>1,\text{缩}]{0<\omega<1,\text{伸}} y=f(\omega x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[A>1,\text{伸}]{0<A<1,\text{缩}} y=Af(x)$$

③对称变换

$y=f(x)\xrightarrow{x轴}y=-f(x)$ 　　　　$y=f(x)\xrightarrow{y轴}y=f(-x)$

$y=f(x)\xrightarrow{原点}y=-f(-x)$ 　　　　$y=f(x)\xrightarrow{直线y=x}y=f^{-1}(x)$

$y=f(x)\xrightarrow[保留y轴右边图象，并作其关于y轴对称图象]{去掉y轴左边图象}y=f(|x|)$

$y=f(x)\xrightarrow[将x轴下方图象翻折上去]{保留x轴上方图象}y=|f(x)|$

（2）识图

对于给定函数的图象，要能从图象的左右、上下分别范围、变化趋势、对称性等方面研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性，注意图象与函数解析式中参数的关系．

（3）用图

函数图象形象地显示了函数的性质，为研究数量关系问题提供了“形”的直观性，它是探求解题途径，获得问题结果的重要工具．要重视数形结合解题的思想方法．

第二章　基本初等函数（Ⅰ）

〖2.1〗指数函数

【2.1.1】指数与指数幂的运算

（1）根式的概念

①如果 $x^n=a,a\in R,x\in R,n>1$，且 $n\in N_+$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根．当 n 是奇数时，a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示；当 n 是偶数时，正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示；0 的 n 次方根是 0；负数 a 没有 n 次方根．

②式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数．当 n 为奇数时，a 为任意实数；当 n 为偶数时，$a\geq 0$．

③根式的性质：$(\sqrt[n]{a})^n=a$；当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$．

（2）分数指数幂的概念

①正数的正分数指数幂的意义是：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,m,n\in N_+,$ 且 $n>1)$．0 的正分数指数幂等于 0．

②正数的负分数指数幂的意义是：$a^{-\frac{m}{n}}=(\frac{1}{a})^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(\frac{1}{a})^m}\ (a>0,m,n\in N_+,$ 且 $n>1)$．0 的负分数指数幂没有意义．　注意口诀：底数取倒数，指数取相反数．

（3）分数指数幂的运算性质

① $a^r\cdot a^s=a^{r+s}\ (a>0,r,s\in R)$ 　　② $(a^r)^s=a^{rs}\ (a>0,r,s\in R)$

③ $(ab)^r=a^rb^r\ (a>0,b>0,r\in R)$

【2.1.2】指数函数及其性质

（4）指数函数

函数名称	指数函数
定义	函数 $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
过定点	图象过定点 $(0,1)$，即当 $x=0$ 时，$y=1$.	
奇偶性	非奇非偶	
单调性	在 R 上是增函数	在 R 上是减函数
函数值的变化情况	$a^x>1\ (x>0)$ $a^x=1\ (x=0)$ $a^x<1\ (x<0)$	$a^x<1\ (x>0)$ $a^x=1\ (x=0)$ $a^x>1\ (x<0)$
a 变化对 图象的影响	在第一象限内，a 越大图象越高；在第二象限内，a 越大图象越低.	

〖2.2〗对数函数

【2.2.1】对数与对数运算

（1）对数的定义

①若 $a^x=N(a>0,且a\neq 1)$，则 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做底数，N 叫做真数.

②负数和零没有对数.

③对数式与指数式的互化：$x=\log_a N \Leftrightarrow a^x=N(a>0,a\neq 1,N>0)$.

（2）几个重要的对数恒等式

$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$\log_a a^b=b$.

（3）常用对数与自然对数

常用对数：$\lg N$，即 $\log_{10} N$；自然对数：$\ln N$，即 $\log_e N$（其中 $e=2.71828,$）.

（4）对数的运算性质　如果 $a>0,a\neq 1,M>0,N>0$，那么

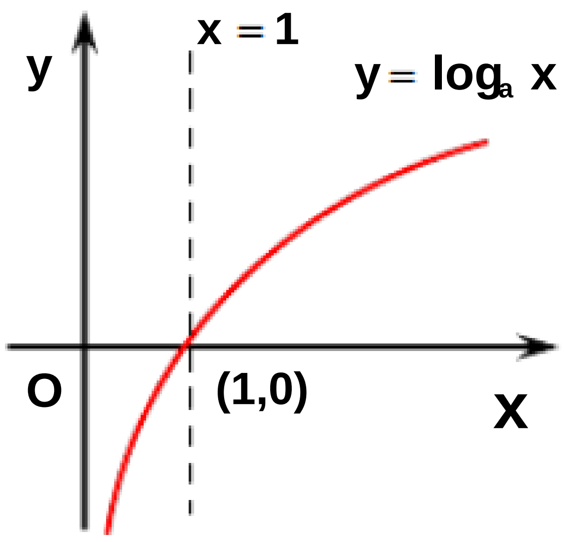
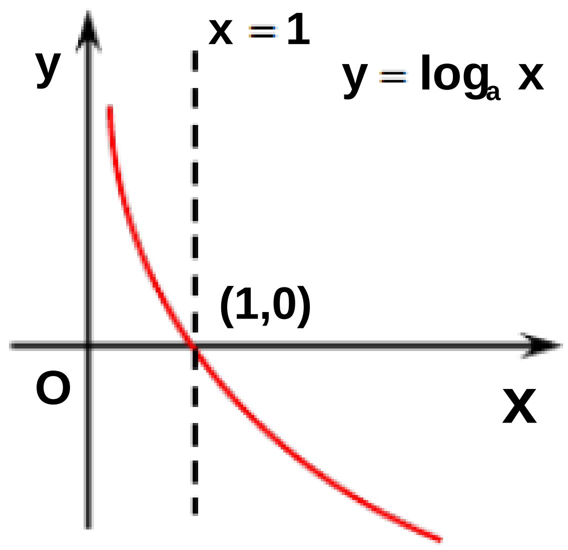
①加法：$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$　②减法：$\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$

③数乘：$n\log_a M=\log_a M^n(n\in R)$　④ $a^{\log_a N}=N$

⑤ $\log_{a^b} M^n = \frac{n}{b}\log_a M\ (b \neq 0, n \in R)$　⑥换底公式：$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}\ (b > 0, 且\ b \neq 1)$

【2.2.2 】对数函数及其性质

（5）对数函数

<table>
<tr><td>函数
名称</td><td colspan="2">对数函数</td></tr>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">函数 $y = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 叫做对数函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">图象</td><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2">$(0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">R</td></tr>
<tr><td>过定点</td><td colspan="2">图象过定点 $(1,0)$，即当 $x = 1$ 时，$y = 0$.</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td colspan="2">非奇非偶</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $(0, +\infty)$ 上是增函数</td><td>在 $(0, +\infty)$ 上是减函数</td></tr>
<tr><td>函数值的
变化情况</td><td>$\log_a x > 0\ (x > 1)$
$\log_a x = 0\ (x = 1)$
$\log_a x < 0\ (0 < x < 1)$</td><td>$\log_a x < 0\ (x > 1)$
$\log_a x = 0\ (x = 1)$
$\log_a x > 0\ (0 < x < 1)$</td></tr>
<tr><td>a 变化对 图象的影响</td><td colspan="2">在第一象限内，a 越大图象越靠低；在第四象限内，a 越大图象越靠高.</td></tr>
</table>

(6) 反函数的概念

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A，值域为 C，从式子 $y = f(x)$ 中解出 x，得式子 $x = \varphi(y)$．如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x = \varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么式子 $x = \varphi(y)$ 表示 x 是 y 的函数，函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$，习惯上改写成 $y = f^{-1}(x)$.

（7）反函数的求法

①确定反函数的定义域，即原函数的值域；②从原函数式 $y = f(x)$ 中反解出 $x = f^{-1}(y)$；

③将 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$，并注明反函数的定义域.

（8）反函数的性质

①原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

②函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域、定义域.

③若 $P(a,b)$ 在原函数 $y=f(x)$ 的图象上，则 $P'(b,a)$ 在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上.

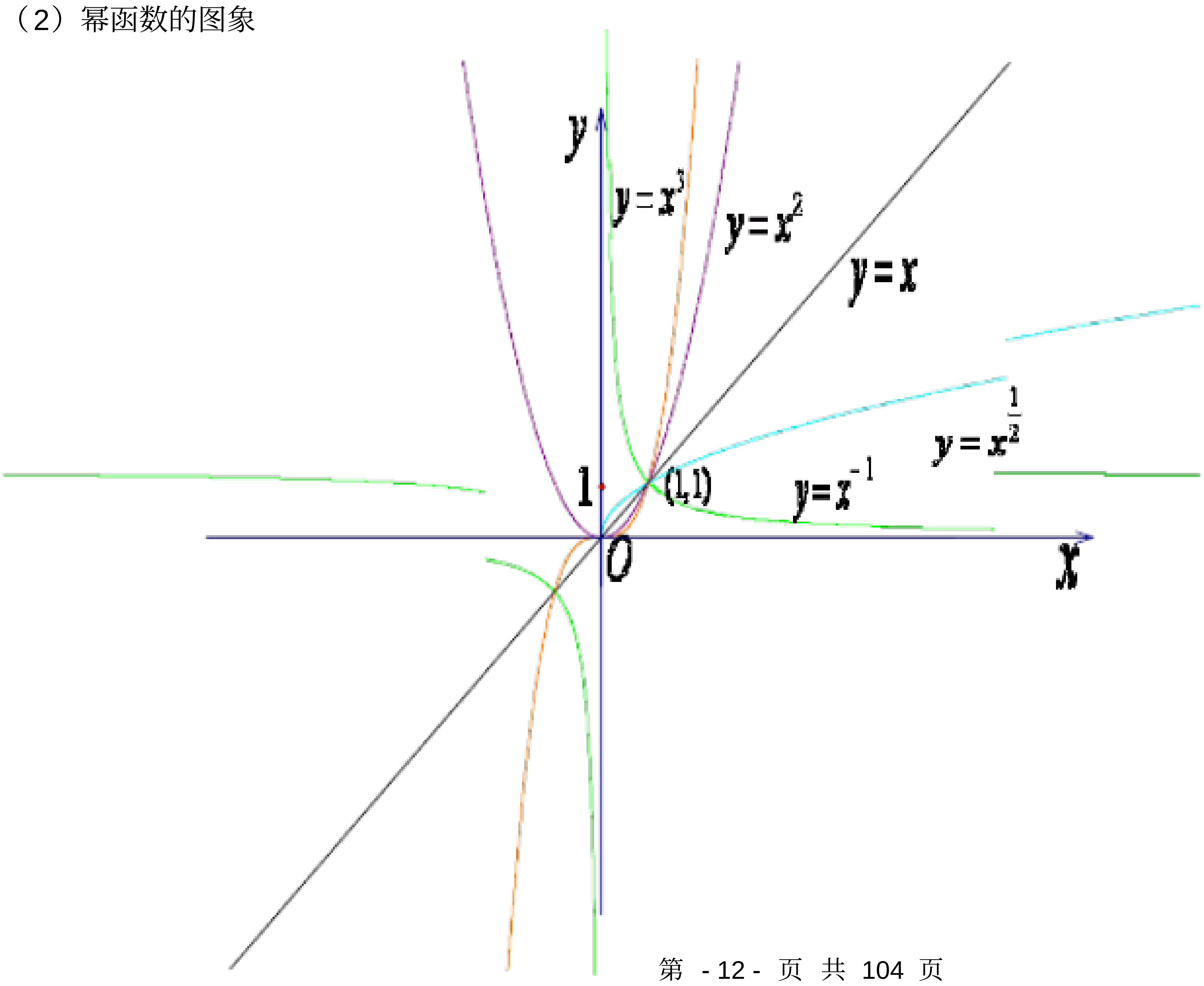
④一般地，函数 $y=f(x)$ 要有反函数则它必须为单调函数.

〖2.3〗幂函数

（1）幂函数的定义

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 为自变量，α 是常数.

（2）幂函数的图象



（3）幂函数的性质

①图象分布：幂函数图象分布在第一、二、三象限，第四象限无图象．幂函数是偶函数时，图象分布在第一、二象限(图象关于 y 轴对称)；是奇函数时，图象分布在第一、三象限(图象关于原点对称)；是非奇非偶函数时，图象只分布在第一象限．

②过定点：所有的幂函数在 $(0,+\infty)$ 都有定义，并且图象都通过点 $(1,1)$．

③单调性：如果 $\alpha>0$，则幂函数的图象过原点，并且在 $[0,+\infty)$ 上为增函数．如果 $\alpha<0$，则幂函数的图象在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，在第一象限内，图象无限接近 x 轴与 y 轴．

④奇偶性：当 α 为奇数时，幂函数为奇函数，当 α 为偶数时，幂函数为偶函数．当 $\alpha=\frac{q}{p}$（其中 p,q 互质，p 和 $q\in Z$），若 p 为奇数 q 为奇数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是奇函数，若 p 为奇数 q 为偶数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是偶函数，若 p 为偶数 q 为奇数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是非奇非偶函数．

⑤图象特征：幂函数 $y=x^{\alpha},x\in(0,+\infty)$，当 $\alpha>1$ 时，若 $0<x<1$，其图象在直线 $y=x$ 下方，若 $x>1$，其图象在直线 $y=x$ 上方，当 $\alpha<1$ 时，若 $0<x<1$，其图象在直线 $y=x$ 上方，若 $x>1$，其图象在直线 $y=x$ 下方．

〖补充知识〗二次函数

（1）二次函数解析式的三种形式

①一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ ②顶点式：$f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ ③两根式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$（2）求二次函数解析式的方法

①已知三个点坐标时，宜用一般式．

②已知抛物线的顶点坐标或与对称轴有关或与最大（小）值有关时，常使用顶点式．

③若已知抛物线与 x 轴有两个交点，且横线坐标已知时，选用两根式求 $f(x)$ 更方便．

（3）二次函数图象的性质

①二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$．

②当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，函数在 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上递减，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上递增，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$f_{min}(x)=\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数在 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上递增，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上递减，当 $x=-\frac{b}{2a}$

时， $f_{max}(x)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

③二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 当 $\Delta=b^2-4ac>0$时，图象与 x轴有两个交点

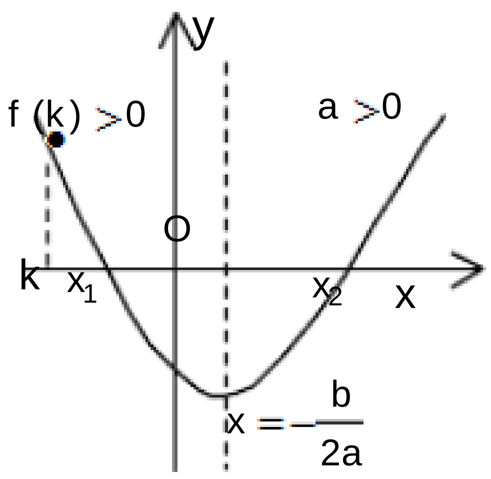
$$M_1(x_1,0),M_2(x_2,0),|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

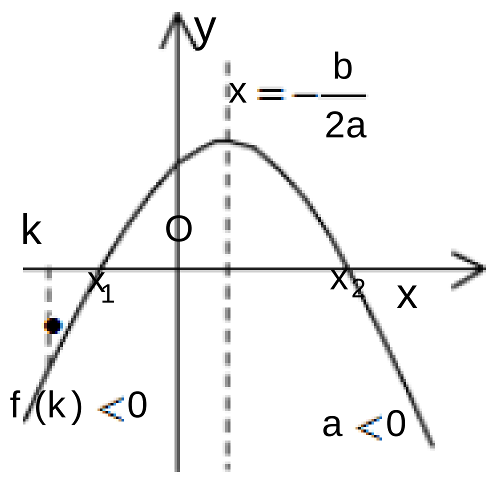
（4）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$根的分布

一元二次方程根的分布是二次函数中的重要内容，这部分知识在初中代数中虽有所涉及，但尚不够系统和完整，且解决的方法偏重于二次方程根的判别式和根与系数关系定理（韦达定理）的运用，下面结合二次函数图象的性质，系统地来分析一元二次方程实根的分布.

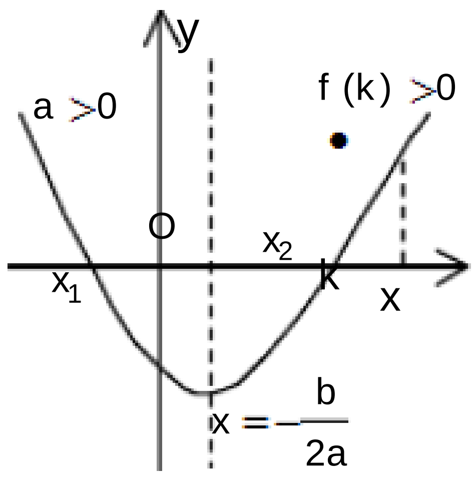
设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两实根为 x_1,x_2，且 $x_1\leq x_2$． 令 $f(x)=ax^2+bx+c$，从以下四个方面来分析此类问题：①开口方向： a ②对称轴位置： $x=-\dfrac{b}{2a}$ ③判别式： Δ ④端点函数值符号.

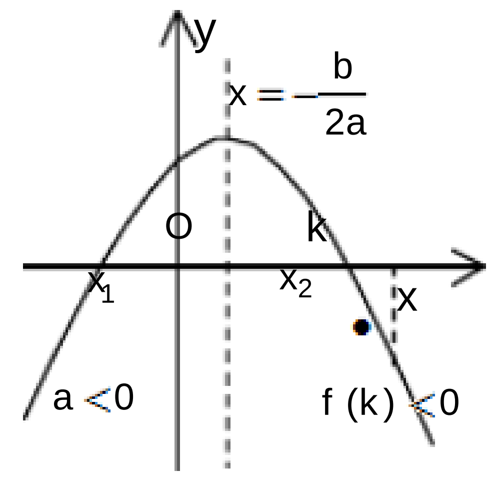
①$k<x_1\leq x_2$ $\Leftrightarrow$



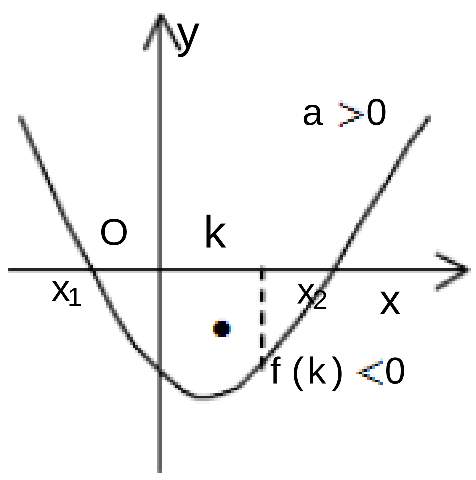


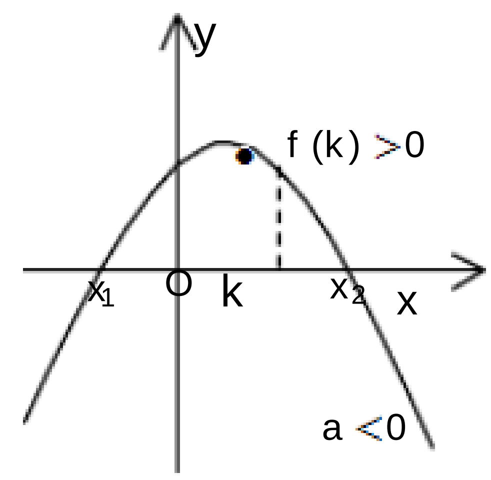
②$x_1\leq x_2<k$ $\Leftrightarrow$



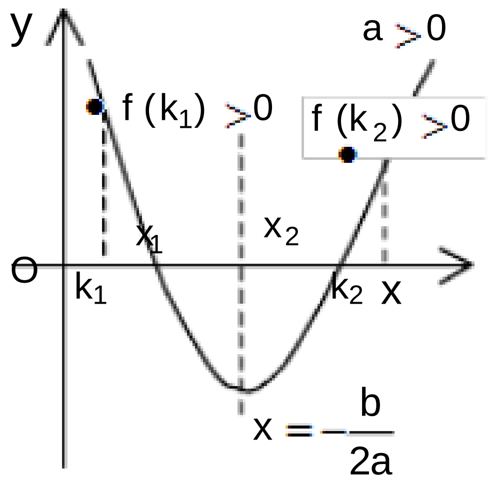


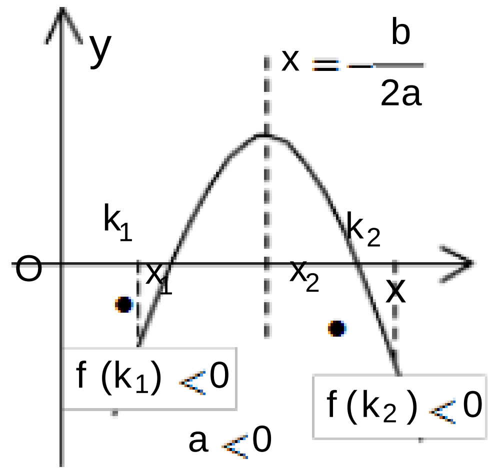
③$x_1<k<x_2$ $\Leftrightarrow$ $af(k)<0$



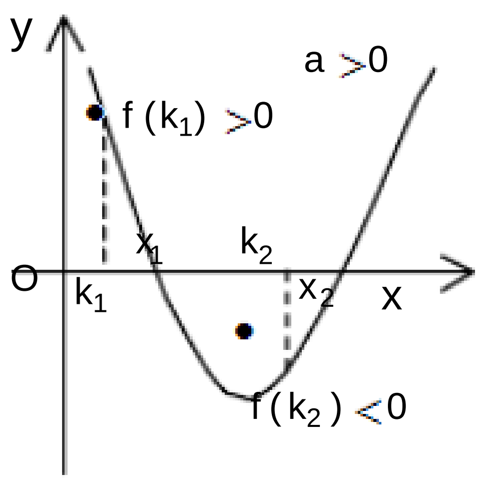


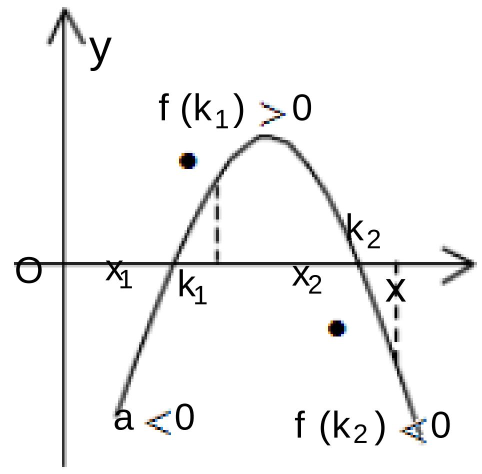
④$k_1<x_1\leq x_2<k_2$ $\Leftrightarrow$





⑤有且仅有一个根 x_1(或 x_2)满足 $k_1 < x_1$(或 x_2) $< k_2$ $\Leftrightarrow$ $f(k_1)f(k_2)<0$, 并同时考虑 $f(k_1)=0$ 或 $f(k_2)=0$ 这两种情况是否也符合





⑥ $k_1 < x_1 < k_2 \le p_1 < x_2 < p_2$ $\Leftrightarrow$

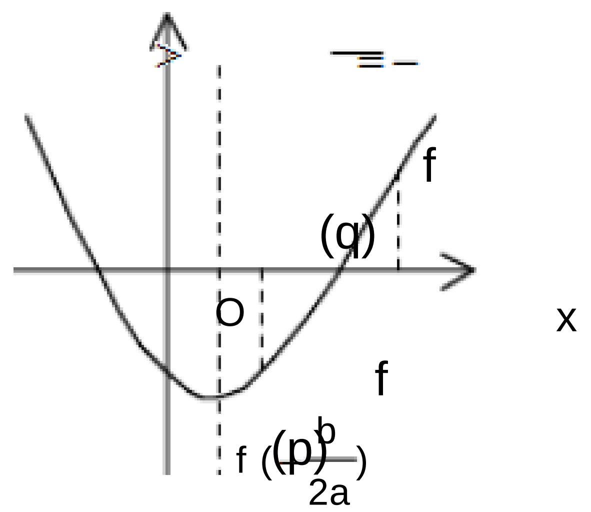
此结论可直接由⑤推出.

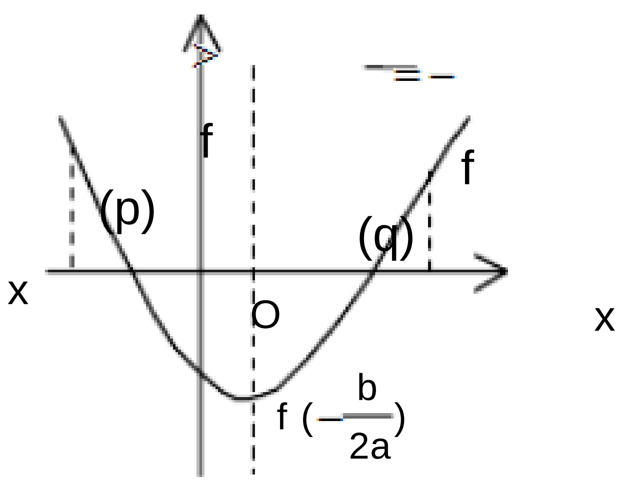
（5）二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值

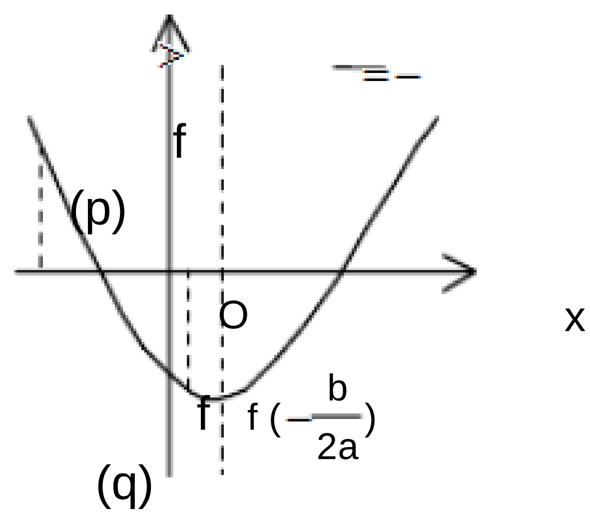
设 $f(x)$ 在区间 $[p,q]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，令 $x_0=\frac{1}{2}(p+q)$.

（Ⅰ）当 $a>0$ 时（开口向上）

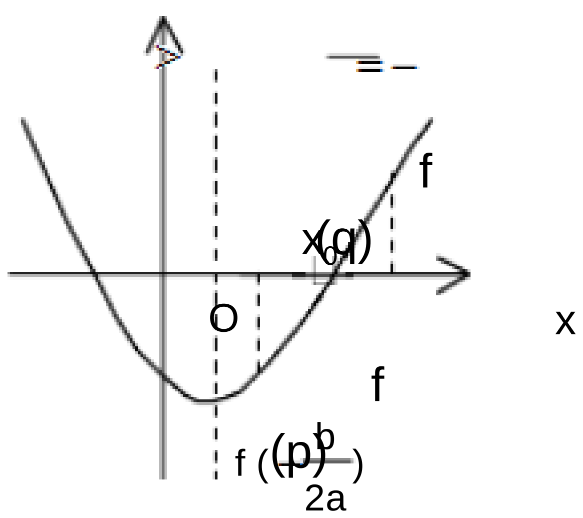
①若 $-\frac{b}{2a}<p$，则 $m=f(p)$ ②若 $p\le -\frac{b}{2a}\le q$，则 $m=f(-\frac{b}{2a})$ ③若 $-\frac{b}{2a}>q$，则 $m=f(q)$

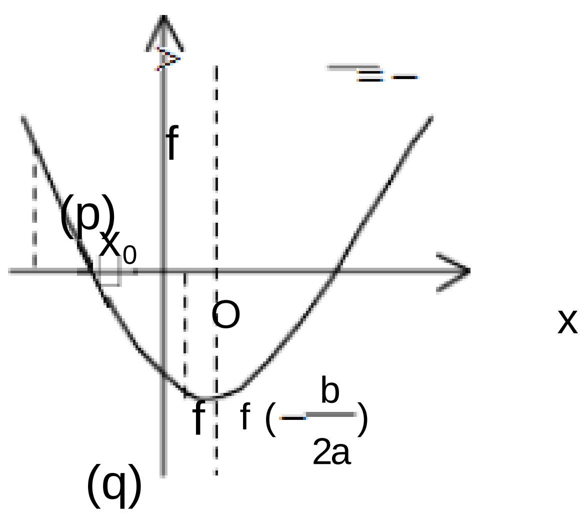






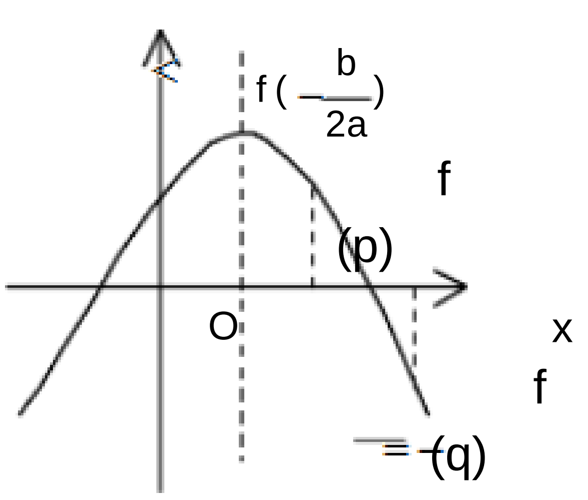
①若 $-\frac{b}{2a}\le x_0$，则 $M=f(q)$ ② $-\frac{b}{2a}>x_0$，则 $M=f(p)$

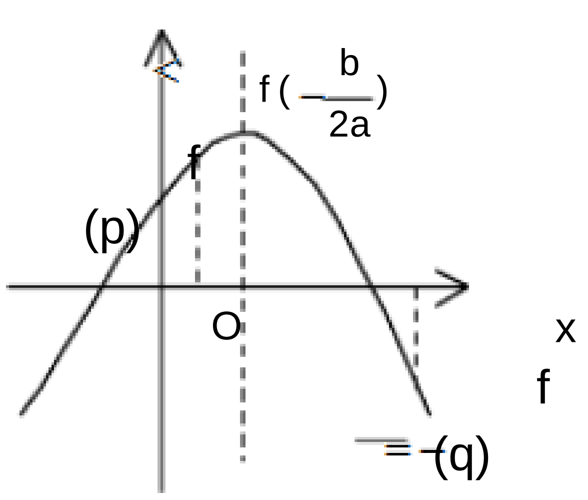


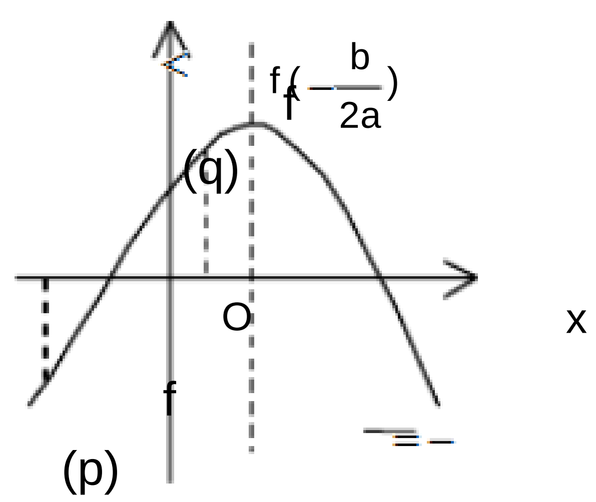


（Ⅱ）当 $a<0$ 时（开口向下）

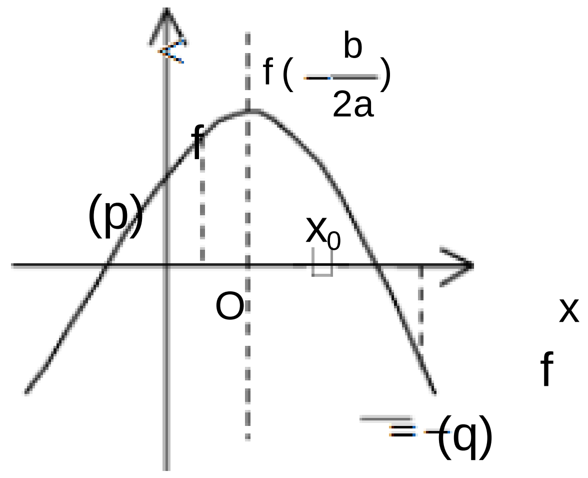
①若 $-\frac{b}{2a}<p$，则 $M=f(p)$　②若 $p\le -\frac{b}{2a}\le q$，则 $M=f(-\frac{b}{2a})$　③若 $-\frac{b}{2a}>q$，则 $M=f(q)$

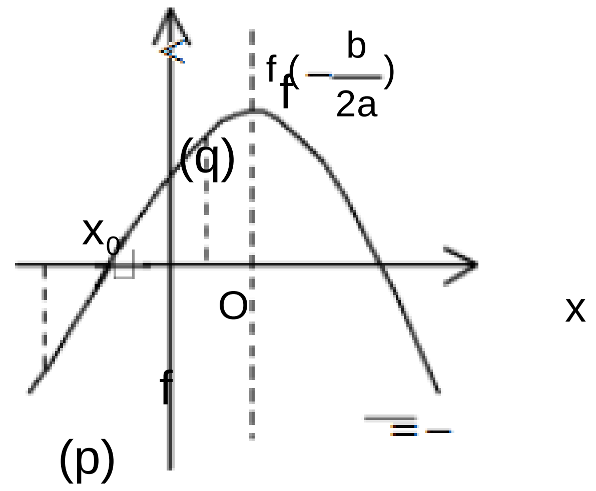






①若 $-\frac{b}{2a}\le x_0$，则 $m=f(q)$　　②$-\frac{b}{2a}>x_0$，则 $m=f(p)$.





第三章　函数的应用

一、方程的根与函数的零点

1、函数零点的概念：对于函数 $y=f(x)(x\in D)$，把使 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的零点。

2、函数零点的意义：函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 实数根，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标。即：

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

3、函数零点的求法：

求函数 $y=f(x)$ 的零点：

① （代数法）求方程 $f(x)=0$ 的实数根；

② （几何法）对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，并利用函数的性质找出零点.

4、二次函数的零点：

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\ne 0)$.

1）△＞0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两不等实根，二次函数的图象与 x 轴有两个交点，二次函数有两个零点.

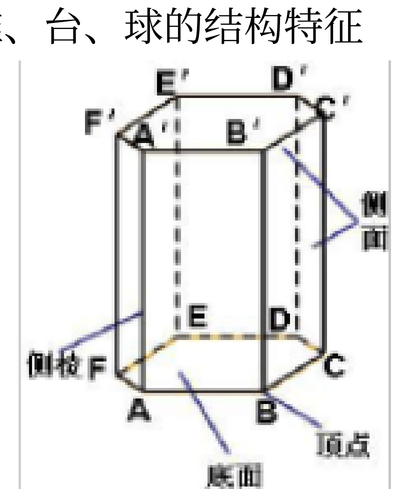
2）△＝0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相等实根（二重根），二次函数的图象与 x 轴有一个交点，二次函数有一个二重零点或二阶零点.

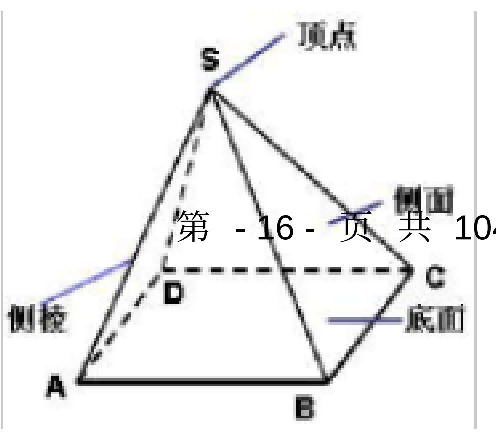
3）△＜0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，二次函数的图象与 x 轴无交点，二次函数无零点.

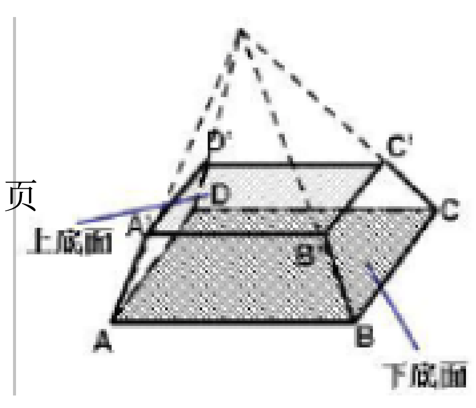
高中数学　必修 2 知识点

第一章　空间几何体

1.1 柱、锥、台、球的结构特征







（1）棱柱：定义 ：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体。

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等。

表示 ：用各顶点字母，如五棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 或用对角线的端点字母，如五棱柱 AD'

几何特征 ：两底面是对应边平行的全等多边形；侧面、对角面都是平行四边形；侧棱平行且相等；平行于底面的截面是与底面全等的多边形。

（2）棱锥

定义 ：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱锥、四棱锥、五棱锥等

表示 ：用各顶点字母，如五棱锥 $P-A'B'C'D'E'$

几何特征 ：侧面、对角面都是三角形；平行于底面的截面与底面相似，其相似比等于顶点到截面距离与高的比的平方。

（3）棱台：定义 ：用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，截面和底面之间的部分

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱态、四棱台、五棱台等

表示 ：用各顶点字母，如五棱台 $P-A'B'C'D'E'$

几何特征 ：①上下底面是相似的平行多边形 ②侧面是梯形 ③侧棱交于原棱锥的顶点

（4）圆柱：定义 ：以矩形的一边所在的直线为轴旋转 ,其余三边旋转所成的曲面所围成的几何体

几何特征 ：①底面是全等的圆；②母线与轴平行；③轴与底面圆的半径垂直；④侧面展开图是一个矩形。

（5）圆锥：定义 ：以直角三角形的一条直角边为旋转轴 ,旋转一周所成的曲面所围成的几何体

几何特征 ：①底面是一个圆；②母线交于圆锥的顶点；③侧面展开图是一个扇形。

（6）圆台：定义： 用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截面和底面之间的部分

几何特征： ①上下底面是两个圆；②侧面母线交于原圆锥的顶点；③侧面展开图是一个弓形。

（7）球体：定义： 以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体

几何特征： ①球的截面是圆；②球面上任意一点到球心的距离等于半径。

1.2 空间几何体的三视图和直观图

1 三视图：

正视图：从前往后 侧视图：从左往右 俯视图：从上往下

2 画三视图的原则：

长对齐、高对齐、宽相等

3 直观图：斜二测画法

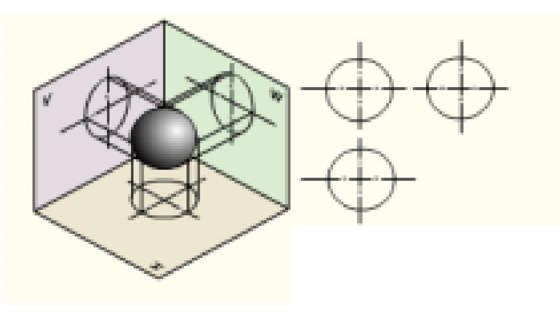
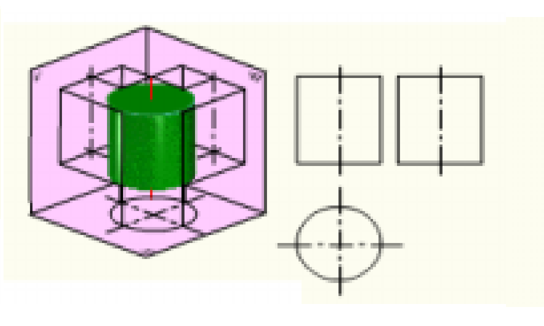
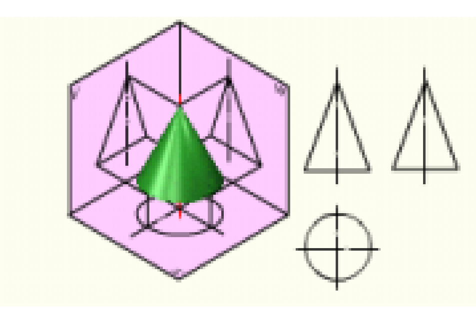
4 斜二测画法的步骤：

（1） .平行于坐标轴的线依然平行于坐标轴；

（2） .平行于 y 轴的线长度变半，平行于 x，z 轴的线长度不变；

（3） .画法要写好。

5 用斜二测画法画出长方体的步骤： （1）画轴（ 2）画底面（ 3）画侧棱（ 4）成图

1.3 空间几何体的表面积与体积

（一 ）空间几何体的表面积

1 棱柱、棱锥的表面积： 各个面面积之和

2 圆柱的表面积 $S=2\pi rl+2\pi r^{2}$ 3 圆锥的表面积 $S=\pi rl+\pi r^{2}$

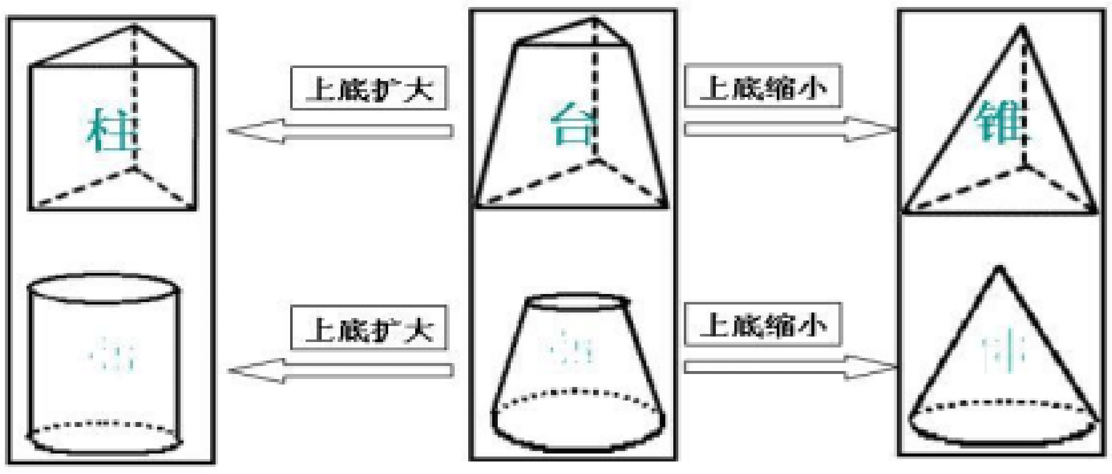
4 圆台的表面积 $S=\pi rl+\pi r^{2}+\pi Rl+\pi R^{2}$ 5 球的表面积 $S=4\pi R^{2}$

（二）空间几何体的体积

1 柱体的体积 $V=S_{底}\times h$ 2 锥体的体积 $V=\frac{1}{3}S_{底}\times h$

3 台体的体积 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+\sqrt{S_{上}S_{下}}+S_{下})\times h$ 4 球体的体积

$V=\frac{4}{3}\pi R^{3}$



第二章 直线与平面的位置关系

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

2.1.1

1 平面含义：平面是无限延展的

2 平面的画法及表示

（1）平面的画法：水平放置的平面通常画成一个平行四边形，锐角画成 45^{0}，且横边画成邻边的 2 倍长（如图）

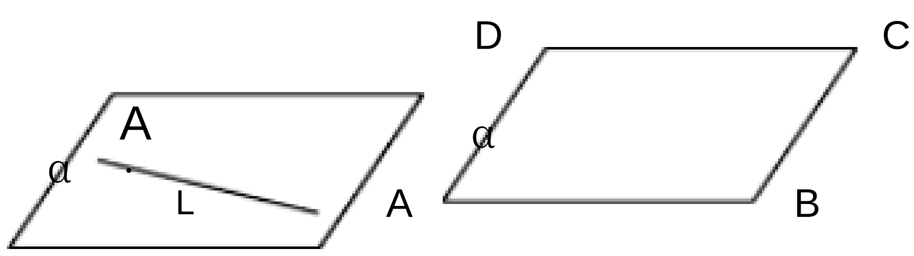
（2）平面通常用希腊字母 α、β、γ 等表示，如平面 α、平面 β 等，也可以用表示平面的平行四边形的四个顶点或者相对的两个顶点的大写字母来表示，如平面 AC、平面 ABCD等。

3 三个公理：

（1）公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内

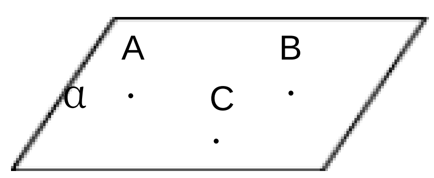
符号表示为

$$\left.\begin{array}{l} A\in L \\ B\in L \\ A\in \alpha \\ B\in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow L \subset \alpha$$



公理 1 作用：判断直线是否在平面内

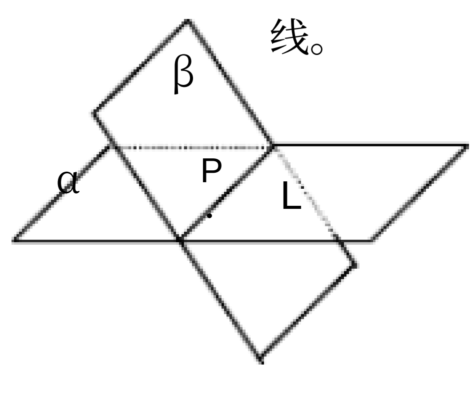
（2）公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。



符号表示为：A、B、C 三点不共线 => 有且只有一个平面 α，使 A∈α、B∈α、C∈α。

公理 2 作用：确定一个平面的依据。

（3）公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。



符号表示为：$P\in\alpha\cap\beta \Rightarrow \alpha\cap\beta=L$，且 $P\in L$

公理 3 作用：判定两个平面是否相交的依据

2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系

1 空间的两条直线有如下三种关系：

共面直线 $\begin{cases} \text{相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点；} \\ \text{平行直线：同一平面内，没有公共点；} \end{cases}$

异面直线： 不同在任何一个平面内，没有公共点。

2 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

符号表示为：设 a、b、c 是三条直线

$$\left.\begin{array}{l} a\parallel b \\ c\parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a\parallel c$$

强调：公理 4 实质上是说平行具有传递性，在平面、空间这个性质都适用。

公理 4 作用：判断空间两条直线平行的依据。

3 等角定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补

4 注意点：

① a' 与 b' 所成的角的大小只由 a、b 的相互位置来确定，与 O 的选择无关，为简便，点 O 一般取在两直线中的一条上；

② 两条异面直线所成的角 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$；

③ 当两条异面直线所成的角是直角时，我们就说这两条异面直线互相垂直，记作 $a\perp b$；

④ 两条直线互相垂直，有共面垂直与异面垂直两种情形；

⑤ 计算中，通常把两条异面直线所成的角转化为两条相交直线所成的角。

2.1.3 — 2.1.4 空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系

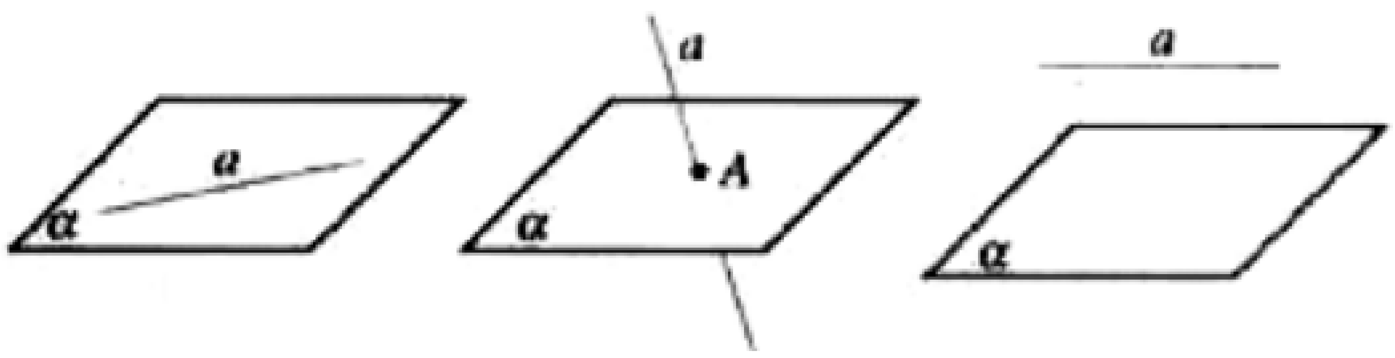
1、直线与平面有三种位置关系：

（1）直线在平面内 —— 有无数个公共点

（2）直线与平面相交 —— 有且只有一个公共点

（3）直线在平面平行 —— 没有公共点

指出：直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外，可用 $a\not\subset\alpha$ 来表示



$a\subset\alpha$ $a\cap\alpha=A$ $a\parallel\alpha$

2.2. 直线、平面平行的判定及其性质

2.2.1 直线与平面平行的判定

1、直线与平面平行的判定定理：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

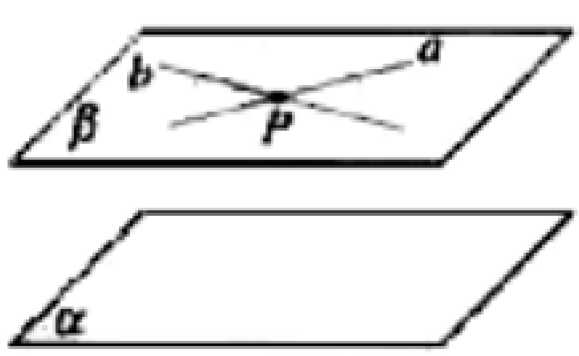
简记为：线线平行，则线面平行。

符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} a\not\subset\alpha \\ b\subset\beta \\ a\parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a\parallel\alpha$$

2.2.2 平面与平面平行的判定

1、两个平面平行的判定定理：一个平面内的两条交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行。



符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} a\subset\beta \\ b\subset\beta \\ a\cap b=P \\ a\parallel\alpha \\ b\parallel\alpha \end{array}\right\} \quad \beta\parallel\alpha$$

2、判断两平面平行的方法有三种：

（1）用定义；

（2）判定定理；

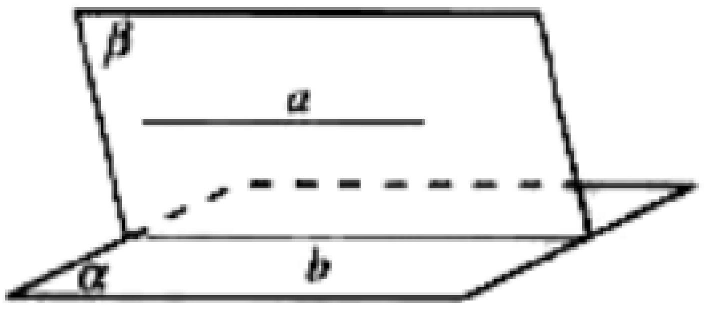
（3）垂直于同一条直线的两个平面平行。

2.2.3 — 2.2.4 直线与平面、平面与平面平行的性质

1、定理：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行。

简记为：线面平行则线线平行。

符号表示：

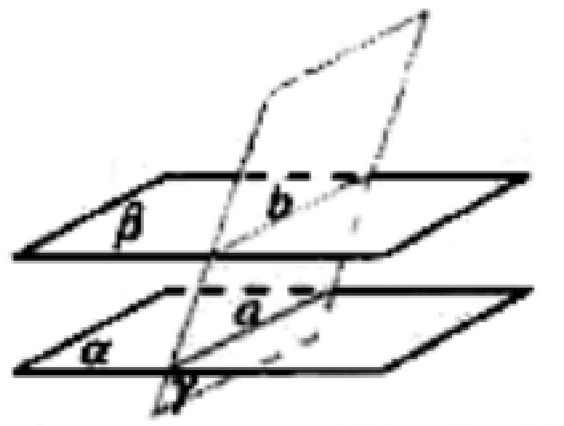


$$\left.\begin{array}{l} a\parallel\alpha \\ a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{array}\right\}\ a\parallel b$$

作用：利用该定理可解决直线间的平行问题。

2、定理：如果两个平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行。

符号表示：



$$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ \alpha\cap\gamma=a \\ \beta\cap\gamma=b \end{array}\right\}\ a\parallel b$$

作用：可以由平面与平面平行得出直线与直线平行

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

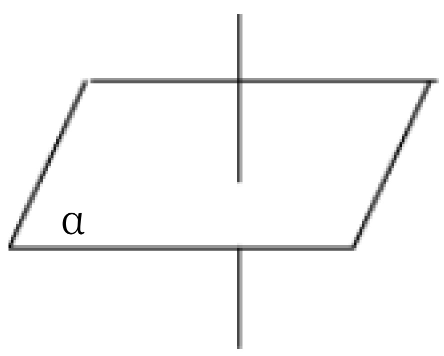
2.3.1 直线与平面垂直的判定

1、定义

如果直线 L 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 L 与平面 α 互相垂直，记作 L⊥α，直线 L 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 L 的垂面。如图，直线与平面垂直时，它们唯一公共点 P 叫做垂足。

L

p



2、判定定理：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直。

注意点：a) 定理中的“两条相交直线”这一条件不可忽视；

b) 定理体现了“直线与平面垂直”与“直线与直线垂直”互相转化的数学思想。

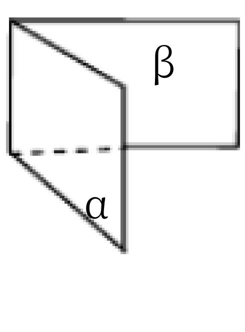
2.3.2 平面与平面垂直的判定

1、二面角的概念：表示从空间一直线出发的两个半平面所组成的图形

A

棱 l

B



2、二面角的记法：二面角 α-l-β 或 α-AB-β

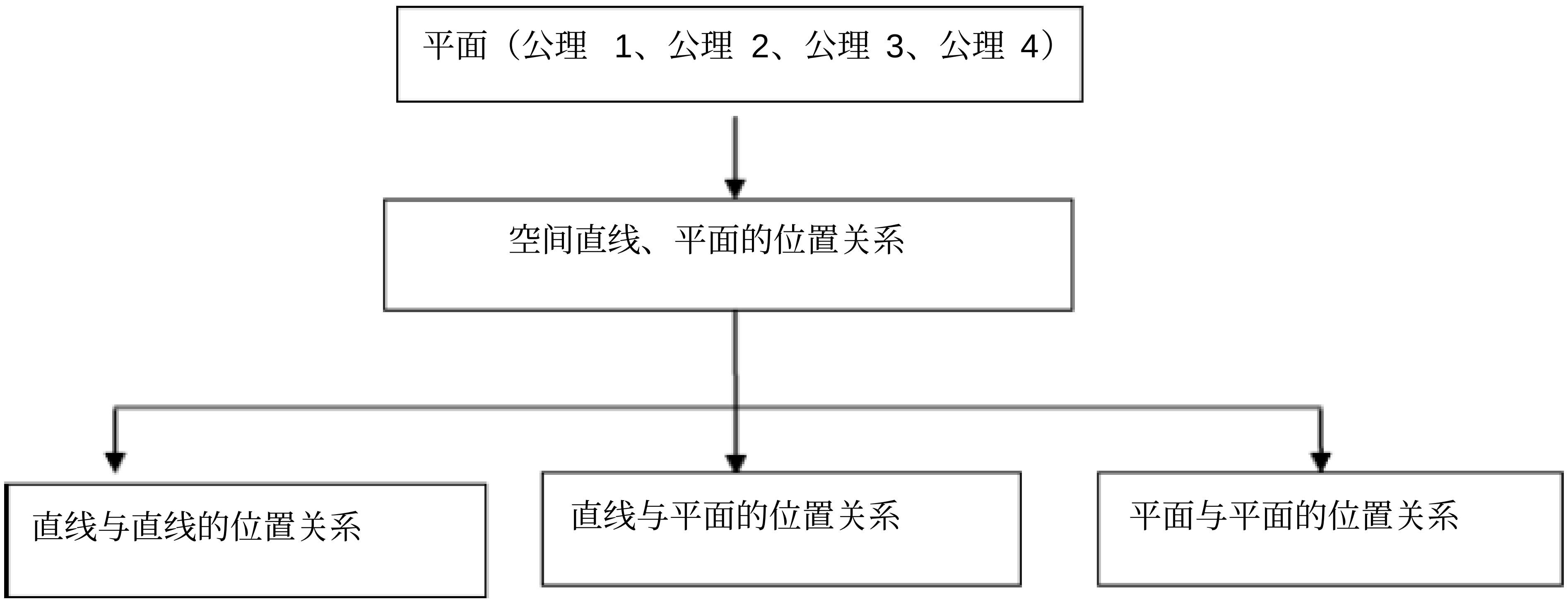
3、两个平面互相垂直的判定定理： 一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直。

2.3.3 — 2.3.4 直线与平面、平面与平面垂直的性质

1、定理：垂直于同一个平面的两条直线平行。

2 性质定理： 两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。

本章知识结构框图



第三章 直线与方程

3.1 直线的倾斜角和斜率

3.1 倾斜角和斜率

1、直线的倾斜角的概念：当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角．特别地，当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定 α = 0°．

2、 倾斜角 α 的取值范围： 0°≤ α ＜180°． 当直线 l 与 x 轴垂直时， α = 90°．

3、直线的斜率：

一条直线的倾斜角 α (α ≠90°) 的正切值叫做这条直线的斜率，斜率常用小写字母 k 表示，也就是 k = tan α

?当直线 l 与 x 轴平行或重合时， α =0°, k = tan0°=0;

?当直线 l 与 x 轴垂直时， α = 90°, k 不存在．

由此可知，一条直线 l 的倾斜角 α 一定存在，但是斜率 k 不一定存在．

4、 直线的斜率公式：

给定两点 P1(x1,y1),P2(x2,y2),x1 ≠x2, 用两点的坐标来表示直线 P1P2 的斜率：

斜率公式：k=y2-y1/x2-x1

3.1.2 两条直线的平行与垂直

1、两条直线都有斜率而且不重合，如果它们平行，那么它们的斜率相等；反之，如果它们的斜率相等，那么它们平行，即 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

注意： 上面的等价是在两条直线不重合且斜率存在的前提下才成立的，缺少这个前提，结论并不成立．即如果 k1=k2， 那么一定有 L1∥L2

2、两条直线都有斜率，如果它们互相垂直，那么它们的斜率互为负倒数；反之，如果它们的斜率互为负倒数，那么它们互相垂直，即

3.2.1 直线的点斜式方程

1、 直线的 点斜式 方程：直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k $y - y_0 = k(x - x_0)$

2、、直线的 斜截式 方程：已知直线 l 的斜率为 k，且与 y 轴的交点为 $(0, b)$ $y = kx + b$

3.2.2 直线的两点式方程

1、直线的两点式方程：已知两点 $P_1(x_1, x_2), P_2(x_2, y_2)$ 其中 $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$ **y-y1/y-y2=x-x1/x-x2**

2、直线的截距式方程：已知直线 l 与 x 轴的交点为 A $(a, 0)$，与 y 轴的交点为 B $(0, b)$，其中 $a \neq 0, b \neq 0$

3.2.3 直线的一般式方程

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1、直线的一般式方程：关于 x, y 的二元一次方程 $Ax + By + C = 0$

（A，B 不同时为 0）

2、各种直线方程之间的互化。

3.3 直线的交点坐标与距离公式

3.3.1 两直线的交点坐标

1、给出例题：两直线交点坐标

L1 ：3x+4y-2=0 L1：2x+y +2=0

解：解方程组 $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$

得 x=-2，y=2

所以 L1 与 L2 的交点坐标为 M（-2，2）

3.3.2 两点间距离

两点间的距离公式

3.3.3 点到直线的距离公式

1．点到直线距离公式：

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离为： $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2、两平行线间的距离公式：

已知两条平行线直线 l_1 和 l_2 的一般式方程为 l_1： $Ax + By + C_1 = 0$，

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

l_2 $Ax + By + C_2 = 0$，则 l_1 与 l_2 的距离为 $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

第四章 圆与方程

4.1.1 圆的标准方程

1、圆的标准方程： $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

圆心为 A(a,b),半径为 r 的圆的方程

2、点 $M(x_0, y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的关系的判断方法：

（1） $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$，点在圆外　　（2） $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$，点在圆上

（3） $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$，点在圆内

4.1.2 圆的一般方程

1、圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

2、圆的一般方程的特点：

(1) ①x2 和 y2 的系数相同，不等于 0. ②没有 xy 这样的二次项.

(2) 圆的一般方程中有三个特定的系数 D、E、F，因之只要求出这三个系数，圆的方程就确定了.

(3) 、与圆的标准方程相比较，它是一种特殊的二元二次方程，代数特征明显，圆的标准方程则指出了圆心坐标与半径大小，几何特征较明显。

4.2.1 圆与圆的位置关系

1、用点到直线的距离来判断直线与圆的位置关系.

设直线 l ：$ax+by+c=0$，圆 C ：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，圆的半径为 r，圆心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ 到直线的距离为 d，则判别直线与圆的位置关系的依据有以下几点：

（1）当 $d>r$ 时，直线 l 与圆 C 相离；（2）当 $d=r$ 时，直线 l 与圆 C 相切；

（3）当 $d<r$ 时，直线 l 与圆 C 相交；

4.2.2 圆与圆的位置关系

两圆的位置关系.

设两圆的连心线长为 l，则判别圆与圆的位置关系的依据有以下几点：

（1）当 $l>r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 相离；（2）当 $l=r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 外切；

（3）当 $|r_1-r_2|<l<r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 相交；

（4）当 $l=|r_1-r_2|$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 内切；（5）当 $l<|r_1-r_2|$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 内含；

4.2.3 直线与圆的方程的应用

1、利用平面直角坐标系解决直线与圆的位置关系；

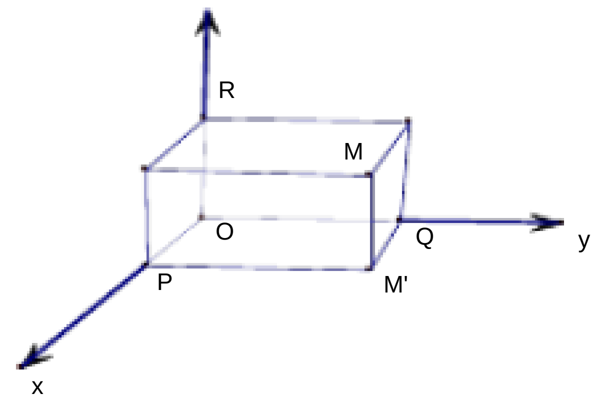
2、过程与方法

用坐标法解决几何问题的步骤：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：将代数运算结果“翻译”成几何结论.



4.3.1 空间直角坐标系

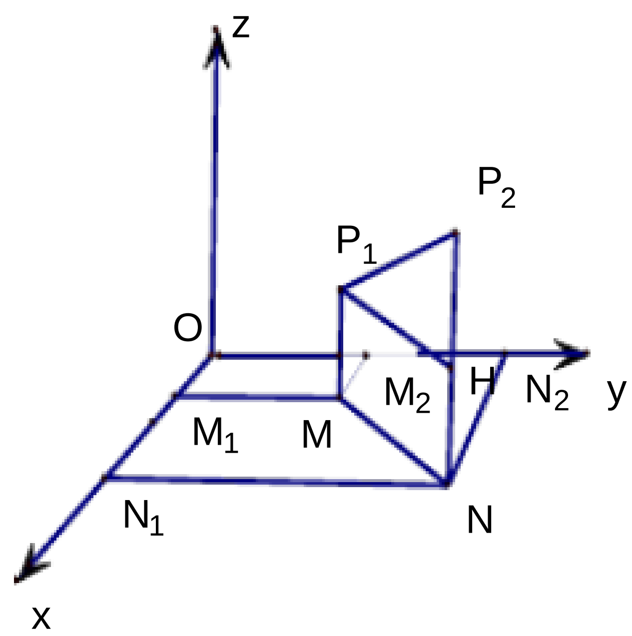
1、点 M 对应着唯一确定的有序实数组 (x, y, z)，x、y、z 分别是 P、Q、R 在 x、y、z 轴上的坐标

2、有序实数组 (x, y, z)，对应着空间直角坐标系中的一点

3、空间中任意点 M 的坐标都可以用有序实数组 (x, y, z) 来表示，该数组叫做点 M 在此空间直角坐标系中的坐标，记 $M(x, y, z)$，x 叫做点 M 的横坐标，y 叫做点 M 的纵坐标，z 叫做点 M 的竖坐标。

4.3.2 空间两点间的距离公式

1、空间中任意一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式



$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

高中数学 必修 3 知识点

第一章 算法初步

1.1.1 算法的概念

1、算法概念：

在数学上，现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来解决的某一类问题是程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成 .

2. 算法的特点：

(1) 有限性：一个算法的步骤序列是有限的，必须在有限操作之后停止，不能是无限的 .

(2) 确定性：算法中的每一步应该是确定的并且能有效地执行且得到确定的结果，而不应当是模棱两可 .

(3) 顺序性与正确性：算法从初始步骤开始，分为若干明确的步骤，每一个步骤只能有一个确定的后继步骤，前一步是后一步的前提，只有执行完前一步才能进行下一步，并且每一步都准确无误，才能完成问题 .

(4) 不唯一性：求解某一个问题的解法不一定是唯一的，对于一个问题可以有不同的算法 .

(5) 普遍性：很多具体的问题，都可以设计合理的算法去解决，如心算、计算器计算都要经过有限、事先设计好的步骤加以解决 .

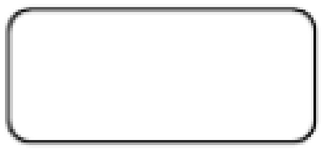
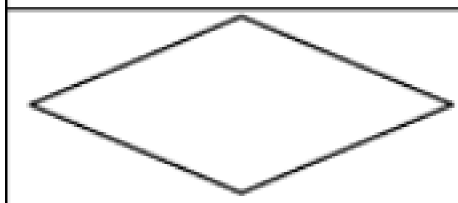
1.1.2 程序框图

1、程序框图基本概念：

（一）程序构图的概念：程序框图又称流程图，是一种用规定的图形、指向线及文字说明来准确、直观地表示算法的图形。

一个程序框图包括以下几部分：表示相应操作的程序框；带箭头的流程线；程序框外必要文字说明。

（二）构成程序框的图形符号及其作用

程序框	名称	功能
	起止框	表示一个算法的起始和结束，是任何流程图不可少的。
	输入、输出框	表示一个算法输入和输出的信息，可用在算法中任何需要输入、输出的位置。
	处理框	赋值、计算，算法中处理数据需要的算式、公式等分别写在不同的用以处理数据的处理框内。
	判断框	判断某一条件是否成立，成立时在出口处标明 “是”或“ Y”；不成立时标明“否”或“ N”。

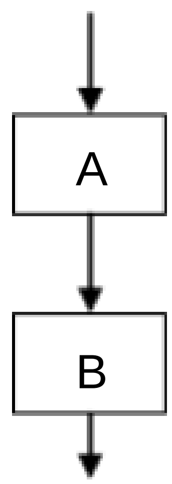
学习这部分知识的时候，要掌握各个图形的形状、作用及使用规则，画程序框图的规则如下：

1、使用标准的图形符号。 2、框图一般按从上到下、从左到右的方向画。 3、除判断框外，大多数流程图符号只有一个进入点和一个退出点。判断框具有超过一个退出点的唯一符号。 4、判断框分两大类，一类判断框“是”与“否”两分支的判断，而且有且仅有两个结果；另一类是多分支判断，有几种不同的结果。 5、在图形符号内描述的语言要非常简练清楚。

（三）、算法的三种基本逻辑结构：顺序结构、条件结构、循环结构。

1、顺序结构：顺序结构是最简单的算法结构，语句与语句之间，框与框之间是按从上到下的顺序进行的，它是由若干个依次执行的处理步骤组成的，它是任何一个算法都离不开的一种基本算法结构。

顺序结构在程序框图中的体现就是用流程线将程序框自上而下地连接起来，按顺序执行算法步骤。如在示意图中， A 框和 B 框是依次执行的，只有在执行完 A 框指定的操作后，才能接着执行 B 框所指定的操作。



2、条件结构：

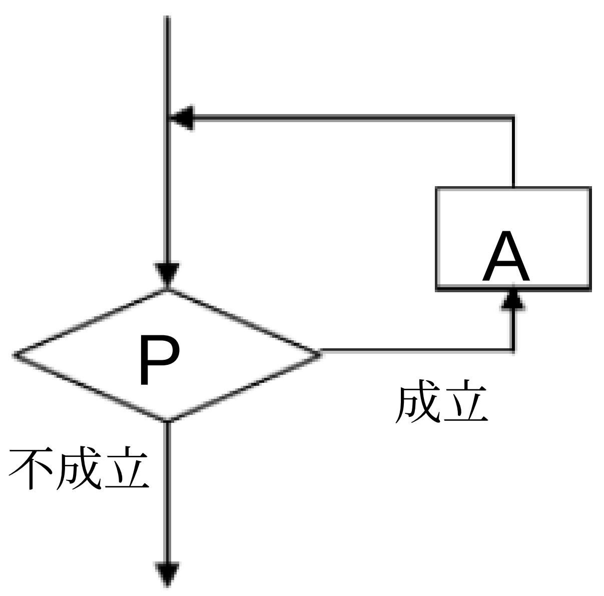
条件结构是指在算法中通过对条件的判断根据条件是否成立而选择不同流向的算法结构。

条件 P 是否成立而选择执行 A 框或 B 框。无论 P 条件是否成立，只能执行 A 框或 B 框之一，不可能同时执行 A 框和 B 框，也不可能 A 框、B 框都不执行。一个判断结构可以有多个判断框。

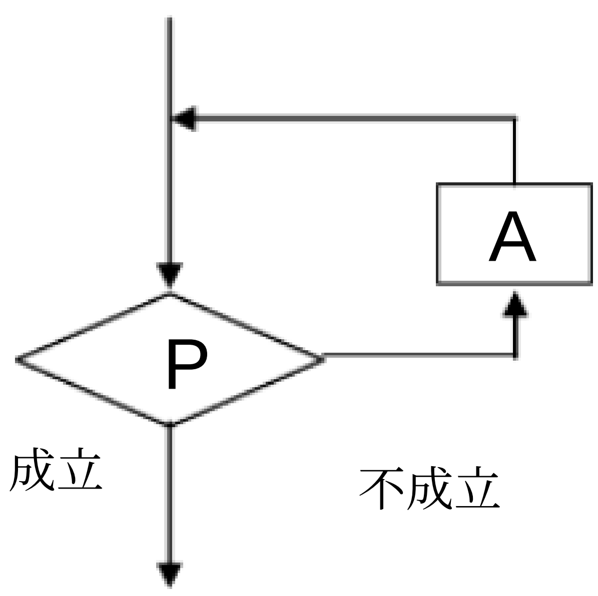
3、循环结构：在一些算法中，经常会出现从某处开始，按照一定条件，反复执行某一处理步骤的情况，这就是循环结构，反复执行的处理步骤为循环体，显然，循环结构中一定包含条件结构。循环结构又称重复结构，循环结构可细分为两类：

（1）、一类是当型循环结构，如下左图所示，它的功能是当给定的条件 P 成立时，执行 A 框，A 框执行完毕后，再判断条件 P 是否成立，如果仍然成立，再执行 A 框，如此反复执行 A 框，直到某一次条件 P 不成立为止，此时不再执行 A 框，离开循环结构。

（2）、另一类是直到型循环结构，如下右图所示，它的功能是先执行，然后判断给定的条件 P 是否成立，如果 P 仍然不成立，则继续执行 A 框，直到某一次给定的条件 P 成立为止，此时不再执行 A 框，离开循环结构。



当型循环结构



直到型循环结构

注意：**1** 循环结构要在某个条件下终止循环，这就需要条件结构来判断。因此，循环结构中一定包含条件结构，但不允许“死循环”。**2** 在循环结构中都有一个计数变量和累加变量。计数变量用于记录循环次数，累加变量用于输出结果。计数变量和累加变量一般是同步执行的，累加一次，计数一次。

1.2.1 输入、输出语句和赋值语句

1、输入语句

（1）输入语句的一般格式

INPUT“提示内容”；变量 —图形计算器格式→ INPUT “提示内容”，变量

（2）输入语句的作用是

实现算法的输入信息功能；（3）“提示内容”提示用户输入什么样的信息，变量是指程序在运行时其值是可以变化的量；（4）输入语句要求输入的值只能是具体的常数，不能是函数、变量或表达式；（5）提示内容与变量之间用分号“；”隔开，若输入多个变量，变量与变量之间用逗号“，”隔开。

2、输出语句

（1）输出语句的一般格式

PRINT“提示内容”；表达式

图形计算器格式

Disp “提示内容”，变量

（2）输出语句的作用是实现算法的输出结果功能；（3）“提示内容”提示用户输入什么样的信息，表达式是指程序要输出的数据；（4）输出语句可以输出常量、变量或表达式的值以及字符。

3、赋值语句

（1）赋值语句的一般格式

变量＝表达式

图形计算器格式

表达式 → 变量

（2）赋值语句的作用是将表达式所代表的值赋给变量；（3）赋值语句中的“＝”称作赋值号，与数学中的等号的意义是不同的。赋值号的左右两边不能对换，它将赋值号右边的表达式的值赋给赋值号左边的变量；（4）赋值语句左边只能是变量名字，而不是表达式，右边表达式可以是一个数据、常量或算式；（5）对于一个变量可以多次赋值。

注意：①赋值号左边只能是变量名字，而不能是表达式。如：2=X 是错误的。②赋值号左右不能对换。如“A=B”“B=A”的含义运行结果是不同的。③不能利用赋值语句进行代数式的演算。（如化简、因式分解、解方程等）④赋值号“=”与数学中的等号意义不同。

1．**2**．**2** 条件语句

1、条件语句的一般格式有两种：（1）IF—THEN—ELSE 语句；（2）IF—THEN 语句。**2**、**IF—THEN—ELSE** 语句

IF—THEN—ELSE 语句的一般格式为图 1，对应的程序框图为图 2。

```
IF  条件  THEN
    语句 1
ELSE
    语句 2
END IF
```

图 1

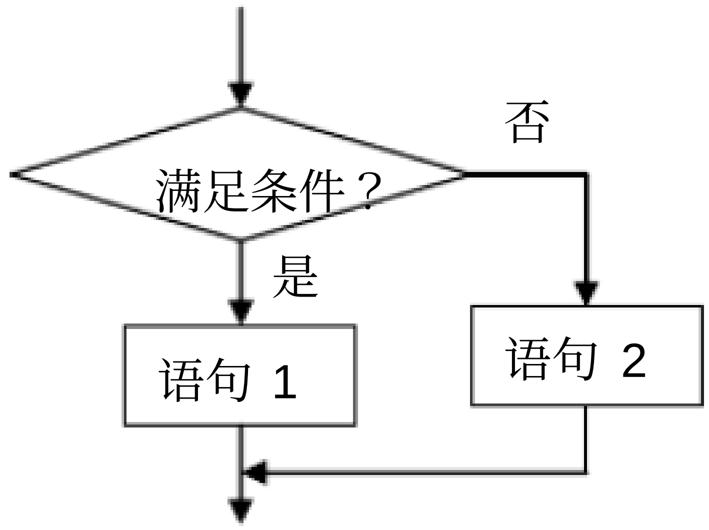


图 2

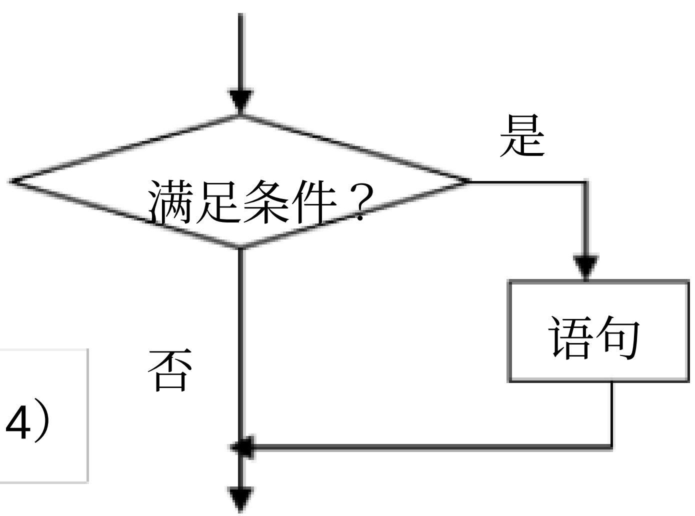
分析：在 IF—THEN—ELSE 语句中，“条件”表示判断的条件，“语句 1”表示满足条件时执行的操作内容；“语句 2”表示不满足条件时执行的操作内容；END IF 表示条件语句的结束。计算机在执行时，首先对 IF 后的条件进行判断，如果条件符合，则执行 THEN 后面的语句 1；若条件不符合，则执行 ELSE 后面的语句 2。

3、**IF—THEN** 语句

IF—THEN 语句的一般格式为图 3，对应的程序框图为图 4。

```
IF  条件  THEN
    语句
END IF
```

（图 3）



（图 4）

注意：“ 条件 ” 表示判断的条件； “ 语句 ” 表示满足条件时执行的操作内容，条件不满足时，结束程序； END IF 表示条件语句的结束。计算机在执行时首先对 IF 后的条件进行判断，如果条件符合就执行 THEN 后边的语句，若条件不符合则直接结束该条件语句，转而执行其它语句。

1．2．3 循环语句

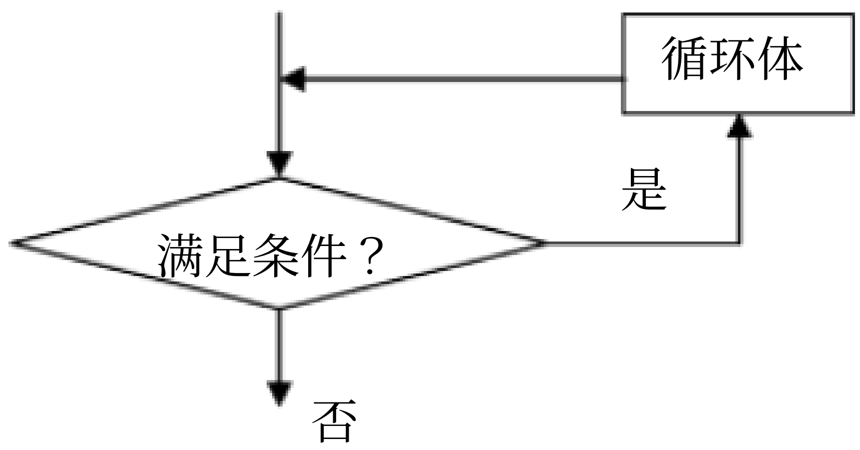
循环结构是由循环语句来实现的。对应于程序框图中的两种循环结构，一般程序设计语言中也有当型（WHILE型）和直到型（ UNTIL 型）两种语句结构。即 WHILE语句和 UNTIL 语句。

1、WHILE 语句

（1）WHILE语句的一般格式是

```
WHILE 条件
循环体
WEND
```

对应的程序框图是



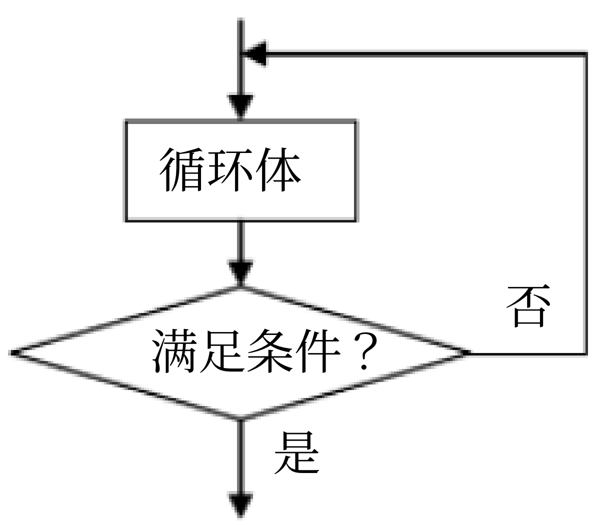
（2）当计算机遇到 WHILE 语句时，先判断条件的真假，如果条件符合，就执行 WHILE 与 WEND 之间的循环体；然后再检查上述条件，如果条件仍符合，再次执行循环体，这个过程反复进行，直到某一次条件不符合为止。这时，计算机将不执行循环体，直接跳到 WEND 语句后，接着执行 WEND 之后的语句。因此，当型循环有时也称为 “ 前测试型 ” 循环。

2、UNTIL 语句

（1）UNTIL 语句的一般格式是

```
DO
循环体
LOOP UNTIL 条件
```

对应的程序框图是



（2）直到型循环又称为 “ 后测试型 ” 循环，从 UNTIL 型循环结构分析，计算机执行该语句时，先执行一次循环体，然后进行条件的判断，如果条件不满足，继续返回执行循环体，然后再进行条件的判断，这个过程反复进行，直到某一次条件满足时，不再执行循环体，跳到 LOOP UNTIL语句后执行其他语句，是先执行循环体后进行条件判断的循环语句。

分析：当型循环与直到型循环的区别：（先由学生讨论再归纳）

（1） 当型循环先判断后执行，直到型循环先执行后判断；

在 WHILE语句中，是当条件满足时执行循环体，在 UNTIL 语句中，是当条件不满足时执行循环

例题： 设计计算 $1\times3\times5\times...\times99$ 的一个算法 .（见课本 P_{21}）

```
S← 1
For I From 3 To 99 Step 2
    S← S×I
End For
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
While I ≤ 97
    I← I＋2
    S← S×I
End While
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
While I ≤ 99
    S← S×I
    I← I＋2
End While
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
Do
    S← S×I
    I← I＋2
Loop Until I ≥100 (或者 I＞99 )
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
Do
    I← I＋2
    S← S×I
Loop Until I ≥99
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
Do While I ≤99 (或者 I＜100 )
    S← S×I
    I← I＋2
Loop
Print S
```

```
S← 1
I ← 1
Do While I ≤97 (或者 I＜99 )
    I← I＋2
    S← S×I
Loop
Print S
```

颜老师友情提醒：

1. 一定要看清题意，看题目让你干什么，有的只要写出算法，有的只要求写出伪代码，而有的题目则是既写出算法画出流程还要写出伪代码。

2. 在具体做题时，可能好多的同学感觉先画流程图较为简单，但也有的算法伪代码比较好写，你也可以在草稿纸上按照你自己的思路先做出来，然后根据题目要求作答。一般是先写算法，后画流程图，最后写伪代码。

3. 书写程序时一定要规范化，使用统一的符号，最好与教材一致，由于是新教材的原因，再加上各种版本，可能同学会看到各种参考书上的书写格式不一样， 而且有时还会碰到我们没有见过的语言， 希望大家能以课本为依据，不要被铺天盖地的资料所淹没！

1.3.1 辗转相除法与更相减损术

1、辗转相除法。也叫欧几里德算法，用辗转相除法求最大公约数的步骤如下：

（1）：用较大的数 m除以较小的数 n 得到一个商 S_0 和一个余数 R_0 ；（2）：若 $R_0=0$，则 n 为 m，n 的最大公约数；若 $R_0\neq0$，则用除数 n 除以余数 R_0 得到一个商 S_1 和一个余数 R_1 ；（3）：若 $R_1=0$，则 R_1 为 m，n 的最大公约数；若 $R_1\neq0$，则用除数 R_0 除以余数 R_1 得到一个商 S_2 和一个余数 R_2 ；,, 依次计算直至 $R_n=0$，此时所得

到的 R_{n-1} 即为所求的最大公约数。

2、更相减损术

我国早期也有求最大公约数问题的算法，就是更相减损术。在《九章算术》中有更相减损术求最大公约数的步骤：可半者半之，不可半者，副置分母?子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。

翻译为：（1）：任意给出两个正数；判断它们是否都是偶数。若是，用 2 约简；若不是，执行第二步。（2）：以较大的数减去较小的数，接着把较小的数与所得的差比较，并以大数减小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数（等数）就是所求的最大公约数。

例 2 用更相减损术求 98 与 63 的最大公约数 .

分析：（略）

3、辗转相除法与更相减损术的区别：

（1）都是求最大公约数的方法，计算上辗转相除法以除法为主，更相减损术以减法为主，计算次数上辗转相除法计算次数相对较少，特别当两个数字大小区别较大时计算次数的区别较明显。

（2）从结果体现形式来看，辗转相除法体现结果是以相除余数为 0 则得到，而更相减损术则以减数与差相等而得到

1.3.2 秦九韶算法与排序

1、秦九韶算法概念：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots.+a_1x+a_0$ 求值问题

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots.+a_1x+a_0=(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots.+a_1)x+a_0=((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots.+a_2)x+a_1)x+a_0$

$=......=(...(a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+...+a_1)x+a_0$

求多项式的值时，首先计算最内层括号内依次多项式的值，即 $v_1=a_nx+a_{n-1}$

然后由内向外逐层计算一次多项式的值，即

$v_2=v_1x+a_{n-2}$　　$v_3=v_2x+a_{n-3}$　　......　　$v_n=v_{n-1}x+a_0$

这样，把 n 次多项式的求值问题转化成求 n 个一次多项式的值的问题。

2、两种排序方法：直接插入排序和冒泡排序

1、直接插入排序

基本思想：插入排序的思想就是读一个，排一个。将第 1 个数放入数组的第 1 个元素中，以后读入的数与已存入数组的数进行比较，确定它在从大到小的排列中应处的位置. 将该位置以及以后的元素向后推移一个位置，将读入的新数填入空出的位置中.（由于算法简单，可以举例说明）

2、冒泡排序

基本思想：依次比较相邻的两个数，把大的放前面，小的放后面. 即首先比较第 1 个数和第 2 个数，大数放前，小数放后. 然后比较第 2 个数和第 3 个数...... 直到比较最后两个数. 第一趟结束，最小的一定沉到最后. 重复上过程，

仍从第 1 个数开始，到最后第 2 个数…… 由于在排序过程中总是大数往前，小数往后，相当气泡上升，所以叫冒泡排序．

1.3.3 进位制

1、概念：进位制 是一种记数方式，用有限的数字在不同的位置表示不同的数值。可使用数字符号的个数称为基数，基数为 n，即可称 n 进位制，简称 n 进制。现在最常用的是十进制，通常使用 10 个阿拉伯数字 0-9 进行记数。对于任何一个数，我们可以用不同的进位制来表示。比如：十进数 57，可以用二进制表示为 111001，也可以用八进制表示为 71、用十六进制表示为 39，它们所代表的数值都是一样的。

一般地，若 k 是一个大于一的整数，那么以 k 为基数的 k 进制可以表示为：

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(k)} \qquad (0 < a_n < k, 0 \le a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 < k),$$

而表示各种进位制数一般在数字右下脚加注来表示，如 $111001_{(2)}$ 表示二进制数，$34_{(5)}$ 表示 5 进制数

第二章 统计

2.1.1 简单随机抽样

1．总体和样本

在统计学中，把研究对象的全体叫做总体.

把每个研究对象叫做个体.

把总体中个体的总数叫做总体容量.

为了研究总体 X 的有关性质，一般从总体中随机抽取一部分：X_1，X_2，…，X_n 研究，我们称它为样本．其中个体的个数称为样本容量.

2．简单随机抽样，也叫纯随机抽样。就是从总体中不加任何分组、划类、排队等，完全随机地抽取调查单位。特点是：每个样本单位被抽中的可能性相同（概率相等），样本的每个单位完全独立，彼此间无一定的关联性和排斥性。 简单随机抽样是其它各种抽样形式的基础。 通常只是在总体单位之间差异程度较小和数目较少时，才采用这种方法。

3．简单随机抽样常用的方法：

（1）抽签法； ?随机数表法； ?计算机模拟法； ?使用统计软件直接抽取。

在简单随机抽样的样本容量设计中，主要考虑：①总体变异情况；②允许误差范围；③概率保证程度。

4．抽签法：

（1）给调查对象群体中的每一个对象编号；

（2）准备抽签的工具，实施抽签

（3）对样本中的每一个个体进行测量或调查

例：请调查你所在的学校的学生做喜欢的体育活动情况。

5．随机数表法：

例：利用随机数表在所在的班级中抽取 10 位同学参加某项活动。

2.1.2 系统抽样

1．系统抽样（等距抽样或机械抽样）：

把总体的单位进行排序，再计算出抽样距离，然后按照这一固定的抽样距离抽取样本。第一个样本采用简单随机抽样的办法抽取。

K（抽样距离）=N（总体规模）/n（样本规模）

前提条件：总体中个体的排列对于研究的变量来说，应是随机的，即不存在某种与研究变量相关的规则分布。可以在调查允许的条件下，从不同的样本开始抽样，对比几次样本的特点。如果有明显差别，说明样本在总体中的分布承某种循环性规律，且这种循环和抽样距离重合。

2．系统抽样，即等距抽样是实际中最为常用的抽样方法之一。因为它对抽样框的要求较低，实施也比较简单。更为重要的是，如果有某种与调查指标相关的辅助变量可供使用，总体单元按辅助变量的大小顺序排队的话，使用系统抽样可以大大提高估计精度。

2.1.3 分层抽样

1．分层抽样（类型抽样）：

先将总体中的所有单位按照某种特征或标志（性别、年龄等）划分成若干类型或层次，然后再在各个类型或层次中采用简单随机抽样或系用抽样的办法抽取一个子样本，最后，将这些子样本合起来构成总体的样本。

两种方法：

1．先以分层变量将总体划分为若干层，再按照各层在总体中的比例从各层中抽取。

2．先以分层变量将总体划分为若干层，再将各层中的元素按分层的顺序整齐排列，最后用系统抽样的方法抽取样本。

2．分层抽样是把异质性较强的总体分成一个个同质性较强的子总体，再抽取不同的子总体中的样本分别代表该子总体，所有的样本进而代表总体。

分层标准：

（1）以调查所要分析和研究的主要变量或相关的变量作为分层的标准。

（2）以保证各层内部同质性强、各层之间异质性强、突出总体内在结构的变量作为分层变量。

（3）以那些有明显分层区分的变量作为分层变量。

3．分层的比例问题：

（1）按比例分层抽样：根据各种类型或层次中的单位数目占总体单位数目的比重来抽取子样本的方法。

（2）不按比例分层抽样：有的层次在总体中的比重太小，其样本量就会非常少，此时采用该方法，主要是便于对不同层次的子总体进行专门研究或进行相互比较。如果要用样本资料推断总体时，则需要先对各层的数据资料进行加权处理，调整样本中各层的比例，使数据恢复到总体中各层实际的比例结构。

2.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征

1、本均值： $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

2、．样本标准差： $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$

3．用样本估计总体时，如果抽样的方法比较合理，那么样本可以反映总体的信息，但从样本得到的信息会有偏差。在随机抽样中，这种偏差是不可避免的。

虽然我们用样本数据得到的分布、均值和标准差并不是总体的真正的分布、均值和标准差，而只是一个估计，但这种估计是合理的，特别是当样本量很大时，它们确实反映了总体的信息。

4．（1）如果把一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个共同的常数，标准差不变

（2）如果把一组数据中的每一个数据乘以一个共同的常数 k，标准差变为原来的 k 倍

（3）一组数据中的最大值和最小值对标准差的影响，区间 $(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$ 的应用；

"去掉一个最高分，去掉一个最低分"中的科学道理

2.3.2 两个变量的线性相关

1、概念：

（1）回归直线方程（ 2）回归系数

2．最小二乘法

3．直线回归方程的应用

（1）描述两变量之间的依存关系；利用直线回归方程即可定量描述两个变量间依存的数量关系

（2）利用回归方程进行预测；把预报因子（即自变量 x）代入回归方程对预报量（即因变量 Y）进行估计，即可得到个体 Y 值的容许区间。

（3）利用回归方程进行统计控制规定 Y 值的变化，通过控制 x 的范围来实现统计控制的目标。如已经得到了空气中 NO_2 的浓度和汽车流量间的回归方程，即可通过控制汽车流量来控制空气中 NO_2 的浓度。

4．应用直线回归的注意事项

（1）做回归分析要有实际意义；

（2）回归分析前 ,最好先作出散点图；

（3）回归直线不要外延。

第三章　概 率

3.1.1 —3.1.2 随机事件的概率及概率的意义

1、基本概念：

（1）必然事件：在条件 S 下，一定会发生的事件，叫相对于条件 S 的必然事件；

（2）不可能事件：在条件 S 下，一定不会发生的事件，叫相对于条件 S 的不可能事件；

（3）确定事件：必然事件和不可能事件统称为相对于条件 S 的确定事件；

（4）随机事件：在条件 S 下可能发生也可能不发生的事件，叫相对于条件 S 的随机事件；

（5）频数与频率：在相同的条件 S 下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数 nA 为事件 A 出现的频数；称事件 A 出现的比例 fn(A)= $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的概率：对于给定的随机事件 A，如果随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率 fn(A) 稳定在某个常数上，把这个常数记作 P（A），称为事件 A 的概率。

（6）频率与概率的区别与联系：随机事件的频率，指此事件发生的次数 nA 与试验总次数 n 的比值 $\frac{n_A}{n}$，它具有一定的稳定性，总在某个常数附近摆动，且随着试验次数的不断增多，这种摆动幅度越来越小。我们把这个常数叫做随机事件的概率，概率从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小。频率在大量重复试验的前提下可以近似地作为这个事件的概率

3.1.3 概率的基本性质

1、基本概念：

（1）事件的包含、并事件、交事件、相等事件

（2）若 A∩B 为不可能事件，即 A∩B= ф，那么称事件 A 与事件 B 互斥；

（3）若 A∩B 为不可能事件，A∪B 为必然事件，那么称事件 A 与事件 B 互为对立事件；

（4）当事件 A 与 B 互斥时，满足加法公式：P(A∪B)= P(A)+ P(B)；若事件 A 与 B 为对立事件，则 A∪B 为必然事件，所以 P(A∪B)= P(A)+ P(B)=1，于是有 P(A)=1 — P(B)

2、概率的基本性质：

1）必然事件概率为 1，不可能事件概率为 0，因此 0≤P(A)≤1；

2）当事件 A 与 B 互斥时，满足加法公式：P(A∪B)= P(A)+ P(B)；

3）若事件 A 与 B 为对立事件，则 A∪B 为必然事件，所以 P(A∪B)= P(A)+ P(B)=1，于是有 P(A)=1 — P(B)；

4）互斥事件与对立事件的区别与联系，互斥事件是指事件 A 与事件 B 在一次试验中不会同时发生，其具体包括三种不同的情形：（1）事件 A 发生且事件 B 不发生；（2）事件 A 不发生且事件 B 发生；（3）事件 A 与事件 B 同时不发生，而对立事件是指事件 A与 事件 B 有且仅有一个发生，其包括两种情形；（1）事件 A 发生 B 不发生；（2）事件 B 发生事件 A 不发生，对立事件互斥事件的特殊情形。

3.2.1 — 3.2.2 古典概型及随机数的产生

1、（1）古典概型的使用条件：试验结果的有限性和所有结果的等可能性。

（2）古典概型的解题步骤；

①求出总的基本事件数；

②求出事件 A 所包含的基本事件数，然后利用公式 P（A）= $\frac{\text{A包含的基本事件数}}{\text{总的基本事件个数}}$

3.3.1— 3.3.2 几何概型及均匀随机数的产生

1、基本概念：

（1）几何概率模型：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型；

（2）几何概型的概率公式：

$$P(A)=\frac{\text{构成事件 A的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}};$$

（2） 几何概型的特点： 1）试验中所有可能出现的结果（基本事件）有无限多个； 2）每个基本事件出现的可能性相等.

高中数学 必修 4 知识点

第一章 三角函数

$$1、任意角\begin{cases}正角:按逆时针方向旋转形成的角\\负角:按顺时针方向旋转形成的角\\零角:不作任何旋转形成的角\end{cases}$$

2、角 α 的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在第几象限，则称 α 为第几象限角.

第一象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in Z\}$

第二象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in Z\}$

第三象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in Z\}$

第四象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+360^\circ, k\in Z\}$

终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ, k\in Z\}$

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ+90^\circ, k\in Z\}$

终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 90^\circ, k\in Z\}$

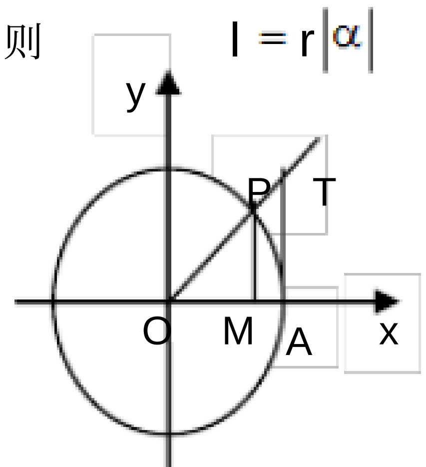
3、与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta \mid \beta=k\cdot 360^\circ+\alpha, k\in Z\}$

4、长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1弧度.

5、半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.

6、弧度制与角度制的换算公式： $2\pi=360^\circ$， $1^\circ=\frac{\pi}{180}$， $1=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.3^\circ$.

7、若扇形的圆心角为 α（α为弧度制），半径为 r，弧长为 l，周长为 C，面积为 S，则 $l=r|\alpha|$ ，



$C=2r+l$， $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

8、设 α 是一个任意大小的角， α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r\left(r=\sqrt{x^2+y^2}>0\right)$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$， $\cos\alpha=\frac{x}{r}$， $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$.

9、三角函数在各象限的符号：第一象限全为正，第二象限正弦为正，
第三象限正切为正，第四象限余弦为正.

10、三角函数线： $\sin\alpha=MP$， $\cos\alpha=OM$， $\tan\alpha=AT$.

11、角三角函数的基本关系： $(1)\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\left(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\right)$；

$(2)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ $\left(\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha,\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)$. .（3） 倒数关系： $\tan\alpha\cot\alpha=1$

12、函数的诱导公式：

$(1)\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\ (k\in\mathbb{Z})$.

$(2)\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

$(3)\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

$(4)\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

口诀：函数名称不变，符号看象限.

$(5)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. $(6)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

口诀：正弦与余弦互换，符号看象限.

13、①的图象上所有点向左 （右）平移 $|\varphi|$ 个单位长度， 得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的 A 倍（横坐标不变），得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

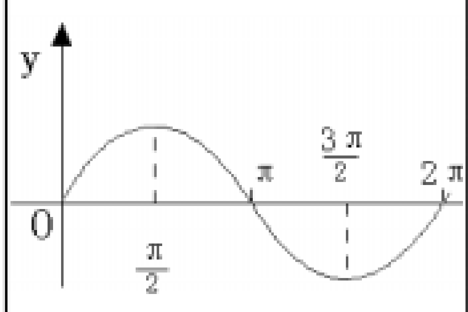
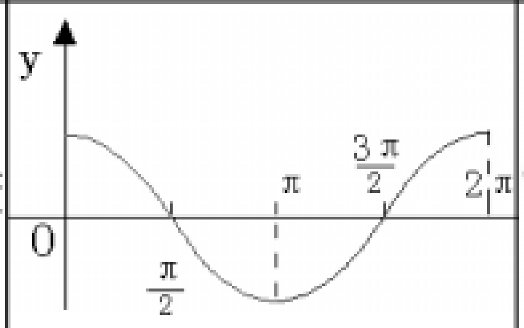
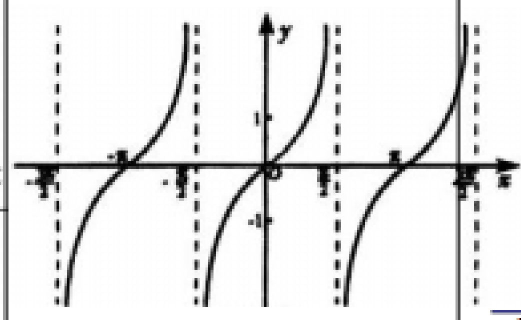
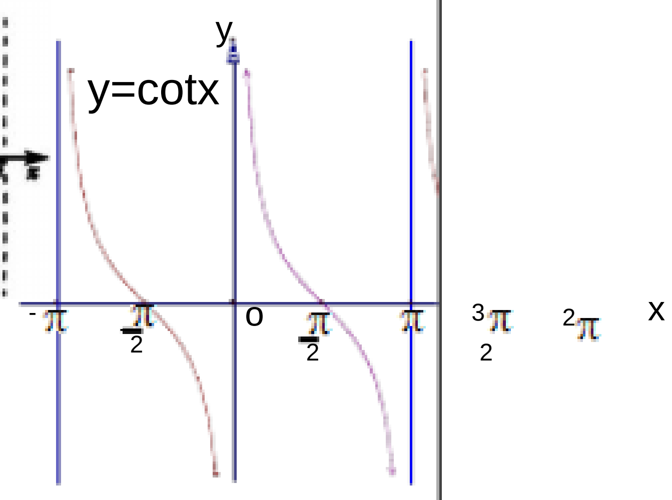
②数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin\omega x$ 的图象；再将函数 $y=\sin\omega x$ 的图象上所有点向左（右）平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的 A 倍（横坐标不变），得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

14、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的性质：

①振幅：A；②周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$；③频率：$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$；④相位：$\omega x+\varphi$；⑤初相：$\varphi$.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$，当 $x=x_1$ 时，取得最小值为 y_{min}；当 $x=x_2$ 时，取得最大值为 y_{max}，则 $A=\frac{1}{2}(y_{max}-y_{min})$，$B=\frac{1}{2}(y_{max}+y_{min})$，$\frac{T}{2}=x_2-x_1\ (x_1<x_2)$.

15、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质：

性质 \ 函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	y=cotx
图象				
定义域	R	R	$\left\{x\left\vert x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right.\right\}$	$\left\{x\left\vert x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right.\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R	R
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-1$.	当 $x=2k\pi\ (k\in Z)$时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi+\pi$ $(k\in Z)$时，$y_{min}=-1$.	既无最大值也无最小值	既无最大值也无最小值
周期性	2π	2π	π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	在	在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]\ (k\in Z)$	在	

	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$上是增函数；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$上是减函数.	上是增函数；在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in Z)$上是减函数.	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in Z)$上是增函数.	
对称性	对称中心 $(k\pi,0)(k\in Z)$ 对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$	对称中心 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)(k\in Z)$ 对称轴 $x=k\pi\ (k\in Z)$	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$ 无对称轴	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$ 无对称轴

第二章　平面向量

16、向量：既有大小，又有方向的量.　　数量：只有大小，没有方向的量.

有向线段的三要素：起点、方向、长度.　　零向量：长度为 0 的向量.

单位向量：长度等于 1 个单位的向量.

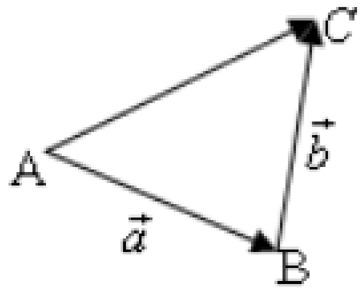
平行向量（共线向量）：方向相同或相反的非零向量．零向量与任一向量平行.

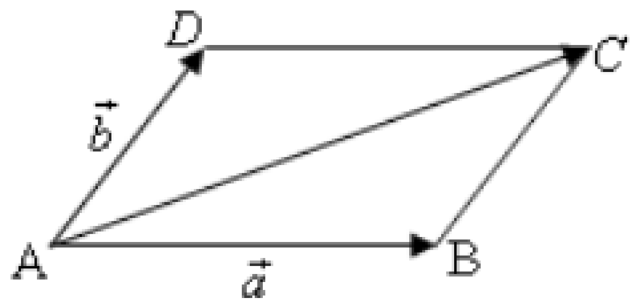
相等向量：长度相等且方向相同的向量.

17、向量加法运算：

?三角形法则的特点：首尾相连.

?平行四边形法则的特点：共起点.





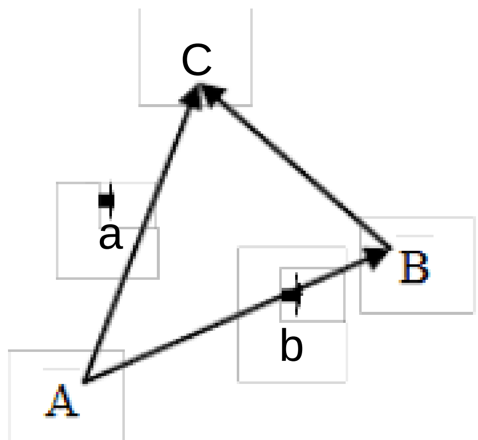
?三角形不等式：$\left||\vec a|-|\vec b|\right|\le|\vec a+\vec b|\le|\vec a|+|\vec b|$.

?运算性质：①交换律：$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$；

$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　　$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

②结合律：$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$；③ $\vec a+\vec 0=\vec 0+\vec a=\vec a$.

?坐标运算：设 $\vec a=(x_1,y_1)$，$\vec b=(x_2,y_2)$，则 $\vec a+\vec b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.



$\vec a-\vec b=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

18、向量减法运算：

?三角形法则的特点：共起点，连终点，方向指向被减向量.

?坐标运算：设 $\vec a=(x_1,y_1)$，$\vec b=(x_2,y_2)$，则 $\vec a-\vec b=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

19、向量数乘运算：

?实数 λ 与向量 $\vec a$ 的积是一个向量的运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec a$.

① $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

②当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

?运算律：① $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；② $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；③ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

?坐标运算：设 $\vec{a}=(x,y)$，则 $\lambda\vec{a}=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$.

20、向量共线定理：向量 $\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 共线，当且仅当有唯一一个实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\vec{b}\neq\vec{0}$，则当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ 共线.

21、平面向量基本定理：如果 $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1、λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$.（不共线的向量 $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ 作为这一平面内所有向量的一组基底）

22、分点坐标公式：设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点，P_1、P_2 的坐标分别是 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，当 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.（当 $\lambda=1$ 时，就为中点公式。）

23、平面向量的数量积：

? $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\ (\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},0^{\circ}\leq\theta\leq180^{\circ})$. 零向量与任一向量的数量积为 0.

?性质：设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是非零向量，则① $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. ②当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$；$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. ③ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$.

?运算律：① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

?坐标运算：设两个非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

若 $\vec{a}=(x,y)$，则 $|\vec{a}|^2=x^2+y^2$，或 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$. 设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都是非零向量，$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，则 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

知识链接：空间向量

空间向量的许多知识可由平面向量的知识类比而得．下面对空间向量在立体几何中证明，求值的应用进行总结归纳．

1、直线的方向向量和平面的法向量

?. 直线的方向向量：

若 A、B 是直线 l 上的任意两点，则 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的一个方向向量；与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量也是直线 l 的方向向量．

?. 平面的法向量：

若向量 $\vec{n}$ 所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{n}\perp\alpha$，如果 $\vec{n}\perp\alpha$，那么向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的法向量 .

?. 平面的法向量的求法（待定系数法）：

①建立适当的坐标系.

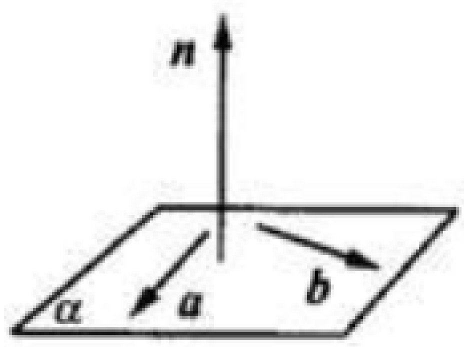
②设平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

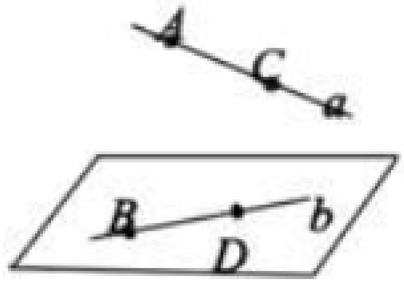
③求出平面内两个不共线向量的坐标 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

④根据法向量定义建立方程组 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$.

⑤解方程组，取其中一组解，即得平面 α 的法向量 .

（如图）





1、 用向量方法判定空间中的平行关系

?线线平行

设直线 l_1,l_2 的方向向量分别是 $\vec{a}$、$\vec{b}$，则要证明 $l_1 // l_2$，只需证明 $\vec{a} // \vec{b}$，即 $\vec{a}=k\vec{b}(k\in R)$.

即：两直线平行或重合 $\Leftrightarrow$ 两直线的方向向量共线。

?线面平行

①（法一）设直线 l 的方向向量是 $\vec{a}$，平面 α 的法向量是 $\vec{u}$，则要证明 $l // \alpha$，只需证明 $\vec{a}\perp\vec{u}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{u}=0$.

即：直线与平面平行 $\Leftrightarrow$ 直线的方向向量与该平面的法向量垂直且直线在平面外

②（法二） 要证明一条直线和一个平面平行， 也可以在平面内找一个向量与已知直线的方向向量是共线向量即可 .

?面面平行

若平面 α 的法向量为 $\vec{u}$，平面 β 的法向量为 $\vec{v}$，要证 $\alpha // \beta$，只需证 $\vec{u} // \vec{v}$，即证 $\vec{u}=\lambda\vec{v}$.

即：两平面平行或重合 $\Leftrightarrow$ 两平面的法向量共线。

3、 用向量方法判定空间的垂直关系

?线线垂直

设直线 l_1,l_2 的方向向量分别是 $\vec{a}$、$\vec{b}$，则要证明 $l_1\perp l_2$，只需证明 $\vec{a}\perp\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

即：两直线垂直 $\Leftrightarrow$ 两直线的方向向量垂直。

?线面垂直

①（法一）设直线 l 的方向向量是 $\vec{a}$，平面 α 的法向量是 $\vec{u}$，则要证明 $l\perp\alpha$，只需证明 $\vec{a} // \vec{u}$，即 $\vec{a}=\lambda\vec{u}$.

② （法二）设直线 l 的方向向量是 $\vec{a}$，平面 α 内的两个相交向量分别为 $\vec{m}$、$\vec{n}$，若 $\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{m}=0 \\ \vec{a}\cdot\vec{n}=0 \end{cases}$，则 $l\perp\alpha$.

即：直线与平面垂直 $\Leftrightarrow$ 直线的方向向量与平面的法向量共线 $\Leftrightarrow$ 直线的方向向量与平面内两条不共线直线的方向向量都垂直。

?面面垂直

若平面 α 的法向量为 $\vec{u}$，平面 β 的法向量为 $\vec{v}$，要证 $\alpha\perp\beta$，只需证 $\vec{u}\perp\vec{v}$，即证 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

即：两平面垂直 $\Leftrightarrow$ 两平面的法向量垂直。

4、利用向量求空间角

? 求异面直线所成的角

已知 a,b 为两异面直线，A，C 与 B，D 分别是 a,b 上的任意两点，a,b 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}$.

?求直线和平面所成的角

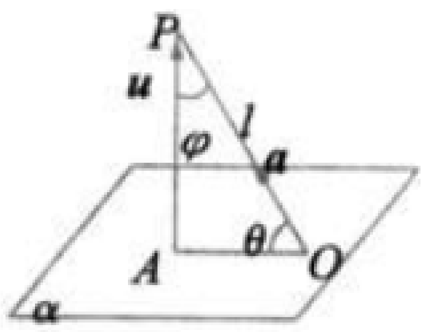
①定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角叫做这条斜线和这个平面所成的角．

②求法：设直线 l 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的法向量为 $\vec{u}$，直线与平面所成的角为 θ，$\vec{a}$ 与 $\vec{u}$ 的夹角为 φ，则

θ 为 φ 的余角或 φ 的补角

的余角 .即有：

$\sin\theta=|\cos\varphi|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|}{|\vec{a}||\vec{u}|}$.

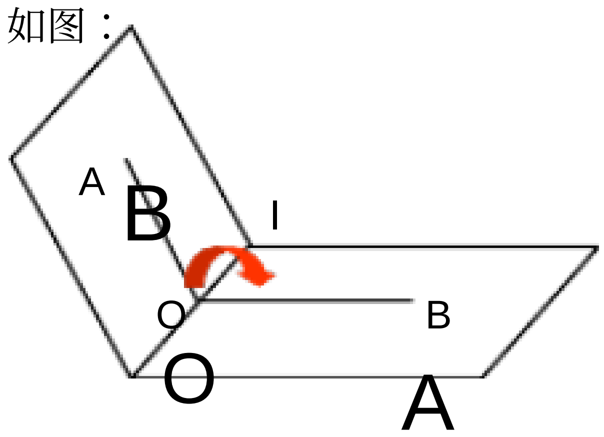


?求二面角

①定义：平面内的一条直线把平面分为两个部分，其中的每一部分叫做半平面；从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面．

二面角的平面角是指在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上任取一点 O，分别在两个半平面内作射线 $AO\perp l, BO\perp l$，则 $\angle AOB$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 .

如图：



②求法：设二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面的法向量分别为 $\vec{m}$、$\vec{n}$，再设 $\vec{m}$、$\vec{n}$ 的夹角为 φ，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ，则二面角 θ 为 $\vec{m}$、$\vec{n}$ 的夹角 φ 或其补角 $\pi-\varphi$.

根据具体图形确定 θ 是锐角或是钝角：

◆如果 θ 是锐角，则 $\cos\theta=|\cos\varphi|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$，

即 $\theta=\arccos\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$；

◆ 如果 θ 是钝角，则 $\cos\theta=-|\cos\varphi|=-\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$，

即 $\theta=\arccos\left(-\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right)$.

5、利用法向量求空间距离

? 点 Q到直线 l 距离

若 Q为直线 l 外的一点，P 在直线 l 上，$\vec{a}$ 为直线 l 的方向向量，$\vec{b}=\overrightarrow{PQ}$，则点 Q到直线 l 距离为

$$h=\frac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

⑵点 **A** 到平面 α 的距离

若点 **P** 为平面 α 外一点，点 **M** 为平面 α 内任一点，

平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，则 P 到平面 α 的距离就等于 $\overrightarrow{MP}$ 在法向量 $\vec{n}$ 方向上的投影的绝对值 .

$$\begin{aligned}\text{即 } d&=\left|\overrightarrow{MP}\right|\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{MP}\rangle\right|\\&=\left|\overrightarrow{MP}\right|\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{MP}\right|}\\&=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}\right|}{|\vec{n}|}\end{aligned}$$

⑶直线 a 与平面 α 之间的距离

当一条直线和一个平面平行时，直线上的各点到平面的距离相等。由此可知，直线到平面的距离可转化为求直线上任一点到平面的距离，即转化为点面距离。

即 $d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}\right|}{|\vec{n}|}$.

⑷两平行平面 α,β 之间的距离

利用两平行平面间的距离处处相等，可将两平行平面间的距离转化为求点面距离。

即 $d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}\right|}{|\vec{n}|}$.

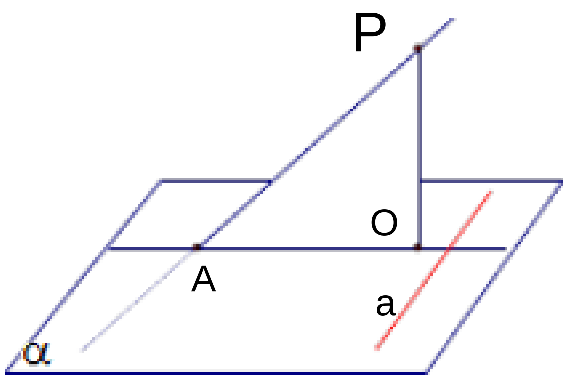
?异面直线间的距离

设向量 $\vec{n}$ 与两异面直线 a,b 都垂直，$M\in a, P\in b$，则两异面直线 a,b 间的距离 d 就是 $\overrightarrow{MP}$ 在向量 $\vec{n}$ 方向上投影的绝对值。

即 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}|}{|\vec{n}|}$.

6、三垂线定理及其逆定理

?三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.



推理模式：$\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha, O\in\alpha\\ PA\cap\alpha=A\\ a\subset\alpha, a\perp OA\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp PA$

概括为：垂直于射影就垂直于斜线.

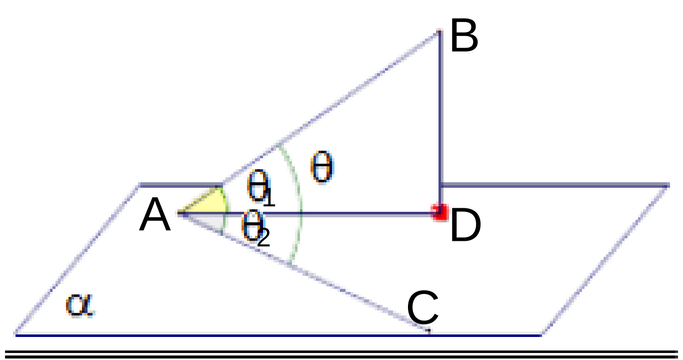
?三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

推理模式：$\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha, O\in\alpha\\ PA\cap\alpha=A\\ a\subset\alpha, a\perp AP\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AO$

概括为：垂直于斜线就垂直于射影.

7、三余弦定理

设 AC是平面 α 内的任一条直线，AD是 α 的一条斜线 AB 在 α 内的射影，且 BD⊥AD，垂足为 D.设 AB与 α (AD) 所成的角为 θ_1，AD 与 AC所成的角为 θ_2，AB 与 AC所成的角为 θ．则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.



8、面积射影定理

已知平面 β 内一个多边形的面积为 $S(S_{原})$，它在平面 α 内的射影图形的面积为 $S'(S_{射})$，平面 α 与平面 β 所成的二面角的大小为锐二面角 θ，则

$$\cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{S_{射}}{S_{原}}.$$

9、一个结论

长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1、l_2、l_3，夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则有 $l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2 \Leftrightarrow \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$.

（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例） .

第三章　三角恒等变换

24、两角和与差的正弦、余弦和正切公式：

? $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ；? $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ；

? $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ；? $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ；

? $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ （$\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha-\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)$）；

? $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ （$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$）.

25、二倍角的正弦、余弦和正切公式：

? $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. $\Rightarrow 1\pm\sin 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$

? $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow$ 升幂公式 $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ 降幂公式 $\cos^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

26、 万能公式 ：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

27、 半角公式 ：

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\boxed{=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$\Rightarrow$ （后两个不用判断符号，更加好用）

28、合一变形 $\Rightarrow$ 把两个三角函数的和或差化为“一个三角函数，一个角，一次方”的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 形式。$A\sin\alpha+B\cos\alpha=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{B}{A}$.

29、三角变换是运算化简的过程中运用较多的变换，提高三角变换能力，要学会创设条件，灵活运用三角公式，掌握运算，化简的方法和技能．常用的数学思想方法技巧如下：

（1）角的变换：在三角化简，求值，证明中，表达式中往往出现较多的相异角，可根据角与角之间的和差，倍半，互补，互余的关系，运用角的变换，沟通条件与结论中角的差异，使问题获解，对角的变形如：

① 2α 是 α 的二倍； 4α 是 2α 的二倍； α 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的二倍； $\frac{\alpha}{2}$ 是 $\frac{\alpha}{4}$ 的二倍；

② $15^{\circ}=45^{\circ}-30^{\circ}=60^{\circ}-45^{\circ}=\frac{30^{\circ}}{2}$；问： $\sin\frac{\pi}{12}=$_________；$\cos\frac{\pi}{12}=$__________；

③ $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$；④ $\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$；

⑤ $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=(\frac{\pi}{4}+\alpha)-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$；等等

（2）函数名称变换：三角变形中，常常需要变函数名称为同名函数。如在三角函数中正余弦是基础，通常化切为弦，变异名为同名。

（3）常数代换：在三角函数运算，求值，证明中，有时需要将常数转化为三角函数值，例如常数“1”的代换变形有：

$1=\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha=\tan\alpha\cot\alpha=\sin 90^{\circ}=\tan 45^{\circ}$

（4）幂的变换：降幂是三角变换时常用方法，对次数较高的三角函数式，一般采用降幂处理的方法。常用降幂公式有：____________；____________。降幂并非绝对，有时需要升幂，如对无理式 $\sqrt{1+\cos\alpha}$ 常用升幂化为有理式，常用升幂公式有：____________；____________；

（5）公式变形：三角公式是变换的依据，应熟练掌握三角公式的顺用，逆用及变形应用。

如：$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=$____________；$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=$____________；

$\tan\alpha+\tan\beta=$__________；$1-\tan\alpha\tan\beta=$__________；

$\tan\alpha-\tan\beta=$__________；$1+\tan\alpha\tan\beta=$__________；

$2\tan\alpha=$______________；$1-\tan^{2}\alpha=$____________；

$\tan 20^{\circ}+\tan 40^{\circ}+\sqrt{3}\tan 20^{\circ}\tan 40^{\circ}=$__________；

$\sin\alpha+\cos\alpha=$______________=______________；

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=$______________=______________；(其中 $\tan\varphi=$____;)

$1+\cos\alpha=$____________；$1-\cos\alpha=$______________；

（6）三角函数式的化简运算通常从：“角、名、形、幂”四方面入手；

基本规则是：见切化弦，异角化同角，复角化单角，异名化同名，高次化低次，无理化有理，特殊值与特殊角的三角函数互化。

如：$\sin 50^{\circ}(1+\sqrt{3}\tan 10^{\circ})=$______________；

$\tan\alpha-\cot\alpha=$____________________。

高中数学 必修 5 知识点

第一章 解三角形

（一）解三角形：

1、正弦定理：在 ΔABC 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边，，则有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

（R 为 ΔABC 的外接圆的半径）

2、正弦定理的变形公式：① $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

② $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；③ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

3、三角形面积公式：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

4、余弦定理：在 ΔABC 中，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，推论：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

第二章　数列

1、数列中 a_n 与 S_n 之间的关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}, & (n\geq 2).\end{cases}$$ 注意通项能否合并。

2、等差数列：

?定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，即 $a_n-a_{n-1}=d$，（$n\geq 2$，$n\in N^{+}$），那么这个数列就叫做等差数列。

?等差中项：若三数 a、A、b 成等差数列 $\Leftrightarrow A=\dfrac{a+b}{2}$

?通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

或 $a_n=pn+q$（p、q 是常数）.

?前 n 项和公式：

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

?常用性质：

①若 $m+n=p+q$ $(m,n,p,q\in N_+)$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；

②下标为等差数列的项 $(a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots)$，仍组成等差数列；

③数列 $\{\lambda a_n+b\}$（λ，b 为常数）仍为等差数列；

④若 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是等差数列，则 $\{ka_n\}$、$\{ka_n+pb_n\}$（k、p 是非零常数）、$\{a_{p+nq}\}(p,q\in N^*)$、，，也成等差数列。

⑤单调性：$\{a_n\}$ 的公差为 d，则：

i）$d>0\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为递增数列；

ii）$d<0\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为递减数列；

iii）$d=0\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为常数列；

⑥数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$ （p,q 是常数）

⑦若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，则 S_k、$S_{2k} - S_k$、$S_{3k} - S_{2k}$， 是等差数列。

3、等比数列

?定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列。

?等比中项：若三数 a、G、b 成等比数列 $\Rightarrow G^2 = ab$,（ab 同号）。反之不一定成立。

?通项公式： $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$

?前 n 项和公式： $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$

?常用性质

①若 $m + n = p + q \ (m, n, p, q \in N_+)$，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$；

② $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \cdots$ 为等比数列，公比为 q^k（下标成等差数列，则对应的项成等比数列）

③数列 $\{\lambda a_n\}$（λ 为不等于零的常数） 仍是公比为 q 的等比数列；正项等比数列 $\{a_n\}$；则 $\{\lg a_n\}$ 是公差为 $\lg q$ 的等差 数列；

④若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{ca_n\}, \{a_n^2\}, \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\},$

$\{a_n^r\}(r \in Z)$ 是等比数列，公比依次是 $q, \ q^2, \dfrac{1}{q}, \ q^r$.

⑤单调性：

$a_1 > 0, q > 1$ 或 $a_1 < 0, 0 < q < 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为递增数列；$a_1 > 0, 0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0, q > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为递减数列；

$q = 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为常数列；

$q < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 为摆动数列；

⑥既是等差数列又是等比数列的数列是常数列。

⑦若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，则 S_k、$S_{2k} - S_k$、$S_{3k} - S_{2k}$， 是等比数列 .

4、非等差、等比数列通项公式的求法

类型Ⅰ 观察法：已知数列前若干项，求该数列的通项时，一般对所给的项观察分析，寻找规律，从而根据规律写出此数列的一个通项。

类型Ⅱ 公式法：若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可用公式

$a_n = \begin{cases} S_1, & (n=1) \\ S_n - S_{n-1}, & (n \geq 2) \end{cases}$ 构造两式作差求解。

用此公式时要注意结论有两种可能，一种是“一分为二”，即分段式；另一种是“合二为一”，即 a_1 和 a_n 合为一个表达，（要先分 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况分别进行运算，然后验证能否统一）。

类型Ⅲ 累加法：

形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：$\begin{cases} a_n-a_{n-1}=f(n-1) \\ a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-2) \\ \ldots \\ a_2-a_1=f(1) \end{cases}$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相加，可得：$a_n=f(n-1)+f(n-2)+\ldots f(2)+f(1)+a_1,(n\geq 2)$

①若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；

② 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；

③若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和；

④若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和.

类型Ⅳ 累乘法：

形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\right)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：$\begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1) \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-2) \\ \ldots \\ \dfrac{a_2}{a_1}=f(1) \end{cases}$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相乘，可得：$a_n=f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1)a_1,(n\geq 2)$

有时若不能直接用，可变形成这种形式，然后用这种方法求解。

类型Ⅴ 构造数列法：

㈠形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（其中 p,q 均为常数且 $p\neq 0$）型的递推式：

（1）若 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若 $q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；

（3）若 $p\neq 1$ 且 $q\neq 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求. 方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，展开移项整理得 $a_{n+1}=pa_n+(p-1)\lambda$，与题设 $a_{n+1}=pa_n+q$ 比较系数（待定系数法）得 $\lambda=\dfrac{q}{p-1},(p\neq 0)\Rightarrow a_{n+1}+\dfrac{q}{p-1}=p(a_n+\dfrac{q}{p-1})\Rightarrow a_n+\dfrac{q}{p-1}=p(a_{n-1}+\dfrac{q}{p-1})$，即 $\left\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\right\}$ 构成以 $a_1+\dfrac{q}{p-1}$ 为首项，以 p 为公比的等比数列. 再利用等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\right\}$ 的通项整理可得

a_n.

法二：由 $a_{n+1}=pa_n+q$ 得 $a_n=pa_{n-1}+q(n\ge 2)$ 两式相减并整理得 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=p$, 即 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 构成以 a_2-a_1 为首项，以 p 为公比的等比数列．求出 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的通项再转化为 类型Ⅲ（累加法） 便可求出 a_n.

㈡形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ $(p\ne 1)$ 型的递推式 ：

?当 $f(n)$ 为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设 $a_n+An+B=p[a_{n-1}+A(n-1)+B]$，通过待定系数法确定 A、B 的值，转化成以 a_1+A+B 为首项，以 p 为公比的等比数列 $\{a_n+An+B\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+An+B\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公差为 d 时，由递推式得： $a_{n+1}=pa_n+f(n)$， $a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$ 两式相减得：

$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})+d$，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得： $b_n=pb_{n-1}+d$ 转化为 类型Ⅴ㈠ 求出 b_n，再用 类型Ⅲ（累加法） 便可求出 a_n.

?当 $f(n)$ 为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设 $a_n+\lambda f(n)=p[a_{n-1}+\lambda f(n-1)]$，通过待定系数法确定 λ 的值，转化成以 $a_1+\lambda f(1)$ 为首项，以 p 为公比的等比数列 $\{a_n+\lambda f(n)\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+\lambda f(n)\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公比为 q 时，由递推式得： $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ ——①， $a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$，两边同时乘以 q 得 $a_nq=pqa_{n-1}+qf(n-1)$ ——②，由①②两式相减得 $a_{n+1}-a_nq=p(a_n-qa_{n-1})$，即 $\frac{a_{n+1}-qa_n}{a_n-qa_{n-1}}=p$，在转化为 类型Ⅴ㈠ 便可求出 a_n.

法三：递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中 p，q 均为常数）或 $a_{n+1}=pa_n+rq^n$（其中 p，q，r 均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以 q^{n+1}，得： $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\bullet\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$，引入辅助数列 $\{b_n\}$（其中 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$），得：

$b_{n+1}=\frac{p}{q}b_n+\frac{1}{q}$ 再应用 类型Ⅴ㈠ 的方法解决。

?当 $f(n)$ 为任意数列时，可用 通法 ：

在 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 两边同时除以 p^{n+1} 可得到 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，令 $\frac{a_n}{p^n}=b_n$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，在转

化为 类型Ⅲ（累加法），求出 b_n 之后得 $a_n=p^n b_n$.

类型Ⅵ　对数变换法：

形如 $a_{n+1}=pa^q(p>0,a_n>0)$ 型的递推式：

在原递推式 $a_{n+1}=pa^q$ 两边取对数得 $\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p$，令 $b_n=\lg a_n$ 得：$b_{n+1}=qb_n+\lg p$，化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型，求出 b_n 之后得 $a_n=10^{b_n}$.（注意：底数不一定要取 10，可根据题意选择）。

类型Ⅶ　倒数变换法：

形如 $a_{n-1}-a_n=pa_{n-1}a_n$（p 为常数且 $p\neq0$）的递推式：两边同除于 $a_{n-1}a_n$，转化为 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+p$ 形式，化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式，再求 a_n；

还有形如 $a_{n+1}=\frac{ma_n}{pa_n+q}$ 的递推式，也可采用取倒数方法转化成 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{m}{q}\frac{1}{a_n}+\frac{m}{p}$ 形式，化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式，再求 a_n.

类型Ⅷ　形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 型的递推式：

用待定系数法，化为特殊数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 的形式求解。方法为：设 $a_{n+2}-ka_{n+1}=h(a_{n+1}-ka_n)$，比较系数得 $h+k=p,-hk=q$，可解得 $h、k$，于是 $\{a_{n+1}-ka_n\}$ 是公比为 h 的等比数列，这样就化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型。

总之，求数列通项公式可根据数列特点采用以上不同方法求解，对不能转化为以上方法求解的数列，可用归纳、猜想、证明方法求出数列通项公式 a_n.

5、非等差、等比数列前 n 项和公式的求法

?错位相减法

①若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，则数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的求和就要采用此法 .

②将数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的每一项分别乘以 $\{b_n\}$ 的公比，然后在错位相减，进而可得到数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 .

此法是在推导等比数列的前 n 项和公式时所用的方法 .

?裂项相消法

一般地，当数列的通项 $a_n=\frac{c}{(an+b_1)(an+b_2)}$ $(a,b_1,b_2,c$为常数）时，往往可将 a_n 变成两项的差，采用裂项相消法求和 .

可用待定系数法进行裂项：

设 $a_n=\frac{\lambda}{an+b_1}-\frac{\lambda}{an+b_2}$，通分整理后与原式相比较，根据对应项系数相等得 $\lambda=\frac{c}{b_2-b_1}$，从而可得

$$\frac{c}{(an+b_1)(an+b_2)}=\frac{c}{(b_2-b_1)}(\frac{1}{an+b_1}-\frac{1}{an+b_2}).$$

常见的拆项公式有：

① $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

② $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$;

③ $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

④ $C_n^{m-1}=C_{n+1}^{m}-C_n^{m}$;

⑤ $n\cdot n!=(n+1)!-n!$.

?分组法求和

有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可 .一般分两步：①找通向项公式②由通项公式确定如何分组 .

?倒序相加法

如果一个数列 $\{a_n\}$，与首末两项等距的两项之和等于首末两项之和， 则可用把正着写与倒着写的两个和式相加，就得到了一个常数列的和，这种求和方法称为倒序相加法。特征： $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots$

?记住常见数列的前 n 项和：

① $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

② $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

③ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

第三章 不等式

§3.1 、不等关系与不等式

1、不等式的基本性质

①（对称性） $a>b\Leftrightarrow b>a$

②（传递性） $a>b,b>c\Rightarrow a>c$

③（可加性） $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

（同向可加 性） $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

（异向可减 性） $a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$

④（可积性） $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

⑤（同向正数 可乘性） $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

（异向正数 可除性） $a>b>0,0<c<d\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

⑥（平方法则） $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in N,且n>1)$

⑦（开方法则） $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N,且n>1)$

⑧（倒数法则） $a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b};a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2、几个重要不等式

① $a^2+b^2\ge 2ab\ (a,\ b\in R)$，（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）．变形公式：$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

②（基本不等式） $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ (a,\ b\in R^+)$，（当且仅当 $a=b$ 时取到等号）．

变形公式：$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

用基本不等式求最值时（积定和最小，和定积最大），要注意满足三个条件"一正、二定、三相等"．

③（三个正数的算术—几何平均不等式） $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\ (a、b、c\in R^+)$（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）．

④ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\ (a,\ b\in R)$

（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）．

⑤ $a^3+b^3+c^3\ge 3abc(a>0,b>0,c>0)$

（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）．

⑥若 $ab>0$,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2$（当仅当 a=b 时取等号）

若 $ab<0$,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\le -2$（当仅当 a=b 时取等号）

⑦ $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

其中 $(a>b>0,\ m>0,\ n>0)$

规律：小于 1 同加则变大，大于 1 同加则变小．

⑧当 $a>0$ 时，$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a.$

⑨绝对值三角不等式 $|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|.$

3、几个著名不等式

①平均不等式：$\dfrac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

$(a,\ b \in R^{+})$,（当且仅当 $a=b$ 时取 "=" 号）.

（即调和平均 $\le$几何平均 $\le$算术平均 $\le$平方平均）.

变形公式：

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2};$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}.$$

②幂平均不等式：

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \ge \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2.$$

③二维形式的三角不等式：

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \ge \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$(x_1, y_1, x_2, y_2 \in R)$.

④二维形式的柯西不等式： $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2\ (a,b,c,d \in R)$. 当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立 .

⑤三维形式的柯西不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

⑥一般形式的柯西不等式：$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$.

⑦向量形式的柯西不等式：

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是两个向量，则 $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$, 当且仅当 $\vec{\beta}$ 是零向量，或存在实数 k，使 $\vec{\alpha}=k\vec{\beta}$ 时，等号成立 .

⑧排序不等式（排序原理）：设 $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ 为两组实数 . $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 的任一排列，则 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1 \le a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n \le a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.（反序和 $\le$乱序和 $\le$顺序和 ）

当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\ldots=b_n$ 时，反序和等于顺序和 .

⑨琴生不等式 ：（特例：凸函数、凹函数）

若定义在某区间上的函数 $f(x)$，对于定义域中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \ne x_2)$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ 或 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

则称 $f(x)$ 为凸（或凹）函数 .

4、不等式证明的几种常用方法

常用方法有： 比较法（作差，作商法） 、综合法、分析法；

其它方法有：换元法、反证法、放缩法、构造法，函数单调性法，数学归纳法 等.

常见不等式的放缩方法：

①舍去或加上一些项，如 $(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(a+\frac{1}{2})^2$；

②将分子或分母放大（缩小），如

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)},\quad \frac{1}{k^2}>\frac{1}{k(k+1)},$$

$$(\frac{2}{2\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\Rightarrow)\ \frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}(k\in N^*,k>1)$$ 等.

5、一元二次不等式的解法

求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(或<0)$

$(a\neq 0,\Delta=b^2-4ac>0)$ 解集的步骤：

一化：化二次项前的系数为正数.

二判：判断对应方程的根.

三求：求对应方程的根.

四画：画出对应函数的图象.

五解集：根据图象写出不等式的解集.

规律：当二次项系数为正时，小于取中间，大于取两边.

6、高次不等式的解法：穿根法.

分解因式，把根标在数轴上，从右上方依次往下穿（奇穿偶切），结合原式不等号的方向，写出不等式的解集.

7、分式不等式的解法：先移项通分标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

（“$<$或$\leq$”时同理）

规律：把分式不等式等价转化为整式不等式求解.

8、无理不等式的解法：转化为有理不等式求解

? $\sqrt{f(x)}>a(a>0)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)>a^2 \end{cases}$

? $\sqrt{f(x)}<a(a>0)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)<a^2 \end{cases}$

? $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

? $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

? $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

规律：把无理不等式等价转化为有理不等式，诀窍在于从“小”的一边分析求解 .

9、指数不等式的解法：

?当 $a > 1$ 时，$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

?当 $0 < a < 1$ 时，$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

规律：根据指数函数的性质转化 .

10、对数不等式的解法

?当 $a > 1$ 时，$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

?当 $0 < a < 1$ 时，$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$.

规律：根据对数函数的性质转化 .

11、含绝对值不等式的解法：

?定义法：$|a| = \begin{cases} a & (a \ge 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$.

?平方法：$|f(x)| \le |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \le g^2(x)$.

?同解变形法，其同解定理有：

① $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a (a \ge 0)$;

② $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ 或 $x \le -a (a \ge 0)$;

③ $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x) \ (g(x) \ge 0)$

④ $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$ 或 $f(x) \le -g(x) \ (g(x) \ge 0)$

规律：关键是去掉绝对值的符号 .

12、含有两个（或两个以上）绝对值的不等式的解法：

规律：找零点、划区间、分段讨论去绝对值 、每段中取交集，最后取各段的并集 .

13、含参数的不等式的解法

解形如 $ax^2 + bx + c > 0$ 且含参数的不等式时，要对参数进行分类讨论，分类讨论的标准有：

?讨论 a 与 0 的大小；

?讨论 Δ 与 0 的大小；

?讨论两根的大小 .

14、恒成立问题

?不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

①当 $a=0$ 时 $\Rightarrow b=0, c>0;$

②当 $a\neq 0$ 时 $\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0. \end{cases}$

?不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

①当 $a=0$ 时 $\Rightarrow b=0, c<0;$

②当 $a\neq 0$ 时 $\Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0. \end{cases}$

? $f(x)<a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{max}<a;$

$f(x)\leq a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{max}\leq a;$

? $f(x)>a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{min}>a;$

$f(x)\geq a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{min}\geq a.$

15、线性规划问题

?二元一次不等式所表示的平面区域的判断：

法一：取点定域法：

由于直线 $Ax+By+C=0$ 的同一侧的所有点的坐标代入 $Ax+By+C$ 后所得的实数的符号相同 .所以，在实际判断时，往往只需在直线某一侧任取一特殊点 (x_0, y_0)（如原点），由 Ax_0+By_0+C 的正负即可判断出 $Ax+By+C>0$ (或 <0) 表示直线哪一侧的平面区域 .

即：直线定边界，分清虚实；选点定区域，常选原点 .

法二：根据 $Ax+By+C>0$（或 <0），观察 B 的符号与不等式开口的符号，若同号， $Ax+By+C>0$（或 <0) 表示直线上方的区域；若异号，则表示直线上方的区域 .即：同号上方，异号下方 .

?二元一次不等式组所表示的平面区域：

不等式组表示的平面区域是各个不等式所表示的平面区域的公共部分 .

?利用线性规划求目标函数 $z=Ax+By$（A, B 为常数）的最值：

法一：角点法：

如果目标函数 $z=Ax+By$ （x、y 即为公共区域中点的横坐标和纵坐标）的最值存在，则这些最值都在该

公共区域的边界角点处取得，将这些角点的坐标代入目标函数，得到一组对应 z 值，最大的那个数为目标函数 z 的最大值，最小的那个数为目标函数 z 的最小值

法二：画——移——定——求：

第一步，在平面直角坐标系中画出可行域；第二步，作直线 $l_0: Ax+By=0$，平移直线 l_0（据可行域，将直线 l_0 平行移动）确定最优解；第三步，求出最优解 (x,y)；第四步，将最优解 (x,y) 代入目标函数 $z=Ax+By$ 即可求出最大值或最小值 .

第二步中 最优解的确定方法：

利用 z 的几何意义：$y=-\frac{A}{B}x+\frac{z}{B}$，$\frac{z}{B}$ 为直线的纵截距 .

①若 $B>0$，则使目标函数 $z=Ax+By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处，z 取得最大值，使直线的纵截距最小的角点处，z 取得最小值；

②若 $B<0$，则使目标函数 $z=Ax+By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处，z 取得最小值，使直线的纵截距最小的角点处，z 取得最大值 .

?常见的目标函数的类型：

①“截距”型：$z=Ax+By$;

②“斜率”型：$z=\frac{y}{x}$ 或 $z=\frac{y-b}{x-a}$;

③“距离”型：$z=x^2+y^2$ 或 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

$z=(x-a)^2+(y-b)^2$ 或 $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

在求该“三型”的目标函数的最值时，可结合线性规划与代数式的几何意义求解，从而使问题简单化 .

数学选修 2－1

第一章：命题与逻辑结构

知识点：

1、命题：用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句 .

真命题：判断为真的语句 . 假命题：判断为假的语句 .

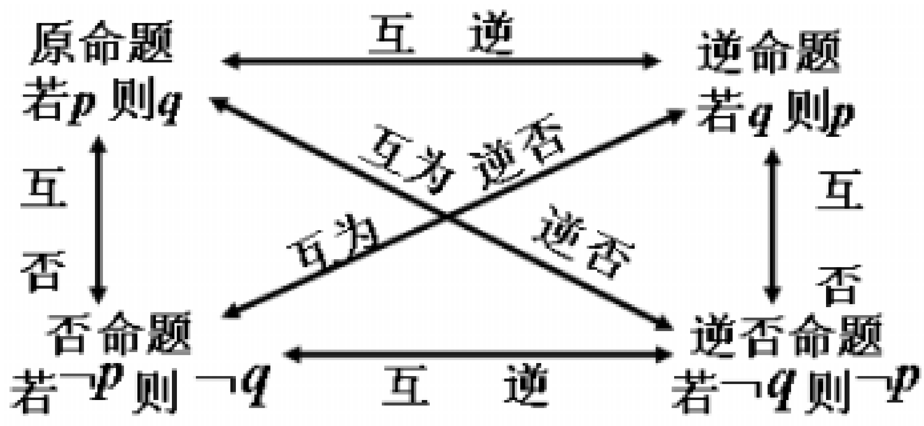
2、“若 p，则 q”形式的命题中的 p 称为命题的条件，q 称为命题的结论 .

3、对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，则这两个命题称为互逆命题 . 其中一个命题称为原命题，另一个称为原命题的逆命题。若原命题为“若 p，则 q”，它的逆命题为“若 q，则 p”.

4、对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，则这两个命题称为互否命题 . 中一个命题称为原命题，另一个称为原命题的否命题 . 若原命题为“若 p，则 q”，则它的否命题为“若 $\neg p$，则 $\neg q$”.

5、对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，则这两个命题称为互为逆否命题。

其中一个命题称为原命题，另一个称为原命题的逆否命题。若原命题为“若 p，则 q”，则它的否命题为“若 $\neg q$，则 $\neg p$”。



6、四种命题的真假性：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

四种命题的真假性之间的关系：

(1)两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

7、若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

若 $p \Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件（充分必要条件）.

8、用联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来，得到一个新命题，记作 $p \wedge q$.

当 p、q 都是真命题时，$p \wedge q$ 是真命题；当 p、q 两个命题中有一个命题是假命题时，$p \wedge q$ 是假命题.

用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来，得到一个新命题，记作 $p \vee q$.

当 p、q 两个命题中有一个命题是真命题时，$p \vee q$ 是真命题；当 p、q 两个命题都是假命题时，$p \vee q$ 是假命题.

对一个命题 p 全盘否定，得到一个新命题，记作 $\neg p$. 若 p 是真命题，则 $\neg p$ 必是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 必是真命题.

9、短语“对所有的”、“对任意一个”在逻辑中通常称为全称量词，用“$\forall$”表示.

含有全称量词的命题称为全称命题.

全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”，记作“$\forall x \in M$，$p(x)$”.

短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常称为存在量词，用“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题称为特称命题.

特称命题“存在 M 中的一个 x，使 $p(x)$ 成立”，记作“$\exists x \in M$，$p(x)$”.

10、全称命题 p：$\forall x \in M$，$p(x)$，它的否定 $\neg p$：$\exists x \in M$，$\neg p(x)$。全称命题的否定是特称命题。

特称命题 p：$\exists x \in M$，$p(x)$，它的否定 $\neg p$：$\forall x \in M$，$\neg p(x)$。特称命题的否定是全称命题。

第二章：圆锥曲线

知识点：

1、求曲线的方程（点的轨迹方程）的步骤：建、设、限、代、化

①建立 适当的 直角坐标系；

②设动点 $M(x,y)$ 及其他的点；

③找出满足限制条件的等式；

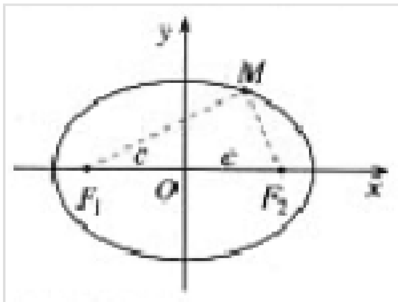
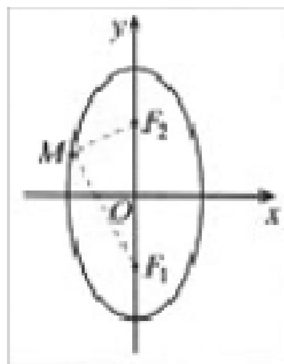
④将点的坐标代入等式；

⑤化简方程，并验证（查漏除杂）。

2、平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为椭圆。这两个定点称为椭圆的焦点，两焦点的距离称为椭圆的焦距。$|MF_1|+|MF_2|=2a\ (2a>2c)$

3、椭圆的几何性质：

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上

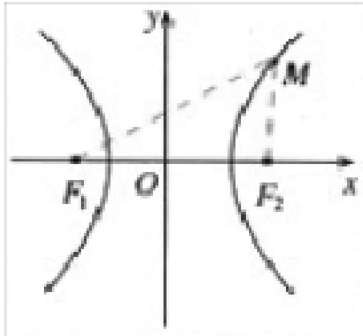
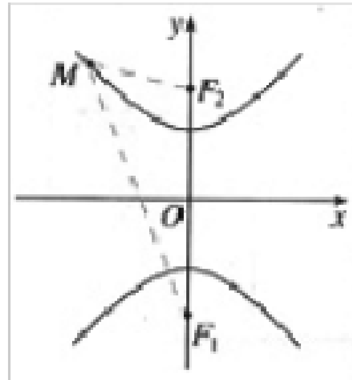
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
第一定义	到两定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a$，即 $\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$ （$2a>\|F_1F_2\|$）	
第二定义	与一定点的距离和到一定直线的距离之比为常数 e，即 $\frac{MF}{d}=e$ $(0<e<1)$	
范围	$-a\le x\le a$ 且 $-b\le y\le b$	$-b\le x\le b$ 且 $-a\le y\le a$
顶点	$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$、$A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$、$B_2(b,0)$
轴长	长轴的长 $=2a$ 短轴的长 $=2b$	
对称性	关于 x 轴、y 轴对称，关于原点中心对称	
焦点	$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c\quad(c^2=a^2-b^2)$	
离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\quad(0<e<1)$	
准线方程	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
焦半径 $M(x_0,y_0)$	左焦半径：$\|MF_1\|=a+ex_0$ 右焦半径：$\|MF_2\|=a-ex_0$	下焦半径：$\|MF_1\|=a+ey_0$ 上焦半径：$\|MF_2\|=a-ey_0$
焦点三角形面积	$S_{\triangle MF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}\quad(\theta=\angle F_1MF_2)$	
通径	过焦点且垂直于长轴的弦叫通径：$\|HH'\|=\frac{b^2}{a}$	
（焦点）弦长公式	$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\|AB\|=\sqrt{1+k^2}\|x_1-x_2\|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2-4x_1x_2}$	

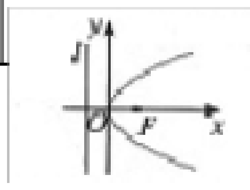
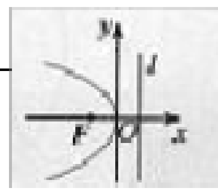
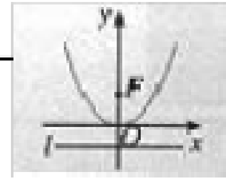
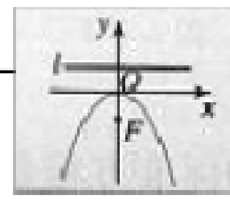
4、设 M 是椭圆上任一点，点 M 到 F_1 对应准线的距离为 d_1，点 M 到 F_2 对应准线的距离为 d_2，则 $\frac{|MF_1|}{d_1}=\frac{|MF_2|}{d_2}=e$。

5、平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为双曲线。这两个定点称为双曲线的

焦点，两焦点的距离称为双曲线的焦距。 $\left||MF_1|-|MF_2|\right|=2a\ (2a<2c)$

6、双曲线的几何性质：

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$
第一定义	到两定点 F_1、F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$，即 $\left\|\,\|MF_1\|-\|MF_2\|\,\right\|=2a$ （$0<2a<\|F_1F_2\|$）	
第二定义	与一定点的距离和到一定直线的距离之比为常数 e，即 $\frac{MF}{d}=e\ (e>1)$	
范围	$x\le -a$ 或 $x\ge a$，$y\in R$	$y\le -a$ 或 $y\ge a$，$x\in R$
顶点	$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$、$A_2(0,a)$
轴长	实轴的长 $=2a$　虚轴的长 $=2b$	
对称性	关于 x 轴、y 轴对称，关于原点中心对称	
焦点	$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c\quad (c^2=a^2+b^2)$	
离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\quad (e>1)$	
准线方程	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
渐近线方程	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
焦半径 $M(x_0,y_0)$	M 在右支 $\begin{cases}左焦：\|MF_1\|=ex_0+a\\ 右焦：\|MF_2\|=ex_0-a\end{cases}$ M 在左支 $\begin{cases}左焦：\|MF_1\|=-ex_0-a\\ 右焦：\|MF_2\|=-ex_0+a\end{cases}$	M 在上支 $\begin{cases}左焦：\|MF_1\|=ey_0+a\\ 右焦：\|MF_2\|=ey_0-a\end{cases}$ M 在下支 $\begin{cases}左焦：\|MF_1\|=-ey_0-a\\ 右焦：\|MF_2\|=-ey_0+a\end{cases}$
焦点三角形面积	$S_{\triangle MF_1F_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}\quad (\theta=\angle F_1MF_2)$	

通径	过焦点且垂直于长轴的弦叫通径：$\left\|HH'\right\|=\frac{b^2}{a}$			
图形				

7、实轴和虚轴等长的双曲线称为等轴双曲线。

8、设 M 是双曲线上任一点，点 M 到 F_1 对应准线的距离为 d_1，点 M 到 F_2 对应准线的距离为 d_2，则 $\frac{|MF_1|}{d_1}=\frac{|MF_2|}{d_2}=e$。

9、平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹称为抛物线．定点 F 称为抛物线的焦点，定直线 l 称为抛物线的准线.

10、过抛物线的焦点作垂直于对称轴且交抛物线于 A、B 两点的线段 AB，称为抛物线的“通径”，即 $|AB|=2p$.

11、焦半径公式：

若点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上，焦点为 F，则 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$；

若点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=-2px\ (p>0)$ 上，焦点为 F，则 $|PF|=-x_0+\frac{p}{2}$；

若点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$ 上，焦点为 F，则 $|PF|=y_0+\frac{p}{2}$；

若点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=-2py\ (p>0)$ 上，焦点为 F，则 $|PF|=-y_0+\frac{p}{2}$.

12、抛物线的几何性质：

标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
定义	与一定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线 (定点 F 不在定直线 l 上)			
顶点	$(0,0)$			
离心率	$e=1$			
对称轴	x 轴		y 轴	
范围	$x\ge 0$	$x\le 0$	$y\ge 0$	$y\le 0$
焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
焦半径 $M(x_0,y_0)$	$\lvert MF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert MF\rvert=-x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert MF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$	$\lvert MF\rvert=-y_0+\frac{p}{2}$
通径	过抛物线的焦点且垂直于对称轴的弦称为通径： $\lvert HH'\rvert=2p$			
焦点弦长公式	$\lvert AB\rvert=x_1+x_2+p$			
参数 p 的几何意义	参数 p 表示焦点到准线的距离， p 越大，开口越阔			

关于抛物线焦点弦的几个结论：

设 AB 为过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 焦点的弦， $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的倾斜角为 θ，则

? $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$, $y_1y_2=-p^2$;　　? $\lvert AB\rvert=\frac{2p}{\sin^2\theta}$;

? 以 AB 为直径的圆与准线相切；

? 焦点 F 对 A、B 在准线上射影的张角为 $\frac{\pi}{2}$；

? $\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{P}$.

第三章：

空间向量知识点：

1、空间向量的概念：

（1）在空间，具有大小和方向的量称为空间向量.

（2）向量可用一条有向线段来表示．有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向．

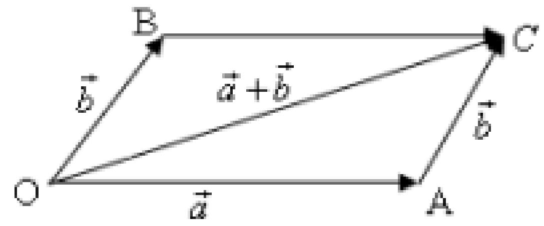
（3）向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的模（或长度），记作 $|\overrightarrow{AB}|$．

（4）模（或长度）为 0 的向量称为零向量；模为 1 的向量称为单位向量．

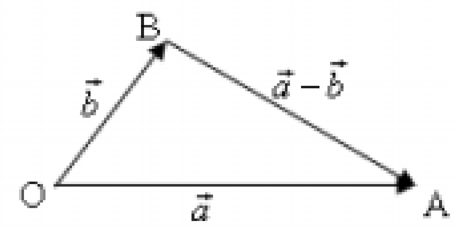
（5）与向量 $\vec{a}$ 长度相等且方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$．

（6）方向相同且模相等的向量称为相等向量．

2、空间向量的加法和减法：



（1）求两个向量和的运算称为向量的加法，它遵循平行四边形法则．即：在空间以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，则以 O 起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，这种求向量和的方法，称为向量加法的平行四边形法则．



（2）求两个向量差的运算称为向量的减法，它遵循三角形法则．即：在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$．

3、实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，称为向量的数乘运算．当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$．$\lambda\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍．

4、设 λ，μ 为实数，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 是空间任意两个向量，则数乘运算满足分配律及结合律．

分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$．

5、如果表示空间的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量称为共线向量或平行向量，并规定零向量与任何向量都共线．

6、向量共线的充要条件：对于空间任意两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$．

7、平行于同一个平面的向量称为共面向量．

8、向量共面定理：空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在有序实数对 x，y，使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或对空间任一定点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或若四点 P，A，B，C 共面，则 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\,(x+y+z=1)$．

9、已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB$ 称为向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$．两个向量夹角的取值范围是：$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$．

10、对于两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，若 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 互相垂直，记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$．

11、已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 称为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$．即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$．零向量与任何向量的数量积为 0．

12、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的投影 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 的乘积．

13 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，$\vec{e}$ 为单位向量，则有

$(1)\ \vec{e}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{e}\rangle$；$(2)\ \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{a}||\vec{b}| & (\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{同向})\\ -|\vec{a}||\vec{b}| & (\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{反向})\end{cases}$，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；(4) $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；(5) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$.

14 量数乘积的运算律：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；　(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；　(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

15、空间向量基本定理：若三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共面，则对空间任一向量 $\vec{p}$，存在实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

16、三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共面，则所有空间向量组成的集合是 $\{\vec{p}\mid\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},x,y,z\in R\}$．这个集合可看作是由向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 生成的，$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$称为空间的一个基底，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 称为基向量．空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

17、设 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 为有公共起点 O 的三个两两垂直的单位向量（称它们为单位正交基底），以 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 的公共起点 O 为原点，分别以 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$．则对于空间任意一个向量 $\vec{p}$，一定可以把它平移，使它的起点与原点 O 重合，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$．存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$．把 x，y，z 称作向量 $\vec{p}$ 在单位正交基底 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 下的坐标，记作 $\vec{p}=(x,y,z)$．此时，向量 $\vec{p}$ 的坐标是点 P 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 (x,y,z)

18、设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

（1）$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

（2）$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$.

（3）$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

（4）$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

（5）若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为非零向量，则 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

（6）若 $\vec{b}\neq\vec{0}$，则 $\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2$.

（7）$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

（8）$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

（9）$A(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$，则 $d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

19、在空间中，取一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P 的位置可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示．向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量.

20、空间中任意一条直线 l 的位置可以由 l 上一个定点 A 以及一个定方向确定．点 A 是直线 l 上一点，向量 $\vec{a}$ 表示直线 l 的方向向

量，则对于直线 l 上的任意一点 P，有 $\overrightarrow{AP}=t\vec{a}$，这样点 A 和向量 $\vec{a}$ 不仅可以确定直线 l 的位置，还可以具体表示出直线 l 上的任意一点.

21、空间中平面 α 的位置可以由 α 内的两条相交直线来确定. 设这两条相交直线相交于点 O，它们的方向向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$．P 为平面 α 上任意一点，存在有序实数对 (x,y) 使得 $\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$，这样点 O 与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 就确定了平面 α 的位置.

22、直线 l 垂直 α，取直线 l 的方向向量 $\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 称为平面 α 的法向量.

23、若空间不重合两条直线 a，b 的方向向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，

则 $a// b\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}\ (\lambda\in R)$，$a\perp b\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

24、若直线 a 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，且 $a\not\subset\alpha$，
则 $a//\alpha\Leftrightarrow \vec{a}//\alpha\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$a\perp\alpha\Leftrightarrow \vec{a}\perp\alpha\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{n}\Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{n}$.

25、若空间不重合的两个平面 α，β 的法向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则 $\alpha//\beta\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$，$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

26、设异面直线 a，b 的夹角为 θ，方向向量为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，其夹角为 φ，则有 $\cos\theta=\left|\cos\varphi\right|=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$.

27、设直线 l 的方向向量为 $\vec{l}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，l 与 α 所成的角为 θ，$\vec{l}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 φ，则有 $\sin\theta=\left|\cos\varphi\right|=\dfrac{\left|\vec{l}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{l}\right|\left|\vec{n}\right|}$.

28、设 $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面 α，β 的法向量，则向量 $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 的夹角（或其补角）就是二面角的平面角的大小. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ，则 $\left|\cos\theta\right|=\dfrac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}$.

29、点 A 与点 B 之间的距离可以转化为两点对应向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 计算.

30、在直线 l 上找一点 P，过定点 A 且垂直于直线 l 的向量为 $\vec{n}$，则定点 A 到直线 l 的距离为 $d=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.

31、点 P 是平面 α 外一点，A 是平面 α 内的一定点，$\vec{n}$ 为平面 α 的一个法向量，则点 P 到平面 α 的距离为 $d=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.

数学选修 2-2

导数及其应用

一.导数概念的引入

1. 导数的物理意义：

瞬时速率。一般的，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. 导数的几何意义：

曲线的切线 .通过图像 ,我们可以看出当点 P_n 趋近于 P 时，直线 PT 与曲线相切。 容易知道，割线 PP_n 的斜率是 $k_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$，当点 P_n 趋近于 P 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k，即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$

3. 导函数：当 x 变化时， $f'(x)$ 便是 x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的导函数． $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y',即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

二.导数的计算

基本初等函数的导数公式 ：

1 若 $f(x)=c$（c 为常数），则 $f'(x)=0$；

2 若 $f(x)=x^{\alpha}$,则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$；

3 若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\cos x$

4 若 $f(x)=\cos x$,则 $f'(x)=-\sin x$；

5 若 $f(x)=a^x$,则 $f'(x)=a^x\ln a$

6 若 $f(x)=e^x$,则 $f'(x)=e^x$

7 若 $f(x)=\log_a^x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

8 若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$

导数的运算法则

1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

2. $[f(x)\bullet g(x)]'=f'(x)\bullet g(x)+f(x)\bullet g'(x)$

3. $[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)\bullet g(x)-f(x)\bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$

复合函数求导 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$,称则 y 可以表示成为 x 的函数 ,即 $y=f(g(x))$ 为一个复合函数 $y'=f'(g(x))\bullet g'(x)$

三.导数在研究函数中的应用

1.函数的单调性与导数 ：

一般的 ,函数的单调性与其导数的正负有如下关系： 在某个区间 (a,b) 内

(1)如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间单调递增； (2)如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间单调递减 .

2.函数的极值与导数

极值反映的是函数在某一点附近的大小情况 .

求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法是 ：（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$,右侧 $f'(x)<0$,那么 $f(x_0)$ 是极大值（ 2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$,右侧 $f'(x)>0$,那么 $f(x_0)$ 是极小值；

4.函数的最大 (小)值与导数

求函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤： （1）求函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的极值；
（2） 将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$， $f(b)$ 比较，其中最大的是一个最大值，最小的是最小值 .

推理与证明

考点一 合情推理与类比推理

根据一类事物的部分对象具有某种性质 ,退出这类事物的所有对象都具有这种性质的推理 ,叫做归纳推理 ,归纳是从特殊到一般的过程 ,它属于合情推理

根据两类不同事物之间具有某些类似 (或一致)性,推测其中一类事物具有与另外一类事物类似的性质的推理 ,叫做类比推理 .

类比推理的一般步骤 :

(1) 找出两类事物的相似性或一致性 ;
(2) 用一类事物的性质去推测另一类事物的性质 ,得出一个明确的命题 (猜想);
(3) 一般的 ,事物之间的各个性质并不是孤立存在的 ,而是相互制约的 .如果两个事物在某些性质上相同或相似 ,那么他们在另一写性质上也可能相同或类似 ,类比的结论可能是真的 .
(4) 一般情况下 ,如果类比的相似性越多 ,相似的性质与推测的性质之间越相关 ,那么类比得出的命题越可靠 .

考点二　演绎推理 (俗称三段论)

由一般性的命题推出特殊命题的过程　,这种推理称为演绎推理　.

考点三　数学归纳法

1.　它是一个递推的数学论证方法　.

2.　步骤:A. 命题在 n=1（或 n_0）时成立，这是递推的基础；　B.假设在 n=k 时命题成立；　C.证明 n=k+1 时命题也成立 ,

完成这两步 ,就可以断定对任何自然数　(或 n>= n_0 ,且 $n \in N$)结论都成立。

考点三　证明

1.　反证法：　2、分析法：　3、综合法：

数系的扩充和复数的概念

复数的概念

(1)　复数:形如 $a+bi(a\in R,b\in R)$ 的数叫做复数,　a 和 b 分别叫它的实部和虚部　.

(2)　分类:复数 $a+bi(a\in R,b\in R)$ 中,当 $b=0$,就是实数；$b\neq 0$,叫做虚数;当 $a=0,b\neq 0$ 时,叫做纯虚数　.

(3)　复数相等 :如果两个复数实部相等且虚部相等就说这两个复数相等　.

(4)　共轭复数 :当两个复数实部相等　,虚部互为相反数时　,这两个复数互为共轭复数　.

(5)　复平面 :建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面　,x 轴叫做实轴,　y 轴除去原点的部分叫做虚轴。

(6)　两个实数可以比较大小，但两个复数如果不全是实数就不能比较大小。

复数的运算

1. 复数的加，减，乘，除按以下法则进行

设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in R)$ 则

（1）$z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i$　（2）$z_1\bullet z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$　（3）$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2}(z_2\neq 0)$

2,几个重要的结论

(1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$　(2) $z\bullet\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$　(3)若 z 为虚数 ,则 $|z|^2\neq z^2$

3.运算律

(1) $z^m\bullet z^n=z^{m+n}$;(2) $(z^m)^n=z^{mn}$;(3) $(z_1\bullet z_2)^n=z_1^n\bullet z_2^n(m,n\in R)$

4. 关于虚数单位 i 的一些固定结论：

（1）$i^2=-1$　（2）$i^3=-i$　（3）$i^4=1$　（2）$i^n+i^{n+2}+i^{n+3}+i^{n+4}=0$

数学选修　2－3

第一章　计数原理

知识点：

1、分类加法计数原理　：做一件事情，完成它有　N 类办法，在第一类办法中有　M_1 种不同的方法，在第二类办法中有　M_2 种不同的方法，……，在第 N 类办法中有 M_N 种不同的方法，那么完成这件事情共有　$M_1+M_2+\cdots+M_N$ 种不同的方法。

2、分步乘法计数原理　：做一件事，完成它需要分成　N 个步骤，做第一　步有 m1 种不同的方法，做第二步有　M_2 不同的方法，……，做第 N 步有 M_N 不同的方法 .那么完成这件事共有　$N=M_1M_2...M_N$ 种不同的方法。

3、排列 ：从 n 个不同的元素中任取　m(m≤n) 个元素，按照一定顺序 排成一列，叫做从　n 个不同元素中取出　m 个元素的一个排列

4、排列数 ：　$A^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}(m\leq n,n,m\in N)$

5、组合 ：从 n 个不同的元素中任取　m(m≤n) 个元素并成一组，叫做从　n 个不同元素中取出　m个元素的一个组合。

6、组合数：$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$，$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$C_n^m=C_n^{n-m}$；　　　　$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$

7、二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

8、展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0,1,\cdots,n)$

第二章　随机变量及其分布

1、随机变量：如果随机试验可能出现的结果可以用一个变量 X 来表示，并且 X 是随着试验的结果的不同而变化，那么这样的变量叫做随机变量. 随机变量常用大写字母 X、Y 等或希腊字母 ξ、η 等表示。

2、离散型随机变量：在上面的射击、产品检验等例子中，对于随机变量 X 可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

3、离散型随机变量的分布列：一般的，设离散型随机变量 X 可能取的值为 $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n$

X 取每一个值 $x_i(i=1,2,\ldots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=P_i$，则称表为离散型随机变量 X 的概率分布，简称分布列

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

4、分布列性质 ① $p_i\geq 0, i=1,2,\cdots$；　② $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

5、二点分布：如果随机变量 X 的分布列为：

X	1	0
P	p	q

其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则称离散型随机变量 X 服从参数 p 的二点分布

6、超几何分布：一般地，设总数为 N 件的两类物品，其中一类有 M 件，从所有物品中任取 $n(n\leq N)$ 件，这 n 件中所含这类物品件数 X 是一个离散型随机变量，则它取值为 k 时的概率为 $P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots,m)$，

其中 $m=\min\{M,n\}$，且 $n\leq N, M\leq N, n, M, N\in N^*$

7、条件概率：对任意事件 A 和事件 B，在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，叫做条件概率.记作 P(B|A)，读作 A 发生的条件下 B 的概率

8、公式：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, P(A)>0.$

9、相互独立事件：事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

10、n 次独立重复事件：在同等条件下进行的，各次之间相互独立的一种试验

11、二项分布：设在 n 次独立重复试验中某个事件 A 发生的次数，A 发生次数 ξ 是一个随机变量．如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，事件 A 不发生的概率为 q=1-p，那么在 n 次独立重复试验中 $P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$（其中 $k=0,1,\cdots,n$，$q=1-p$）于是可得随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 ξ~B(n，p)，其中 n，p 为参数

12、数学期望：一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

则称 $E\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n + \ldots$，为 ξ 的数学期望或平均数、均值，数学期望又简称为期望．是离散型随机变量。

13、方差 :$D(\xi)=(x_1-E\xi)^2\cdot P_1+(x_2-E\xi)^2\cdot P_2+\ldots\ldots+(x_n-E\xi)^2\cdot P_n$ 叫随机变量 ξ 的均方差，简称方差。

14、集中分布的期望与方差一览：

	期望	方差
两点分布	$E\xi=p$	$D\xi=pq$，$q=1-p$
二项分布，ξ ～ B（n,p）	$E\xi=np$	$D\xi=qE\xi=npq$，（$q=1-p$）

15、正态分布：

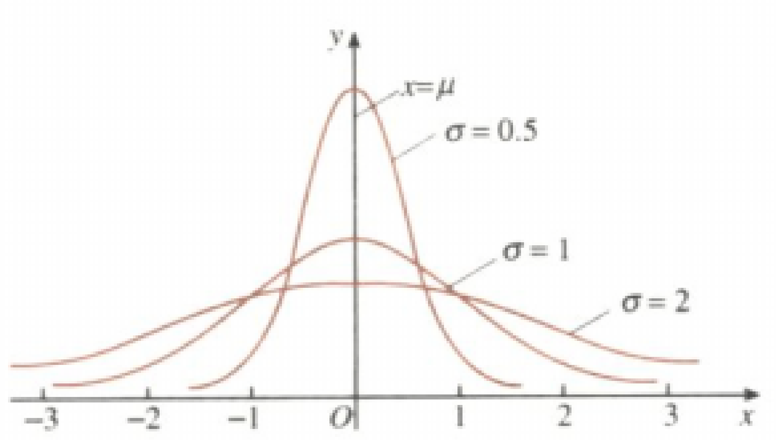
若概率密度曲线就是或近似地是函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in(-\infty,+\infty)$$

的图像，其中解析式中的实数 μ、$\sigma(\sigma>0)$ 是参数，分别表示总体的平均数与标准差.

则其分布叫正态分布 记作：$N(\mu,\sigma)$，$f(x)$ 的图象称为正态曲线。

16、基本性质：



①曲线在 x 轴的上方，与 x 轴不相交.

②曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，且在 $x=\mu$ 时位于最高点 .

③当时 $x<\mu$，曲线上升；当时 $x>\mu$，曲线下降．并且当曲线向左、右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线，向它无限靠近.

④当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定．σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散；σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中.

⑤当 σ 相同时 ,正态分布曲线的位置由期望值 μ 来决定 .

⑥正态曲线下的总面积等于 1.

17、 **3**σ 原则：

从上表看到 ,正态总体在 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 以外取值的概率 只有 4.6%,在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 以外取值的概率只有 0.3% 由于这些概率很小 ,通常称这些情况发生为小概率事件 .也就是说 ,通常认为这些情况在一次试验中几乎是不可能发生的 .

第三章 统计案例

独立性检验

假设有两个分类变量 X 和 Y，它们的值域分另为 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{y_1, y_2\}$，其样本频数列联表为：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	a+b
x_2	c	d	c+d
总计	a+c	b+d	a+b+c+d

若要推断的论述为 H_1：“X与 Y 有关系 ”，可以利用独立性检验来考察两个变量是否有关系，并且能较精确地给出这种判断的可靠程度。具体的做法是，由表中的数据算出随机变量 K^2 的值（即 K 的平方） $K^2=n(ad-bc)^2/[(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)]$，其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量，K^2 的值越大，说明 “X与 Y 有关系 ”成立的可能性越大。

$K^2\le3.841$ 时，X 与 Y 无关；$K^2>3.841$ 时，X 与 Y 有 95%可能性有关；$K^2>6.635$ 时 X 与 Y 有 99%可能性有关

回归分析

回归直线方程 $\hat{y}=a+bx$

其中 $b=\dfrac{\sum xy-\frac{1}{n}\sum x\sum y}{\sum x^2-\frac{1}{n}(\sum x^2)}=\dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}=\dfrac{SP}{SS_x}$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$

高中数学选修 4-1 知识点总结

平行线等分线段定理

平行线等分线段定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等。

推理 1：经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边。

推理 2：经过梯形一腰的中点，且与底边平行的直线平分另一腰。

平分线分线段成比例定理

平分线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

推论：平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例。

相似三角形的判定及性质

相似三角形的判定：

定义：对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形。相似三角形对应边的比值叫做相似比（或相似系数）。

由于从定义出发判断两个三角形是否相似，需考虑 6 个元素，即三组对应角是否分别相等，三组对应边是否分别成比例，显然比较麻烦。所以我们曾经给出过如下几个判定两个三角形相似的简单方法：

（1）两角对应相等，两三角形相似；

（2）两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似；

（3）三边对应成比例，两三角形相似。

预备定理：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与三角形相似。

判定定理 1：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似。简述为：两角对应相等，两三角形相似。

判定定理 2：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。简述为：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似。

判定定理 3：对于任意两个三角形，如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。简述为：三边对应成比例，两三角形相似。

引理：如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

定理：（1）如果两个直角三角形有一个锐角对应相等，那么它们相似；

（2）如果两个直角三角形的两条直角边对应成比例，那么它们相似。

定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个三角形的斜边和直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

相似三角形的性质：

（1）相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应平分线的比都等于相似比；

（2）相似三角形周长的比等于相似比；

（3）相似三角形面积的比等于相似比的平方。

相似三角形外接圆的直径比、周长比等于相似比，外接圆的面积比等于相似比的平方。

直角三角形的射影定理

射影定理：直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项；两直角边分别是它们在斜边上射影与斜边的比例中项。

圆周定理

圆周角定理：圆上一条弧所对的圆周角等于它所对的圆周角的一半。

圆心角定理：圆心角的度数等于它所对弧的度数。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等。

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角； 90 ° 的圆周角所对的弦是直径。
圆内接四边形的性质与判定定理
定理 1：圆的内接四边形的对角互补。
定理 2：圆内接四边形的外角等于它的内角的对角。
圆内接四边形判定定理：如果一个四边形的对角互补，那么这个四边形的四个顶点共圆。
推论：如果四边形的一个外角等于它的内角的对角，那么这个四边形的四个顶点共圆。
圆的切线的性质及判定定理
切线的性质定理：圆的切线垂直于经过切点的半径。
推论 1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点。
推论 2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。
切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。
弦切角的性质
弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。
与圆有关的比例线段
相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。
割线定理：从园外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等。
切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。
切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。
选修 4-4 数学知识点
一、选考内容《坐标系与参数方程》高考考试大纲要求：
1．坐标系：
① 理解坐标系的作用 .
② 了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况 .
③ 能在极坐标系中用极坐标表示点的位置，理解在极坐标系和平面直角坐标系中表示点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化 .
④ 能在极坐标系中给出简单图形（如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆）的方程 .通过比较这些图形在极坐标系和平面直角坐标系中的方程，理解用方程表示平面图形时选择适当坐标系的意义 .
2．参数方程：① 了解参数方程，了解参数的意义 .
② 能选择适当的参数写出直线、圆和圆锥曲线的参数方程 .
二、知识归纳总结：

1. 伸缩变换：设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点， 在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda\cdot x,(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y,(\mu>0).\end{cases}$ 的作用下，点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$，称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换，简称伸缩变换。

2.极坐标系的概念：在平面内取一个定点 O，叫做极点；自极点 O 引一条射线 Ox 叫做极轴；再选定一个长度单位、一个角度单位 (通常取弧度)及其正方向 (通常取逆时针方向)，这样就建立了一个极坐标系。

3. 点 M 的极坐标：设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径，记为 ρ；以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的 $\angle xOM$ 叫做点 M 的极角，记为 θ。有序数对 (ρ,θ) 叫做点 M 的极坐标，记为 $M(\rho,\theta)$.

极坐标 (ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2k\pi)(k\in Z)$ 表示同一个点。极点 O 的坐标为 $(0,\theta)(\theta\in R)$.

4.若 $\rho<0$,则 $-\rho>0$,规定点 $(-\rho,\theta)$ 与点 (ρ,θ) 关于极点对称，即 $(-\rho,\theta)$ 与 $(\rho,\pi+\theta)$ 表示同一点。

如果规定 $\rho>0,0\le\theta\le 2\pi$，那么除极点外，平面内的点可用唯一的极坐标 (ρ,θ) 表示；同时，极坐标 (ρ,θ) 表示的点也是唯一确定的。

5．极坐标与直角坐标的互化：

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$$

6。圆的极坐标方程：

在极坐标系中，以极点为圆心， r 为半径的圆的极坐标方程是 $\rho=r$；

在极坐标系中，以 $C(a,0)\ (a>0)$ 为圆心， a 为半径的圆的极坐标方程是 $\rho=2a\cos\theta$；

在极坐标系中，以 $C(a,\frac{\pi}{2})\ (a>0)$ 为圆心， a 为半径的圆的极坐标方程是 $\rho=2a\sin\theta$；

7.在极坐标系中， $\theta=\alpha(\rho\ge 0)$ 表示以极点为起点的一条射线； $\theta=\alpha(\rho\in R)$ 表示过极点的一条直线 .

在极坐标系中，过点 $A(a,0)(a>0)$，且垂直于极轴的直线 l 的极坐标方程是 $\rho\cos\theta=a$.

8．参数方程的概念：在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x,y 都是某个变数 t 的函数 $\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t),\end{cases}$ 并且对于 t 的每一个允许值，由这个方程所确定的点 $M(x,y)$ 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做这条曲线的参数方程，联系变数 x,y 的变数 t 叫做参变数，简称参数。

相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程。

9．圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的参数方程可表示为 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\y=b+r\sin\theta.\end{cases}(\theta\text{为参数})$.

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的参数方程可表示为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\y=b\sin\varphi.\end{cases}(\varphi\text{为参数})$.

抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程可表示为 $\begin{cases}x=2px^2,\\y=2pt.\end{cases}(t\text{为参数})$.

经过点 $M_O(x_o,y_o)$，倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程可表示为 $\begin{cases}x=x_o+t\cos\alpha,\\y=y_o+t\sin\alpha.\end{cases}$（$t$ 为参数）.

10．在建立曲线的参数方程时，要注明参数及参数的取值范围。在参数方程与普通方程的互化中，必须使 x,y 的

取值范围保持一致 .

高中数学选修 4--5 知识点

1、不等式的基本性质

①（对称性） $a>b\Leftrightarrow b>a$

②（传递性） $a>b,b>c\Rightarrow a>c$

③（可加性） $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

（同向可加性） $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

（异向可减性） $a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$

④（可积性） $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

⑤（同向正数可乘性） $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

（异向正数可除性） $a>b>0,0<c<d\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

⑥（平方法则） $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in N,且n>1)$

⑦（开方法则） $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N,且n>1)$

⑧（倒数法则） $a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b};a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2、几个重要不等式

① $a^2+b^2\geq 2ab\ (a,b\in R)$，（当且仅当 $a=b$ 时取 "=" 号）. 变形公式： $ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.

②（基本不等式） $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ (a,b\in R^+)$，（当且仅当 $a=b$ 时取到等号）.

变形公式： $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

用基本不等式求最值时（积定和最小，和定积最大），要注意满足三个条件“一正、二定、三相等”.

③（三个正数的算术—几何平均不等式） $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\ (a、b、c\in R^+)$（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）.

④ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\ (a,b\in R)$

（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）.

⑤ $a^3+b^3+c^3\ge 3abc(a>0,b>0,c>0)$

（当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号）．

⑥ 若 $ab>0$,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2$ （当仅当 a=b 时取等号）

若 $ab<0$,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\le -2$ （当仅当 a=b 时取等号）

⑦ $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$，（其中 $a>b>0,\ m>0,\ n>0)$

规律：小于 1 同加则变大，大于 1 同加则变小．

⑧ 当 $a>0$ 时，$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a.$

⑨绝对值三角不等式 $|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|.$

3、几个著名不等式

①平均不等式：$\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，（$a,b\in R^+$，当且仅当 $a=b$ 时取 "=" 号）．

（即调和平均 ≤几何平均 ≤算术平均 ≤平方平均）．

变形公式：

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2};\quad a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}.$$

②幂平均不等式：

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ge\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)^2.$$

③二维形式的三角不等式：

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ (x_1,y_1,x_2,y_2\in R).$$

④二维形式的柯西不等式：

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2\ (a,b,c,d\in R).$ 当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立．

⑤三维形式的柯西不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

⑥一般形式的柯西不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.$$

⑦向量形式的柯西不等式：

设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 是两个向量，则 $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$，当且仅当 $\vec{\beta}$ 是零向量，或存在实数 k，使 $\vec{\alpha}=k\vec{\beta}$ 时，等号成立．

⑧排序不等式（排序原理）：

设 $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n,b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$ 为两组实数．$c_1,c_2,\ldots,c_n$ 是 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 的任一排列，则 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1\le a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n\le a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$（反序和 ≤乱序和 ≤顺序和），当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\ldots=b_n$ 时，反序和等于顺序和．

⑨琴生不等式：（特例:凸函数、凹函数）

若定义在某区间上的函数 $f(x)$，对于定义域中任意两点 $x_1,x_2(x_1\ne x_2)$，有

$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 或 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 则称 $f(x)$ 为凸（或凹）函数．

4、不等式证明的几种常用方法

常用方法有：比较法（作差，作商法）、综合法、分析法；

其它方法有：换元法、反证法、放缩法、构造法，函数单调性法，数学归纳法等．

常见不等式的放缩方法：

①舍去或加上一些项，如 $(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(a+\frac{1}{2})^2$;

②将分子或分母放大（缩小），

如 $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$，$\frac{1}{k^2}>\frac{1}{k(k+1)}$，$\frac{2}{2\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$，

$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}(k\in N^*,k>1)$ 等.

5、一元二次不等式的解法

求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(\text{或}<0)$

$(a\ne0,\Delta=b^2-4ac>0)$ 解集的步骤：

一化：化二次项前的系数为正数．

二判：判断对应方程的根．

三求：求对应方程的根．

四画：画出对应函数的图象．

五解集：根据图象写出不等式的解集．

规律：当二次项系数为正时，小于取中间，大于取两边．

6、高次不等式的解法：穿根法．

分解因式，把根标在数轴上，从右上方依次往下穿（奇穿偶切），结合原式不等号的方向，写出不等式的解集．

7、分式不等式的解法：先移项通分标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$ （“ $<$或 $\leq$ ”时同理）

规律：把分式不等式等价转化为整式不等式求解 .

8、无理不等式的解法：转化为有理不等式求解

? $$\sqrt{f(x)}>a(a>0)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)>a^2 \end{cases}$$

? $$\sqrt{f(x)}<a(a>0)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)<a^2 \end{cases}$$

? $$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

? $$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$$

? $$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

规律：把无理不等式等价转化为有理不等式，诀窍在于从“ 小 ”的一边分析求解 .

9、指数不等式的解法：

?当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

?当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$

规律：根据指数函数的性质转化 .

10、对数不等式的解法

?当 $a>1$ 时，$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

?当 $0<a<1$ 时，$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}.$$

规律：根据对数函数的性质转化 .

11、含绝对值不等式的解法：

?定义法：$|a|=\begin{cases}a & (a\ge 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$.

?平方法：$|f(x)|\le|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\le g^2(x)$.

?同解变形法，其同解定理有：

① $|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a(a\ge 0)$;

② $|x|\ge a\Leftrightarrow x\ge a$或$x\le -a(a\ge 0)$;

③ $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)\ (g(x)\ge 0)$

④ $|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$或$f(x)\le -g(x)\ (g(x)\ge 0)$

规律：关键是去掉绝对值的符号 .

12、含有两个（或两个以上）绝对值的不等式的解法：

规律：找零点、划区间、分段讨论去绝对值、每段中取交集，最后取各段的并集 .

13、含参数的不等式的解法

解形如 $ax^2+bx+c>0$ 且含参数的不等式时，要对参数进行分类讨论，分类讨论的标准有：

?讨论 a 与 0 的大小；

?讨论 Δ 与 0 的大小；

?讨论两根的大小 .

14、恒成立问题

?不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

①当 $a=0$ 时 $\Rightarrow b=0, c>0$;

②当 $a\ne 0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0.\end{cases}$

?不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

①当 $a=0$ 时 $\Rightarrow b=0, c<0$;

②当 $a\ne 0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0.\end{cases}$

? $f(x)<a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{max}<a$;

$f(x)\le a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{max}\le a$;

? $f(x)>a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{min}>a$;

$f(x)\ge a$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)_{min}\ge a$.

15、线性规划问题

?二元一次不等式所表示的平面区域的判断：

法一：取点定域法：

由于直线 $Ax+By+C=0$ 的同一侧的所有点的坐标代入 $Ax+By+C$ 后所得的实数的符号相同 .所以，在实际判断时，往往只需在直线某一侧任取一特殊点 (x_0,y_0)（如原点），由 Ax_0+By_0+C 的正负即可判断出 $Ax+By+C>0$ (或 <0) 表示直线哪一侧的平面区域 .

即：直线定边界，分清虚实；选点定区域，常选原点 .

法二：根据 $Ax+By+C>0$ (或 <0)，观察 B 的符号与不等式开口的符号， 若同号， $Ax+By+C>0$ (或 <0) 表示直线上方的区域；若异号，则表示直线上方的区域 .即：同号上方，异号下方 .

?二元一次不等式组所表示的平面区域：

不等式组表示的平面区域是各个不等式所表示的平面区域的公共部分 .

?利用线性规划求目标函数 $z=Ax+By$（A,B 为常数）的最值：

法一：角点法：

如果目标函数 $z=Ax+By$ （ x、y 即为公共区域中点的横坐标和纵坐标）的最值存在，则这些最值都在该公共区域的边界角点处取得，将这些角点的坐标代入目标函数，得到一组对应 z 值，最大的那个数为目标函数 z 的最大值，最小的那个数为目标函数 z 的最小值

法二：画——移——定——求：

第一步，在平面直角坐标系中画出可行域； 第二步，作直线 $l_0: Ax+By=0$，平移直线 l_0（据可行域，将直线 l_0 平行移动）确定最优解；第三步，求出最优解 (x,y)；第四步，将最优解 (x,y) 代入目标函数 $z=Ax+By$ 即可求出最大值或最小值 .

第二步中最优解的确定方法：

利用 z 的几何意义：$y=-\frac{A}{B}x+\frac{z}{B}$，$\frac{z}{B}$ 为直线的纵截距 .

①若 $B>0$，则使目标函数 $z=Ax+By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处， z 取得最大值，使直线的纵截距最小的角点处， z 取得最小值；

②若 $B<0$，则使目标函数 $z=Ax+By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处， z 取得最小值，使直线的纵截距最小的角点处， z 取得最大值 .

?常见的目标函数的类型：

①“截距”型： $z=Ax+By;$

②“斜率”型： $z=\frac{y}{x}$ 或 $z=\frac{y-b}{x-a}$;

③“距离”型： $z=x^2+y^2$ 或 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

$z=(x-a)^2+(y-b)^2$ 或 $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

在求该“三型”的目标函数的最值时，可结合线性规划与代数式的几何意义求解，从而使问题简单化 .

附：高中数学常用公式及常用结论

1. 元素与集合的关系

$x\in A\Leftrightarrow x\notin C_U A$, $x\in C_U A\Leftrightarrow x\notin A$.

2. 德摩根公式

$C_U(A\bigcap B)=C_U A\bigcup C_U B; C_U(A\bigcup B)=C_U A\bigcap C_U B$.

3. 包含关系

$A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow C_U B\subseteq C_U A$

$\Leftrightarrow A\bigcap C_U B=\Phi\Leftrightarrow C_U A\bigcup B=R$

4. 容斥原理

$card(A\bigcup B)=cardA+cardB-card(A\bigcap B)$

$card(A\bigcup B\bigcup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\bigcap B)$

$-card(A\bigcap B)-card(B\bigcap C)-card(C\bigcap A)+card(A\bigcap B\bigcap C)$.

5 ．集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集个数共有 2^n 个；真子集有 2^n-1 个；非空子集有 2^n-1 个；非空的真子集有 2^n-2 个.

6. 二次函数的解析式的三种形式

(1) 一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$;

(2) 顶点式 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$;

(3) 零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.

7.解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式

$N<f(x)<M\Leftrightarrow[f(x)-M][f(x)-N]<0$

$\Leftrightarrow|f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}$.

8. 方程 $f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根 ，与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件 . 特别地， 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1) 当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{min}=f(-\frac{b}{2a}), f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$;

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

(2) 当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$，若 $x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则

$f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$， $f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

10. 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根 .

设 $f(x)=x^2+px+q$，则

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\ge 0\\-\dfrac{p}{2}>m\end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases}f(m)>0\\f(n)>0\\p^2-4q\ge 0\\m<-\dfrac{p}{2}<n\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)=0\\af(n)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(n)=0\\af(m)>0\end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\ge 0\\-\dfrac{p}{2}<m\end{cases}$.

11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{min}\ge 0(x\notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\le 0(x\notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a\ge 0\\b\ge 0\\c>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b^2-4ac<0\end{cases}$.

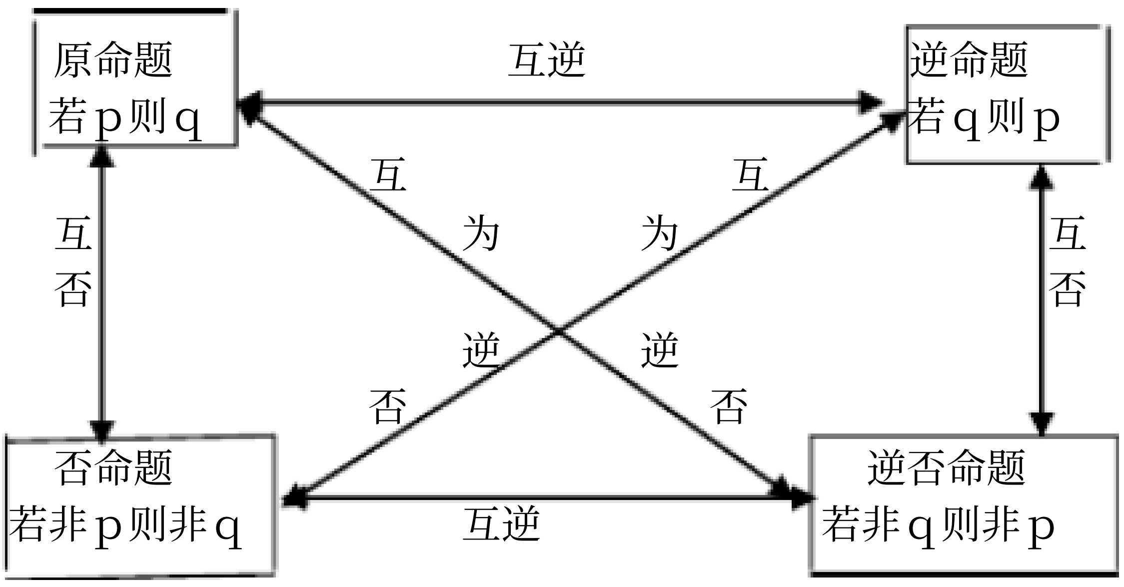
12. 真值表

p	q	非p	p或q	p且q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

13. 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有（$n-1$）个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有（$n+1$）个
对所有 x，成立	存在某 x，不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x，不成立	存在某 x，成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

14. 四种命题的相互关系



15.充要条件

（1）充分条件：若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件 .

（2）必要条件：若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件 .

（3）充要条件：若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件 .

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然 .

16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1\cdot x_2\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$ 那么

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是增函数；}$$

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是减函数 .}$$

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数 .

17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则在公共定义域内，和函数 $f(x)+g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数 .

18．奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

19. 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x-a)$；若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$.

20. 对于函数 $y=f(x)$（$x\in R$），$f(x+a)=f(b-x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x=\frac{a+b}{2}$；两个函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 .

21. 若 $f(x)=-f(-x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2},0)$ 对称；若 $f(x)=-f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数 .

22．多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项（即奇数项）的系数全为零 .

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项（即偶数项）的系数全为零 .

23. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$ $\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

24. 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴) 对称 .

(2) 函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2m}$ 对称 .

(3) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称 .

25. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象 .

26．互为反函数的两个函数的关系

$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

27. 若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\frac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$，并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$，而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\frac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数 .

28. 几个常见的函数方程

(1) 正比例函数 $f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y),f(1)=c$.

(2) 指数函数 $f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y),f(1)=a\neq 0$.

(3) 对数函数 $f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y),f(a)=1(a>0,a\neq 1)$.

(4) 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，$f(xy)=f(x)f(y),f'(1)=\alpha$.

(5) 余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$，$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$f(0)=1,\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$.

29. 几个函数方程的周期 (约定 a>0)

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a；

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a；

(3) $f(x)=1-\frac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a；

(4) $f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a；

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)$
$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a；

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

30. 分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

31．根式的性质

（1）$(\sqrt[n]{a})^n = a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$.

32．有理指数幂的运算性质

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in Q)$.

(2) $(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in Q)$.

(3) $(ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in Q)$.

注：若 $a>0$，p 是一个无理数，则 a^p 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用．

33. 指数式与对数式的互化式

$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N \ (a > 0, a \neq 1, N > 0)$.

34. 对数的换底公式

$\log_a N = \dfrac{\log_m N}{\log_m a}$（$a > 0$，且 $a \neq 1$，$m > 0$，且 $m \neq 1$，$N > 0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$（$a > 0$，且 $a > 1$，$m, n > 0$，且 $m \neq 1$，$n \neq 1$，$N > 0$）.

35．对数的四则运算法则

若 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，则

(1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$；

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$；

(3) $\log_a M^n = n \log_a M \ (n \in R)$.

36. 设函数 $f(x) = \log_m (ax^2 + bx + c)(a \neq 0)$，记 $\Delta = b^2 - 4ac$．若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a > 0$，且 $\Delta < 0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a > 0$，且 $\Delta \geq 0$．对于 $a = 0$ 的情形，需要单独检验．

37．对数换底不等式及其推广

若 $a > 0$，$b > 0$，$x > 0$，$x \neq \dfrac{1}{a}$，则函数 $y = \log_{ax}(bx)$

(1) 当 $a > b$ 时，在 $(0, \dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为增函数．

(2) 当 $a < b$ 时，在 $(0, \dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为减函数．

推论：设 $n > m > 1$，$p > 0$，$a > 0$，且 $a \neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n+p) < \log_m n$.

（2）$\log_a m \log_a n < \log_a^2 \dfrac{m+n}{2}$.

38．平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，有 $y = N(1+p)^x$.

39. 数列的同项公式与前 n 项的和的关系

$a_n = \begin{cases} s_1, & n = 1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$（数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$）.

40. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d \, (n \in N^*)$$ ；

其前 n 项和公式为

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n.$$

41. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n \, (n \in N^*)$$ ；

其前 n 项的和公式为

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases}$$

或 $s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases}$.

42. 等比差数列 $\{a_n\}$: $a_{n+1} = qa_n + d, a_1 = b(q \neq 0)$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} b + (n-1)d, q = 1 \\ \dfrac{bq^n + (d-b)q^{n-1} - d}{q-1}, q \neq 1 \end{cases}$$ ；

其前 n 项和公式为

$$s_n = \begin{cases} nb + n(n-1)d, (q = 1) \\ (b - \dfrac{d}{1-q})\dfrac{1-q^n}{q-1} + \dfrac{d}{1-q}n, (q \neq 1) \end{cases}.$$

43.分期付款 (按揭贷款)

每次还款 $x = \dfrac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}$ 元(贷款 a 元, n 次还清 ,每期利率为 b).

44．常见三角不等式

（1）若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，则 $\sin x < x < \tan x$.

(2) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，则 $1 < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.

(3) $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

45. 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$， $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$， $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$.

46. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin(\frac{n\pi}{2} + \alpha) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin\alpha, & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\alpha, & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

(n 为偶数)

(n 为奇数)

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha,\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha,\end{cases}$$

47. 和角与差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ (平方正弦公式);

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ (辅助角 φ 所在象限由点 (a,b) 的象限决定，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$).

48. 二倍角公式

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

49. 三倍角公式

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$.

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$.

$\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$.

50. 三角函数的周期公式

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in R$ 及函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)$, $x\in R$ (A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0,\omega>0$) 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$;

函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$ (A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0,\omega>0$) 的周期 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

51. 正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

52. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

53. 面积定理

(1) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$ 分别表示 a、b、c 边上的高）.

(2) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$.

54. 三角形内角和定理

在△ABC中，有 $A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$\Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$.

55. 简单的三角方程的通解

$\sin x=a \Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k \arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\cos x=a \Leftrightarrow x=2k\pi \pm \arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\tan x=a \Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z, a\in R)$.

特别地，有

$\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

$\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

$\tan\alpha=\tan\beta \Rightarrow \alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

56. 最简单的三角不等式及其解集

$\sin x>a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a, 2k\pi+\pi-\arcsin a), k\in Z$.

$\sin x<a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a, 2k\pi+\arcsin a), k\in Z$.

$\cos x>a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a, 2k\pi+\arccos a), k\in Z$.

$\cos x<a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a, 2k\pi+2\pi-\arccos a), k\in Z$.

$\tan x>a(a\in R) \Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a, k\pi+\frac{\pi}{2}), k\in Z$.

$\tan x<a(a\in R) \Rightarrow x\in(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\arctan a), k\in Z$.

57. 实数与向量的积的运算律

设 λ、μ 为实数，那么

(1) 结合律：λ(μa)=(λμ)a;

(2) 第一分配律：(λ+μ)a=λa+μa;

(3) 第二分配律：λ(a+b)=λa+λb.

58. 向量的数量积的运算律：

(1) a · b= b · a （交换律）；

(2) （λa）· b= λ（a · b）=λa · b= a ·（λb）；

(3) （a+b）· c= a · c +b · c.

59. 平面向量基本定理

如果 e_1、e_2 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数 λ_1、λ_2，使得 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$.

不共线的向量 e_1、e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

60．向量平行的坐标表示

设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，且 $b\neq 0$，则 $a\parallel b(b\neq 0) \Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

53. a 与 b 的数量积（或内积）

a · b=|a||b|cos θ.

61. **a** · **b** 的几何意义

数量积 **a** · **b** 等于 **a** 的长度 |**a**|与 **b** 在 **a** 的方向上的投影 |**b**|cosθ 的乘积.

62. 平面向量的坐标运算

(1) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a+b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

(2) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a-b=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

(3) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4) 设 $a=(x,y)$，$\lambda\in R$，则 $\lambda a=(\lambda x,\lambda y)$.

(5) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a\cdot b=(x_1x_2+y_1y_2)$.

63. 两向量的夹角公式

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\ (a=(x_1,y_1), b=(x_2,y_2)).$$

64. 平面两点间的距离公式

$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (A (x_1,y_1)，B(x_2,y_2)).

65. 向量的平行与垂直

设 a=(x_1,y_1) , b=(x_2,y_2)，且 b$\neq 0$，则

A|| b$\Leftrightarrow$ b=λ a $\Leftrightarrow$ $x_1y_2-x_2y_1=0$.

a$\perp$b(a $\neq 0$) $\Leftrightarrow$ a · b=0$\Leftrightarrow$ $x_1x_2+y_1y_2=0$.

66. 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的分点，λ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}\quad (t=\frac{1}{1+\lambda}).$$

67. 三角形的重心坐标公式

△ ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则△ABC 的重心的坐标是 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

68. 点的平移公式

$$\begin{cases}x'=x+h\\ y'=y+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-h\\ y=y'-k\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}.$$

注: 图形 F 上的任意一点 P(x，y) 在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x',y')$，且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h,k).

69. “按向量平移”的几个结论

（1）点 $P(x,y)$ 按向量 a=(h,k) 平移后得到点 $P'(x+h,y+k)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象 C 按向量 a=(h,k) 平移后得到图象 C'，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$.

(3) 图象 C' 按向量 a=(h,k) 平移后得到图象 C，若 C 的解析式 $y=f(x)$，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

(4) 曲线 C：$f(x,y)=0$ 按向量 a=(h,k) 平移后得到图象 C'，则 C' 的方程为 $f(x-h,y-k)=0$.

(5) 向量 m=(x,y) 按向量 a=(h,k) 平移后得到的向量仍然为 m=(x,y).

70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 ΔABC 所在平面上一点，角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c，则

（1）O 为 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O 为 ΔABC 的重心 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（3）O 为 ΔABC 的垂心 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

（4）O 为 ΔABC 的内心 $\Leftrightarrow$ $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（5）O 为 ΔABC 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow$ $a\overrightarrow{OA}=b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$.

71. 常用不等式：

（1）$a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ (当且仅当 a＝b 时取“ =”号).

（2）$a,b\in R^+\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (当且仅当 a＝b 时取“ =”号).

（3）$a^3+b^3+c^3\geq 3abc(a>0,b>0,c>0)$.

（4）柯西不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2, a,b,c,d\in R.$

（5）$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

72. 极值定理

已知 x,y 都是正数，则有

（1）若积 xy 是定值 p，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

（2）若和 $x+y$ 是定值 s，则当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知 $x,y\in R$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

（1）若积 xy 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|x+y|$ 最大；

当 $|x-y|$ 最小时，$|x+y|$ 最小.

（2）若和 $|x+y|$ 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|xy|$ 最小；

当 $|x-y|$ 最小时，$|xy|$ 最大.

73. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(或<0)$ $(a\ne0,\Delta=b^2-4ac>0)$，如果 a 与 ax^2+bx+c 同号，则其解集在两根之外；如果 a 与 ax^2+bx+c 异号，则其解集在两根之间. 简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1,或x>x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

74. 含有绝对值的不等式

当 $a>0$ 时，有

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

75. 无理不等式

（1）$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge0\\g(x)\ge0\\f(x)>g(x)\end{cases}$.

（2）$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge0\\g(x)\ge0\\f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\ge0\\g(x)<0\end{cases}$.

（3）$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge0\\g(x)>0\\f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$.

76. 指数不等式与对数不等式

(1) 当 $a>1$ 时,

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}$.

(2) 当 $0<a<1$ 时,

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)<g(x)\end{cases}$

77.斜率公式

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ （$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

78.直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$（直线 l 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 k）.

（2）斜截式 $y=kx+b$（b 为直线 l 在 y 轴上的截距）.

（3）两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$y_1\neq y_2$）（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$））.

(4) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a$、$b$ 分别为直线的横、纵截距，a、$b\neq 0$）

（5）一般式 $Ax+By+C=0$（其中 A、B 不同时为 0）.

79.两条直线的平行和垂直

(1)若 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

① $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$；

② $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，且 A_1、A_2、B_1、B_2 都不为零，

① $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；

② $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

80.夹角公式

(1) $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线 $l_1\perp l_2$ 时，直线 l_1 与 l_2 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

81. l_1 到 l_2 的角公式

(1) $\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线 $l_1\perp l_2$ 时，直线 l_1 到 l_2 的角是 $\frac{\pi}{2}$.

82．四种常用直线系方程

(1) 定点直线系方程：经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$（除直线 $x=x_0$），其中 k 是待定的系数；经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中 A, B 是待定的系数.

(2) 共点直线系方程：经过两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为 $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（除 l_2），其中 λ 是待定的系数.

(3) 平行直线系方程：直线 $y=kx+b$ 中当斜率 k 一定而 b 变动时，表示平行直线系方程．与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+\lambda=0$（$\lambda\neq 0$），λ 是参变量.

(4) 垂直直线系方程：与直线 $Ax+By+C=0$ $(A\neq 0, B\neq 0)$ 垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+\lambda=0$，λ 是参变量.

83.点到直线的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ (点 $P(x_0,y_0)$,直线 l： $Ax+By+C=0$).

84. $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设直线 $l:Ax+By+C=0$，则 $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

若 $B\neq 0$，当 B 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的上方的区域；当 B 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的下方的区域 .简言之 ,同号在上 ,异号在下 .

若 $B=0$，当 A 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的右方的区域；当 A 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的左方的区域 . 简言之 ,同号在右 ,异号在左 .

85. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设曲线 $C:(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$A_1A_2B_1B_2\neq 0$），则

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 所表示的平面区域上下两部分；

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ 所表示的平面区域上下两部分 .

86. 圆的四种方程

（1）圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

（2）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ($D^2+E^2-4F>0$).

（3）圆的参数方程 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$.

（4）圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ (圆的直径的端点是 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$).

87. 圆系方程

(1) 过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的圆系方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)]=0$$

$\Leftrightarrow$ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda(ax+by+c)=0$，其中 $ax+by+c=0$ 是直线 AB 的方程，λ 是待定的系数.

(2) 过直线 l： $Ax+By+C=0$ 与圆 C： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，$\lambda$ 是待定的系数.

(3) 过圆 C_1： $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 C_2： $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，$\lambda$ 是待定的系数.

88. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种

若 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

$d>r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆外；$d=r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆上；$d<r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆内 .

89. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种 ：

$d>r\Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow$ $\Delta<0$;

$d=r\Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$;

$d<r\Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ $\Delta>0$.

其中 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

90. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 O_1, O_2，半径分别为 r_1, r_2, $|O_1O_2| = d$

$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线；

$d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线；

$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线；

$d = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线；

$0 < d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线 .

91. 圆的切线方程

(1) 已知圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

①若已知切点 (x_0, y_0) 在圆上，则切线只有一条，其方程是

$$x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0.$$

当 (x_0, y_0) 圆外时， $x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0$ 表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y - y_0 = k(x - x_0)$，再利用相切条件求 k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

③斜率为 k 的切线方程可设为 $y = kx + b$，再利用相切条件求 b，必有两条切线.

(2) 已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0, y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$;

②斜率为 k 的圆的切线方程为 $y = kx \pm r\sqrt{1 + k^2}$.

92. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$.

93. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 焦半径公式

$|PF_1| = e(x + \frac{a^2}{c})$，$|PF_2| = e(\frac{a^2}{c} - x)$.

94．椭圆的的内外部

（1）点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

（2）点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

95. 椭圆的切线方程

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

（2）过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是

$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

（3）椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $A^2a^2 + B^2b^2 = c^2$.

96. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的焦半径公式

$|PF_1| = |e(x + \frac{a^2}{c})|$，$|PF_2| = |e(\frac{a^2}{c} - x)|$.

97. 双曲线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

98. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

(1) 若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ 渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

(2) 若渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$.

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上）.

99. 双曲线的切线方程

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2-B^2b^2=c^2$.

100. 抛物线 $y^2=2px$ 的焦半径公式

抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦半径 $|CF|=x_0+\frac{p}{2}$.

过焦点弦长 $|CD|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$.

101. 抛物线 $y^2=2px$ 上的动点可设为 $P(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$ 或 $P(2pt^2,2pt)$ 或 $P(x_0,y_0)$，其中 $y_0^2=2px_0$.

102. 二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq 0)$ 的图象是抛物线：（1）顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；（2）焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$；（3）准线方程是 $y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

103. 抛物线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2<2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow y^2>2px(p>0)$.

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2<-2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow y^2>-2px(p>0)$.

(3) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow x^2>2py(p>0)$.

(4) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=-2py(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow x^2>-2py(p>0)$.

104. 抛物线的切线方程

(1) 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

(2) 过抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

(3) 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pB^2=2AC$.

105. 两个常见的曲线系方程

(1) 过曲线 $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系方程是

$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ (λ 为参数).

(2) 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\dfrac{x^2}{a^2-k}+\dfrac{y^2}{b^2-k}=1$, 其中 $k<\max\{a^2,b^2\}$. 当 $k>\min\{a^2,b^2\}$ 时, 表示椭圆; 当 $\min\{a^2,b^2\}<k<\max\{a^2,b^2\}$ 时, 表示双曲线 .

106. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 或

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ (弦端点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2+bx+c=0$, $\Delta>0$, α 为直线 AB 的倾斜角, k 为直线的斜率) .

107. 圆锥曲线的两类对称问题

(1) 曲线 $F(x,y)=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0\text{-}x,2y_0-y)=0$.

(2) 曲线 $F(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 成轴对称的曲线是

$F(x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2})=0$.

108. "四线"一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 用 x_0x 代 x^2, 用 y_0y 代 y^2, 用 $\dfrac{x_0y+xy_0}{2}$ 代 xy, 用 $\dfrac{x_0+x}{2}$ 代 x, 用 $\dfrac{y_0+y}{2}$ 代 y 即得方程

$Ax_0x+B\cdot\dfrac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\dfrac{x_0+x}{2}+E\cdot\dfrac{y_0+y}{2}+F=0$, 曲线的切线, 切点弦, 中点弦, 弦中点方程均是此方程得到 .

109. 证明直线与直线的平行的思考途径

(1) 转化为判定共面二直线无交点;

(2) 转化为二直线同与第三条直线平行;

(3) 转化为线面平行;

(4) 转化为线面垂直;

(5) 转化为面面平行 .

110. 证明直线与平面的平行的思考途径

(1) 转化为直线与平面无公共点;

(2) 转化为线线平行;

(3) 转化为面面平行 .

111. 证明平面与平面平行的思考途径

(1) 转化为判定二平面无公共点;

(2) 转化为线面平行;

(3) 转化为线面垂直 .

112. 证明直线与直线的垂直的思考途径

(1) 转化为相交垂直;

(2) 转化为线面垂直;

(3) 转化为线与另一线的射影垂直;

(4) 转化为线与形成射影的斜线垂直 .

113. 证明直线与平面垂直的思考途径

(1) 转化为该直线与平面内任一直线垂直;

（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；
（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；
（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；
（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直 .

114. 证明平面与平面的垂直的思考途径
（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直 .

115. 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律
(1) 加法交换律： a＋b=b＋a.
(2) 加法结合律： (a＋b)＋c=a＋(b＋c).
(3) 数乘分配律： λ(a＋b)=λa＋λb.

116. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广
始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量 .

117.共线向量定理
对空间任意两个向量 **a**、**b**(**b**≠**0**)，**a**∥**b**$\Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 **a**=λ**b**.

P、A、B 三点共线 $\Leftrightarrow$ $AP \parallel AB$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

$AB \parallel CD$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 共线且 AB、CD 不共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{CD}$ 且 AB、CD 不共线 .

118. 共面向量定理
向量 p 与两个不共线的向量 a、b 共面的 $\Leftrightarrow$ 存在实数对 x,y，使 $p=ax+by$.

推论 空间一点 P 位于平面 MAB内的 $\Leftrightarrow$ 存在有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，
或对空间任一定点 O，有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.

119. 对空间任一点 O 和不共线的三点 A、B、C，满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（$x+y+z=k$），则当 $k=1$ 时，对于空间任一点 O，总有 P、A、B、C 四点共面；当 $k\neq1$ 时，若 O∈平面 ABC，则 P、A、B、C 四点共面；若 O∉平面 ABC，则 P、A、B、C 四点不共面.

A、B、C、D 四点共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OD}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（O∉平面 ABC）.

120. 空间向量基本定理
如果三个向量 a、b、c 不共面，那么对空间任一向量 p，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 p＝xa＋yb＋zc.

推论 设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

121. 射影公式
已知向量 $\overrightarrow{AB}$=a 和轴 l，e 是 l 上与 l 同方向的单位向量 . 作 A 点在 l 上的射影 A'，作 B 点在 l 上的射影 B'，则

$A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle a, e\rangle=a\cdot e$

122. 向量的直角坐标运算
设 a＝(a_1,a_2,a_3)，b＝(b_1,b_2,b_3) 则
(1) a＋b＝$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；
(2) a－b＝$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；
(3) λa＝$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ (λ∈R)；
(4) a·b＝$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

123. 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

124. 空间的线线平行或垂直
设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\lambda x_2 \\ y_1=\lambda y_2 \\ z_1=\lambda z_2 \end{cases}$；

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

125. 夹角公式

设 $a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\cos\langle a, b\rangle=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式 .

126. 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中， AC 与 BD 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(AB^2+CD^2)-(BC^2+DA^2)|}{2AC\cdot BD}.$$

127. 异面直线所成角

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

（其中 θ（$0^{\circ}<\theta\leq 90^{\circ}$）为异面直线 a,b 所成角， $\vec{a},\vec{b}$ 分别表示异面直线 a,b 的方向向量）

128.直线 AB 与平面所成角

$\beta=\arcsin\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{m}|}$（$\vec{m}$ 为平面 α 的法向量).

129. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A、B 为 ΔABC 的两个内角，则

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2\theta$.

特别地，当 $\angle ACB=90^{\circ}$ 时，有

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta$.

130. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A'、B' 为 ΔABO 的两个内角，则

$\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2=(\sin^2A'+\sin^2B')\tan^2\theta$.

特别地，当 $\angle AOB=90^{\circ}$ 时，有

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta$.

131.二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角

$\theta=\arccos\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$（$\vec{m}$，$\vec{n}$ 为平面 α，β 的法向量） .

132. 三余弦定理

设 AC是 α 内的任一条直线，且 BC⊥AC，垂足为 C，又设 AO与 AB所成的角为 θ_1，AB与 AC所成的角为 θ_2，AO与 AC所成的角为 θ．则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

133. 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1，θ_2，与二面角的棱所成的角是

θ，则有 $\sin^2\varphi\sin^2\theta=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$；

$|\theta_1-\theta_2|\le\varphi\le180^{0}-(\theta_1+\theta_2)$（当且仅当 $\theta=90^{0}$ 时等号成立）.

134. 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

135. 点 Q 到直线 l 距离

$$h=\frac{1}{|a|}\sqrt{(|a||b|)^2-(a\cdot b)^2}$$（点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 $a=\overrightarrow{PA}$，向量 $b=\overrightarrow{PQ}$）.

136.异面直线间的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$（l_1,l_2 是两异面直线，其公垂向量为 $\vec{n}$，C、D 分别是 l_1,l_2 上任一点，d 为 l_1,l_2 间的距离）.

137.点 B 到平面 α 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$（$\vec{n}$ 为平面 α 的法向量，AB 是经过面 α 的一条斜线，$A\in\alpha$）.

138.异面直线上两点距离公式

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2\mp2mn\cos\theta}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\varphi}$$（$\varphi=E-AA'-F$）.

（两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，其公垂线段 AA' 的长度为 h. 在直线 a、b 上分别取两点 E、F，$A'E=m$，$AF=n$，$EF=d$）.

139. 三个向量和的平方公式

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle+2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle$$

140. 长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1、l_2、l_3，夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则有

$$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1\Leftrightarrow\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2.$$

（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）.

141. 面积射影定理

$$S=\frac{S'}{\cos\theta}.$$

（平面多边形及其射影的面积分别是 S、S'，它们所在平面所成锐二面角的为 θ）.

142. 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l，侧面积和体积分别是 $S_{斜棱柱侧}$ 和 $V_{斜棱柱}$，它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1，则

① $S_{斜棱柱侧}=c_1l$.

② $V_{斜棱柱}=S_1l$.

143. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行.

144. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

145. 欧拉定理（欧拉公式）

$V+F-E=2$（简单多面体的顶点数 V、棱数 E 和面数 F).

（1）E=各面多边形边数和的一半．特别地，若每个面的边数为 n 的多边形，则面数 F 与棱数 E 的关系：$E=\frac{1}{2}nF$；

（2）若每个顶点引出的棱数为 m，则顶点数 V 与棱数 E 的关系：$E=\frac{1}{2}mV$.

146. 球的半径是 R，则

其体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

其表面积 $S=4\pi R^2$.

147. 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体：

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长．

(2) 球与正方体的组合体：

正方体的内切球的直径是正方体的棱长，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长．

(3) 球与正四面体的组合体：

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

148. 柱体、锥体的体积

$V_{柱体}=\frac{1}{3}Sh$（S 是柱体的底面积、h 是柱体的高）．

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S 是锥体的底面积、h 是锥体的高）．

149. 分类计数原理（加法原理）

$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

150. 分步计数原理（乘法原理）

$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$.

151. 排列数公式

$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$.（$n$，$m\in N^*$，且 $m\leq n$）.

注：规定 $0!=1$.

152. 排列恒等式

(1) $A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}$;

（2）$A_n^m=\frac{n}{n-m}A_{n-1}^m$;

（3）$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$;

（4）$nA_n^n=A_{n+1}^{n+1}-A_n^n$;

（5）$A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$.

(6) $1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

153. 组合数公式

$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$（$n\in N^*$，$m\in N$，且 $m\leq n$）.

154. 组合数的两个性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

注：规定 $C_n^0=1$.

155. 组合恒等式

（1）$C_n^m=\frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$;

（2）$C_n^m=\frac{n}{n-m}C_{n-1}^m$;

（3）$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$;

（4）$\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$;

（5）$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$.

(6) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n$.

(7) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots 2^{n-1}$.

(8) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

(9) $C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+\cdots+C_m^0C_n^r=C_{m+n}^r$.

(10) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

156. 排列数与组合数的关系

$A_n^m=m!\cdot C_n^m$.

157．单条件排列

以下各条的大前提是从 n 个元素中取 m 个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”

①某（特）元必在某位有 A_{n-1}^{m-1} 种；②某（特）元不在某位有 $A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）$=A_{n-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$=A_{n-1}^m+A_{m-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）

①定位紧贴：$k(k\le m\le n)$ 个元在固定位的排列有 $A_k^kA_{n-k}^{m-k}$ 种.

②浮动紧贴：n 个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有 $A_{n-k+1}^{n-k+1}A_k^k$ 种.注：此类问题常用捆绑法；

③插空：两组元素分别有 k、h 个（$k\le h+1$），把它们合在一起来作全排列，k 个的一组互不能挨近的所有排列数有 $A_h^hA_{h+1}^k$ 种.

（3）两组元素各相同的插空

m 个大球 n 个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？

当 $n>m+1$ 时，无解；当 $n\le m+1$ 时，有 $\frac{A_{m+1}^n}{A_n^n}=C_{m+1}^n$ 种排法.

（4）两组相同元素的排列：两组元素有 m 个和 n 个，各组元素分别相同的排列数为 C_{m+n}^n.

158．分配问题

（1）(平均分组有归属问题)将相异的 m、n 个物件等分给 m 个人，各得 n 件，其分配方法数共有

$$N=C_{mn}^n\cdot C_{mn-n}^n\cdot C_{mn-2n}^n\cdots C_{2n}^n\cdot C_n^n=\frac{(mn)!}{(n!)^m}.$$

（2）(平均分组无归属问题)将相异的 $m\cdot n$ 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆，其分配方法数共有

$$N=\frac{C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdot C_{mn-2n}^{n}\cdots C_{2n}^{n}\cdot C_{n}^{n}}{m!}=\frac{(mn)!}{m!(n!)^{m}}.$$

（3）(非平均分组有归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1，n_2，，，n_m 件，且 n_1，n_2，，，n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数共有 $N=C_p^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!=\dfrac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（4）(非完全平均分组有归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1，n_2，，，n_m 件，且 n_1，n_2，，，n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、，个相等，则其分配方法数有

$$N=\frac{C_p^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!}{a!b!c!\ldots}=\frac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}.$$

（5）(非平均分组无归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1，n_2，，，n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1，n_2，，，n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数有 $N=\dfrac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（6）(非完全平均分组无归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1，n_2，，，n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1，n_2，，，n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、，个相等，则其分配方法数有

$$N=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}.$$

（7）(限定分组有归属问题)将相异的 p（$p=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给甲、乙、丙，，等 m 个人，物体必须被分完，如果指定甲得 n_1 件，乙得 n_2 件，丙得 n_3 件，，时，则无论 n_1，n_2，，，n_m 等 m 个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有

$$N=C_p^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}.$$

159．“错位问题”及其推广

贝努利装错笺问题 :信 n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n)=n![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}].$$

推广：n 个元素与 n 个位置 ,其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$\begin{aligned}f(n,m)&=n!-C_m^1(n-1)!+C_m^2(n-2)!-C_m^3(n-3)!+C_m^4(n-4)!\\&\quad-\cdots+(-1)^pC_m^p(n-p)!+\cdots+(-1)^mC_m^m(n-m)!\\&=n![1-\frac{C_m^1}{A_n^1}+\frac{C_m^2}{A_n^2}-\frac{C_m^3}{A_n^3}+\frac{C_m^4}{A_n^4}-\cdots+(-1)^p\frac{C_m^p}{A_n^p}+\cdots+(-1)^m\frac{C_m^m}{A_n^m}].\end{aligned}$$

160．不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的解的个数

(1) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的正整数解有 C_{m-1}^{n-1} 个.

(2) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的非负整数解有 C_{n+m-1}^{n-1} 个.

(3) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\ge k$（$k\in N^*,2\le i\le n-1$）的非负整数解有 $C_{m+1-(n-2)(k-1)}^{n-1}$ 个.

(4) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\le k$（$k\in N^*,2\le i\le n-1$）的正整数解有 $C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n-2}^{1}C_{m+n-k-2}^{n-1}+C_{n-2}^{2}C_{m+n-2k-3}^{n-1}-\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}C_{m+1-(n-2)k}^{n-1}$ 个.

161. 二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$；

二项展开式的通项公式

$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r\ (r=0,1,2\cdots,\ n)$.

162. 等可能性事件的概率

$P(A)=\frac{m}{n}$.

163. 互斥事件 A，B 分别发生的概率的和

P(A＋B)=P(A) ＋P(B) .

164. n 个互斥事件分别发生的概率的和

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

165. 独立事件 A，B 同时发生的概率

P(A · B)= P(A) · P(B).

166.n 个独立事件同时发生的概率

$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

167.n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$.

168. 离散型随机变量的分布列的两个性质

（1） $P_i\ge 0(i=1,2,\cdots)$；

（2） $P_1+P_2+\cdots=1$.

169. 数学期望

$E\xi=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n+\cdots$

170. 数学期望的性质

（1） $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$.

（2）若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $E\xi=\frac{1}{p}$.

171. 方差

$D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n+\cdots$

172. 标准差

$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$.

173. 方差的性质

(1) $D(a\xi+b)=a^2D\xi$；

(2）若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $D\xi=np(1-p)$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $D\xi=\frac{q}{p^2}$.

174. 方差与期望的关系

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

175. 正态分布密度函数

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}},x\in(-\infty,+\infty)$，式中的实数 μ，σ （σ >0）是参数，分别表示个体的平均数与标准差 .

176. 标准正态分布密度函数

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty)$.

177. 对于 $N(\mu,\sigma^2)$，取值小于 x 的概率

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$$P(x_1<x_0<x_2)=P(x<x_2)-P(x<x_1)$$
$$=F(x_2)-F(x_1)$$
$$=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

178. 回归直线方程

$$y=a+bx，其中\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2} \\ a=\bar{y}-b\bar{x} \end{cases}.$$

179. 相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}.$$

$|r|\le 1$，且 $|r|$ 越接近于 1，相关程度越大； $|r|$ 越接近于 0，相关程度越小 .

180. 特殊数列的极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & |q|<1\\ 1 & q=1\\ 不存在 & |q|<1或q=-1\end{cases}$.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_tn^t+b_{t-1}n^{t-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & (k<t)\\ \dfrac{a_t}{b_k} & (k=t)\\ 不存在 & (k>t)\end{cases}$.

（3） $S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}$ （ S 无穷等比数列 $\{a_1q^{n-1}\}$ ($|q|<1$) 的和） .

181. 函数的极限定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

182. 函数的夹逼性定理

如果函数 **f(x)**，**g(x)**，**h(x)** 在点 x_0 的附近满足：

（**1**） $g(x)\le f(x)\le h(x)$；

（**2**） $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$ （常数） ，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

本定理对于单侧极限和 $x\to\infty$ 的情况仍然成立 .

183. 几个常用极限

（**1**） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ （ $|a|<1$）；

（**2**） $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}$.

184. 两个重要的极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ **(e=2.718281845，).**

185.函数极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$.

186.数列极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\cdot a$ **(** c 是常数 **).**

187. $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或变化率或微商）

$$f'(x_0)=y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

188. 瞬时速度

$$\upsilon=s'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

189. 瞬时加速度

$$a=v'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

190. $f(x)$ 在 (a,b) 的导数

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

191. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

192. 几种常见函数的导数

(1) $C'=0$（C为常数）.

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}(n\in Q)$.

(3) $(\sin x)'=\cos x$.

(4) $(\cos x)'=-\sin x$.

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；$(\log a^{x})'=\frac{1}{x}\log_a^{e}$.

(6) $(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$.

193. 导数的运算法则

（1） $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

（2） $(uv)' = u'v + uv'$.

（3） $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$.

194. 复合函数的求导法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x' = \varphi'(x)$，函数 $y = f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y_u' = f'(u)$，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数，且 $y_x' = y_u' \cdot u_x'$，或写作 $f_x'(\varphi(x)) = f'(u)\varphi'(x)$.

195. 常用的近似计算公式（当 $|x|$ 充小时）

(1) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$；$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$；

(2) $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x(\alpha \in R)$； $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$；

(3) $e^x \approx 1 + x$ ；

(4) $l_n(1+x) \approx x$ ；

(5) $\sin x \approx x$ （ x 为弧度）；

(6) $\tan x \approx x$ （ x 为弧度）；

(7) $\arctan x \approx x$ （ x 为弧度）

196. 判别 $f(x_0)$ 是极大（小）值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时,

（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$，右侧 $f'(x) < 0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；

（2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$，右侧 $f'(x) > 0$，则 $f(x_0)$ 是极小值 .

197. 复数的相等

$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$.（ $a, b, c, d \in R$）

198. 复数 $z = a + bi$ 的模（或绝对值）

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

199. 复数的四则运算法则

(1) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$；

(2) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$；

(3) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$；

(4) $(a + bi) \div (c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i(c + di \neq 0)$.

200. 复数的乘法的运算律

对于任何 $z_1, z_2, z_3 \in C$，有

交换律：$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

结合律：$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

分配律：$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

201. 复平面上的两点间的距离公式

$d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ （ $z_1 = x_1 + y_1 i$， $z_2 = x_2 + y_2 i$ ）.

202. 向量的垂直

非零复数 $z_1 = a + bi$， $z_2 = c + di$ 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$， $\overrightarrow{OZ_2}$，则

$\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2} \Leftrightarrow \overline{z_1} \cdot z_2$ 的实部为零 $\Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow ac+bd=0 \Leftrightarrow z_1=\lambda iz_2$ (λ 为非零实数).

203. 实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

①若 $\Delta=b^2-4ac>0$, 则 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

②若 $\Delta=b^2-4ac=0$, 则 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$;

③若 $\Delta=b^2-4ac<0$，它在实数集 R 内没有实数根；在复数集 C 内有且仅有两个共轭复数根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}(b^2-4ac<0)$.