

Модель MS-VARX и ее применение для анализа бизнес-цикла белорусской экономики

Владимир МАЛЮГИН



Белорусский государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь, г. Минск, e-mail: Malugin@bsu.by

Анатолий МАКАРЕВИЧ



Белорусский государственный университет, магистрант, Республика Беларусь, г. Минск, e-mail: anatology_mak@yahoo.com

УДК 330.43

Ключевые слова:

модель MS-VARX; опережающий экономический индикатор; реальный ВВП; индекс экономических настроений; анализ бизнес-цикла; коинтеграция; белорусская экономика.

Общая характеристика проблемы. Анализ и прогнозирование экономической активности в различных секторах экономики и в экономике в целом важны для формирования и проведения эффективной монетарной, фискальной, инвестиционной, демографической и экономической политики в целом. В основе современного подхода к решению указанных задач лежит представление о циклических изменениях экономической активности, которые ассоциируются с понятием «бизнес-цикла». Под *бизнес-циклом (business cycle)* понимаются циклические колебания экономической активности, состоящие в последовательной смене периодов экономического спада и подъема, называемых *фазами бизнес-цикла*. Моменты смены фаз бизнес-цикла называются *поворотными точками бизнес-цикла (business cycle turning points)*. Последовательность фаз цикла полагается неизменной, однако их продолжительность, как и поворотные точки, имеет нерегулярный характер, обусловленный влиянием на экономическую активность внешних и внутренних шоковых воздействий в случайные моменты времени.

Проблемой анализа макроэкономической активности впервые начали заниматься в НБЭИ (Национальном бюро экономических исследований) США в 30-х гг. прошлого века [1]. В рамках концепции бизнес-цикла НБЭИ под-

разумеется последовательная смена двух фаз: «роста» (*growth*) и «спада» (*recessions*) экономической активности. При этом поворотные точки соответствуют «пику» (максимальной точке роста) и «дну» (минимальной точке спада) экономического цикла. В рамках концепции ОЭСР (*Организации экономического сотрудничества и развития*) допускается детализация основных фаз цикла относительно долгосрочного тренда с выделением периодов «роста» и «замедления» (выше линии долгосрочного тренда), а также – «спада» и «восстановления» (ниже линии тренда) [2]. Поворотные точки в данном случае соответствуют моментам начала замедления роста и начала восстановления после спада. Бизнес-цикл определяется на основе базового экономического индикатора, который обычно описывает совокупный выпуск в экономике, как правило, используется реальный ВВП в месячном исчислении.

Многочисленные исследования в данном направлении нацелены на решение следующих основных задач:

1) *идентификация бизнес-цикла и определение его поворотных точек;*

2) *построение сводных опережающих индексов, предназначенных для получения ранних сигналов о смене фаз бизнес-цикла;*

3) *разработка эконометрических моделей для оценивания и прогнозирования поворотных*

точек бизнес-цикла и базового экономического индикатора с использованием сводных опережающих индексов.

Методы идентификации бизнес-цикла на основе статистических фильтров. Задача идентификации бизнес-цикла и определения его поворотных точек решается либо на основе экспертных оценок (НБЭИ), либо с использованием статистических фильтров и эконометрических моделей с переключением состояний. Статистические фильтры позволяют выделить циклическую компоненту из базового экономического индикатора, чьи поворотные точки считаются поворотными точками бизнес-цикла. Наиболее часто применяется фильтр Ходрика – Прескотта. Однако данный фильтр, как и другие подобные фильтры, обладает рядом недостатков: смещение значений цикла в начальных и конечных точках временного ряда (*«endpoint bias problem»*), высокая чувствительность этих оценок к добавлению новых наблюдений и проблема задания значения параметра фильтра («параметра λ »), критическим образом влияющего на свойства выделяемых компонентов временного ряда (тренда и цикла). Смещение в конечных точках цикла является критичным при оценке конечной фазы цикла. Альтернативой может быть регрессионный фильтр Хамильтона [4]. Сравнительный анализ фильтров Ходрика – Прескотта и Хамильтона при анализе бизнес-цикла белорусской экономики дается в [5].

Модели с переключениями состояний: общая характеристика. Значительное место в исследованиях, посвященных эконометрическому анализу бизнес-циклов, занимают модели с переключениями состояний [6]. Помимо статистического оценивания поворотных точек и, соответственно, идентификации фаз цикла данные модели позволяют оценить апостериорные вероятности классов состояний экономической активности (фаз цикла) в текущий момент времени и матрицу переходных вероятностей, которая может использоваться для прогнозирования будущего состояния. При этом одновременно с оцениванием номеров классов состояний реша-

ется задача оценивания параметров моделей для каждого класса состояний, которые могут рассматриваться как предиктивные модели для базового экономического индикатора. Наибольшее распространение получили *векторные авторегрессионные модели с марковскими переключениями состояний (Markov-switching vector autoregressive model – MS-VAR)* [7]. В этих моделях смена классов состояний происходит под управлением ненаблюдаемой однородной цепи Маркова. Условие однородности означает постоянство во времени вероятностей смены классов состояний, называемых *переходными вероятностями*. Модели MS-VAR [7] требуют априорного задания типа циклических изменений из двух альтернативных вариантов: а) изменения происходят в векторе средних значений эндогенных переменных; б) изменения происходят в векторе свободных членов. Допускаются также одномоментные изменения в матрицах авторегрессионных коэффициентов и ковариационной матрице случайных ошибок наблюдения. Эффективность применения моделей MS-VAR существенно зависит от размерности модели, определяемой числом уравнений, порядком авторегрессии и количеством классов состояний: чем больше размерность модели и, соответственно, число оцениваемых параметров, тем большей должна быть длина используемых временных рядов. Кроме того, традиционные модели MS-VAR [7] не допускают использования экзогенных переменных, которые могли бы улучшить их статистические свойства и предиктивные способности при прогнозировании моментов переключения состояний и используемых экономических переменных. По этой причине в [8–10] предложена модель MS-VARX, которая допускает такие обобщения модели MS-VAR, как: а) возможность использования дополнительных экзогенных переменных; б) отсутствие априорных предположений относительно параметров моделей, подверженных циклическим изменениям. Важным частным случаем модели MS-VARX является модель *многомерной линейной регрессии (multivariate linear regression)* с

марковскими переключениями состояний MS-MLR [10].

Для построения моделей MS-VAR и MS-VARX применяются итерационные EM-алгоритмы (*Expectation-Maximization algorithms*) семейства алгоритмов Баума – Уэлча (*Baum – Welch algorithms*) расщепления смесей распределений многомерных наблюдений, управляемых скрытой цепью Маркова (*Hidden Markov Chain*), адаптированные к условиям конкретной модели наблюдений [11].

Проблемы моделей с марковскими переключениями состояний. При использовании на практике моделей MS-VAR и MS-VARX могут возникать проблемы вследствие недостаточно высокой точности оценивания матриц переходных вероятностей в силу короткой длины временных рядов. Короткая длина может быть причиной статистической незначимости оценок (близости к нулю) вероятностей смены состояний, приводящей к остановке работы итерационных алгоритмов [12]. Другая проблема состоит в невыполнении предположения об однородности марковской модели. В обоих случаях существенные погрешности в оценивании матрицы переходных вероятностей могут отражаться на оценках поворотных точек и прогнозах будущего состояния. При нарушении свойства однородности альтернативой могут быть модели с переходными вероятностями, зависящими от экзогенных переменных, значения которых обусловлены сменой состояний [7]. Однако это существенно усложняет модель в целом и приводит к увеличению числа оцениваемых параметров. При короткой длине временных рядов это обуславливает актуальность одномерных моделей MS-AR и MS-ARX вместо соответствующих многомерных моделей.

Другой альтернативой при сложной либо неизвестной модели переключения состояний могут быть модели с *независимыми переключениями состояний (independence switching models)* IS-VARX, предлагаемые в [13; 14]. Данные модели и соответствующие им алгоритмы построения не используют матрицу переходных вероятностей на эта-

пе классификации состояний и оценивания параметров моделей. Однако матрицы переходных вероятностей могут быть получены эмпирическим путем на основе результатов классификации состояний моделируемого процесса. Такой подход применяется для оценивания матриц миграции статистических кредитных рейтингов по панельным данным с неоднородной кластерной структурой в [15].

Концепция «коинтеграции» и «кобрейкинга». Важным этапом в построении моделей с переключением состояний является определение типа моделей используемых временных рядов из возможных классов альтернатив: нестационарные процессы TS (стационарные или содержащие детерминированные тренды) или DS (интегрированные, содержащие стохастические тренды) со структурными изменениями (*structural breaks*), обозначаемые TS-SB и DS-SB соответственно. В зависимости от типа временных рядов модели MS-VAR и MS-VARX могут строиться в уровнях или первых разностях. Возможно также использование *коинтегрированных VAR (Cointegrated VAR – MS-CVAR)*, если используемые временные ряды являются коинтегрированными [7].

При использовании в модели тесно взаимосвязанных экономических переменных, обладающих общими трендами и согласованными структурными изменениями, может возникать свойство, известное как «кобрейкинг» (*cobreaking*) [16]. Концепция «кобрейкинга» в многомерных моделях близка концепции «коинтеграции» временных рядов, описываемых моделями со стохастическими трендами (DS-моделями) [17]. Аналогия состоит в том, что в условиях кобрейкинга существует линейная комбинация временных рядов с общими трендами и структурными изменениями, которая является стационарным временным рядом. В качестве такой комбинации может рассматриваться временной ряд остатков модели. Указанные эффекты кобрейкинга ожидаются при совместном анализе базового и опережающего индикаторов в контексте задачи анализа бизнес-цикла. В рамках проведенных

исследований при построении моделей с переключением состояний тестируются оба свойства, которые обусловлены циклической сменой состояний моделируемого процесса.

Построение сводных опережающих индексов. Сводные индексы могут формироваться на основе специально отобранных макроэкономических показателей [18] либо на основе данных конъюнктурных опросов. В настоящее время в качестве общепринятого международного стандарта построения сводных опережающих индексов по опросным данным во многих странах используется методика, разработанная *Статистическим департаментом ОЭСР и Европейской комиссии* (далее – методика ОЭСР-ЕК) [19]. Опыт построения сводных опережающих индексов по белорусским данным описывается в [20] (на основе макроэкономических показателей) и в [21] (на основе данных конъюнктурных опросов в соответствии с методикой ОЭСР-ЕК). С использованием этой методики на основе данных системы мониторинга предприятий Национального банка Республики Беларусь построены *индексы доверия (Confident Indexes)* для отдельных видов экономической деятельности (ВЭД) и *индекс экономических настроений ИЭН (Economic Sentiment Index – ESI)* для экономики в целом [21].

Предиктивные эконометрические модели базового экономического индикатора. Построению предиктивных моделей базового экономического индикатора на основе опережающих индикаторов посвящено большое число исследований, в рамках которых используются различные виды эконометрических моделей и способы учета циклических структурных изменений. Целями исследований, как правило, являются:

- оценивание прогностических способностей модели с целью выбора лучшего опережающего индикатора из числа возможных вариантов;

- сравнительный анализ различных типов моделей на основе статистик, характеризующих их статистические свойства и точность прогнозирования.

Значительная часть исследований в рамках этой задачи ос-

нована на сводном опережающем индексе CLI (*Composite Leading Index*), публикуемом НБЭИ США с 1968 г. Неоднозначные результаты исследований свидетельствуют о различной эффективности используемых для ее решения подходов. В то же время в работах [22; 23], где используются модели с марковскими переключениями состояний, получены результаты, говорящие о повышении их предиктивных способностей.

Цели и задачи данного исследования. Целью проведенного исследования является оценивание предиктивных способностей моделей с марковскими переключениями состояний, включающих опережающий индикатор и другие необходимые экзогенные переменные. Ожидается, что обоснованное включение экзогенных переменных может повысить качество идентификации поворотных точек цикла и точность прогнозирования базового индикатора. В качестве опережающего индикатора используется ранее разработанный индекс экономических настроений ESI [21].

Для достижения указанной цели решаются следующие задачи: 1) выбор метода построения и формы представления индекса ESI для использования в эконометрических моделях; 2) исследование типа модели временных рядов базового экономического индикатора и индекса ESI и, соответственно, выбор формы представления модели с марковскими переключениями состояний; 3) построение моделей с переключением состояний, включающих опережающий индекс ESI, и их применение для анализа поворотных точек и прогнозирования темпов роста реального ВВП Республики Беларусь. В качестве альтернативного метода оценки поворотных точек рассматривается фильтр Ходрика – Прескотта, используемый в [21].

Выбор метода построения и формы представления сводного индекса ESI. В соответствии с методикой ОЭСР-ЕК [19] сводный индекс экономических настроений ESI вычисляется на основе ежемесечных опросов белорусских предприятий (за период наблюдения с мая 2005 г. по январь 2017 г.) как средневзвешенное значение вре-

менных рядов балансов ответов на вопросы анкеты [21].

Обозначим: $Q^{(k)} = \{q_j^{(k)}\} (j = 1, \dots, N^{(k)}, k = 1, \dots, K)$ – множество вопросов анкеты для ВЭД G_k , где $N^{(k)}$ – количество вопросов;

$Q = \bigcup_{k=1}^K Q^{(k)} (k = 1, \dots, K)$ – множество всех вопросов; $N = \sum_{k=1}^K N^{(k)}$ – их

общее число; $x_{i,j,t}^{(k)}$ – ответ на вопрос $q_j^{(k)} (j = 1, \dots, N^{(k)})$ организации $i (i = 1, \dots, n^{(k)})$, относящейся к ВЭД $G^{(k)} (k = 1, \dots, K)$ в момент времени $t (t = 1, \dots, T)$.

По всем вопросам анкеты $q_1^{(k)}, \dots, q_{N^{(k)}}^{(k)}$ возможны три варианта ответов $x_{i,j,t}^{(k)} \in X = \{-1, 0, 1\}$, соответствующих ожиданиям респондента относительно состояния организации в ближайшей перспективе: $x_{i,j,t}^{(k)} = +1$, если ожидается улучшение; $x_{i,j,t}^{(k)} = 0$, если состояние останется без изменений; $x_{i,j,t}^{(k)} = -1$, если ожидается ухудшение состояния. Тогда временные ряды балансов ответов в процентах от общего числа ответов $n^{(k)}$ допускают представление:

$$B_{jt}^{(k)} = \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{i=1}^{n^{(k)}} x_{i,j,t}^{(k)} \times 100(\%) \in [-100, +100], j = 1, \dots, N^{(k)}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

Сводный индекс ESI вычисляется как средневзвешенное значение временных рядов балансов ответов $\{B_{jt}^{(k)}\}$:

$$ESI_t = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N^{(k)}} \omega_j^{(k)} B_{jt}^{(k)}, \quad (2)$$

где $\omega_j^{(k)}$ – весовые коэффициенты для вопросов, которые зависят от принадлежности респондента к ВЭД $G^{(k)}$ и удовлетворяют условиям:

$$\omega_j^{(k)} = \dots = \omega_{N^{(k)}}^{(k)} \equiv \alpha^{(k)} / N^{(k)} (k = 1, \dots, K), \sum_{k=1}^K \alpha^{(k)} = 1. \quad (3)$$

В качестве $\{\alpha^{(k)}\}$ используются доли вкладов ВЭД в реальный ВВП, которые оцениваются на основе статистических данных для рассматриваемого периода исследований. В результате преобразования «нормализации» временного ряда индекса ESI его ожидаемые значения располагаются в диапазоне от 90 до 110 [21]. Предполагается, что значение индекса ESI на уровне 100

единиц соответствует долгосрочному тренду. Превышение данного уровня интерпретируется как рост, а значения ниже 100 – как спад экономической активности.

Возможны два метода вычисления ИЭН: прямой и непрямой. При *непрямом методе* в формуле (2) используются сезонно скорректированные временные ряды $\{B_{jt}^{(k)}\}$. В случае *прямого метода* процедура сезонной корректировки при построении сводного индекса ESI применяется лишь один раз, после его вычисления. По этой причине такие временные ряды в меньшей степени подвергаются искажениям, связанным с применением процедур сезонного сглаживания. Прямой метод предпочтительнее использовать в случаях, когда агрегируемые временные ряды имеют схожую модель сезонности и если отдельные временные ряды из сводного индекса не могут быть надежно скорректированы, например при малом объеме данных. Суммирование таких временных рядов улучшает свойства сезонной модели сводного индекса и снижает уровень ее шумовой компоненты [19]. Как показывают проведенные исследования на основе эконометрического моделирования, этими свойствами обладают используемые временные ряды балансов ответов $\{B_{jt}^{(k)}\}$. Более подробно решение данной проблемы описано в [21]. Там же приводятся результаты использования индекса ESI, вычисленного по непрямому методу,

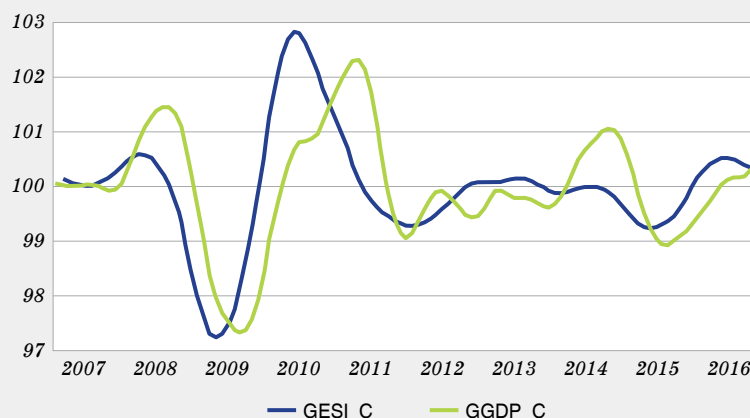
в предиктивных эконометрических моделях для месячных темпов роста реального ВВП.

Исследование типа временных рядов и выбор формы модели с марковскими переключениями состояний. В данном исследовании в качестве базового экономического индикатора для определения бизнес-цикла используется месячный реальный ВВП (переменная GDP) в ценах 2014 г., а также индекс ESI (2), вычисленный по прямому методу. С помощью фильтра Ходрика – Прескотта в [21] установлено, что для рассматриваемого временного интервала (май 2005 г. – январь 2017 г.) поворотные точки индекса ESI опережают поворотные точки бизнес-цикла со средним периодом опережения 4 месяца.

В представляемых эконометрических моделях используются годовые темпы роста GGDP и GESI для реального ВВП и индекса ИЭН, которые можно рассматривать как сезонно скорректированные временные ряды GDP и ESI. Их циклические компоненты GGDP_C и GESI_C, представленные на рисунке 1, демонстрируют опережающий характер GESI_C по отношению к GGDP_C. В связи с этим переменная GESI интерпретируется как «опережающий индикатор» по отношению к GGDP.

Для тестирования интегрированности временных рядов GGDP и GESI и их первых разностей DGGDP и DGESEI используются тесты, допускающие наличие структурных изменений. Тест BPUR

Циклы годовых темпов роста реального ВВП и ИЭН



Примечание. Разработка авторов.

Рисунок 1

Таблица 1

Результаты тестирования временных рядов GGDP, GESI и их первых разностей с помощью теста BPUR

Временной ряд	Включение в модель тренда t и константы c	Значение статистики критерия	Уровень значимости ε и пороговые значения			Момент структурного изменения t_{SB}	Фактический уровень значимости (Р-значение)
			0,01	0,05	0,1		
GGDP	t, c	-4,897	-5,72	-5,18	-4,90	10.2009	0,099
DGGDP	c	-19,690	-4,95	-4,44	-4,19	07.2011	<0,01
GESI	c	-4,363	-4,95	-4,44	-4,19	11.2010	0,063
DGESI	c	-5,286	-4,95	-4,44	-4,19	11.2010	<0,01

Примечание. Разработка авторов.

(*Brake Point Unit Roots test*) [24] проверяет гипотезу о том, что временной ряд является интегрированным с возможным структурным изменением в свободном члене c и/или в линейном тренде t , обусловленными аномалиями в инновационном процессе. При наличии множественных структурных изменений в результате тестирования устанавливается момент, соответствующий наиболее ярко выраженному структурному изменению. Альтернативой выступает модель стационарного или стационарного относительно детерминированного тренда временного ряда со структурными изменениями. Результаты тестирования временных рядов GGDP и GESI, а также их первых разностей приведены в таблице 1.

Согласно таблице 1 тест BPUR для обоих временных рядов GGDP и GESI не отклоняет гипотезу о том, что они относятся к классу моделей DS-SB, то есть являются интегрированными порядка 1 со структурными изменениями типа «инновационных аномалий» в установленные моменты времени.

В предположении о принадлежности временных рядов GGDP

и GESI к классу моделей TS-SB, допускающих множественные структурные изменения в константе и линейном тренде, используется тест Баи – Перрона (*Bai – Perron tests sequentially determined breaks*) с одновременным построением для них моделей указанного типа с помощью метода наименьших квадратов с учетом установленных моментов структурных изменений (*Brake LS Method*) [24]. Установленные моменты структурных изменений в линейном тренде t и свободном члене c представлены в таблице 2. Достаточно большое число структурных изменений в течение относительно короткого временного интервала может свидетельствовать о том, что временные ряды содержат стохастические тренды. В то же время моменты структурных изменений GGDP и GESI(-4) близки по времени наступления, а изменения в GESI предшествуют изменениям в GGDP. Имеется также их очевидная связь с поворотными точками бизнес-цикла, построенного с помощью фильтра Ходрика – Прескотта (таблица 6), что позволяет дать им соответствующую экономическую интерпретацию. Согласованность момен-

тов структурных изменений можно объяснить эффектами кобрейкинга [16]. Еще одним эффектом кобрейкинга временных рядов является отсутствие структурных изменений в моделях (4) и (5), описывающих их взаимосвязь и оцененных с помощью метода наименьших квадратов (указаны Р-значения). Остатки обеих моделей являются гауссовским белым шумом. Модель (5) с опережающей лаговой переменной, очевидно, предпочтительнее в контексте задачи прогнозирования GGDP, поскольку позволяет строить динамические прогнозы.

$$GGDP_t = 0,2979 \times GGDP_{t-1} + 0,3501 \times GGDP_{t-2} + 0,1044 \times GESI_t - 0,0356 \times t + 28,7076$$

$R^2 = 0,7631, DW = 2,0336, SER = 2,7236.$ (4)

$$GGDP_t = 0,2368 \times GGDP_{t-1} + 0,2269 \times GGDP_{t-2} + 0,1330 \times GESI_{t-4} - 0,0539 \times t + 46,406$$

$R^2 = 0,7590, DW = 1,9507, SER = 2,745.$ (5)

Таблица 2

Тестирование структурных изменений с помощью теста Баи – Перрона

Временной ряд	Моменты структурных изменений в линейном тренде (t) и свободном члене (c)			
GGDP	02.2008 (c)	11.2009 (c, t)	09.2011 (c)	03.2015 (c, t)
GESI	01.2008 (c, t)	10.2009 (c, t)	05.2011 (c)	12.2014 (t)
GESI(-4)	05.2008 (c)	02.2010 (c, t)	08.2011 (c)	04.2015 (t)

Примечание. Разработка авторов.

Согласованность моментов структурных изменений и наличие общего тренда лежит в основе коинтеграционной зависимости данных временных рядов в предположении их интегрированности. Результаты тестирования коинтеграции с помощью двух тестов, представленные в *таблице 3*, свидетельствуют в пользу данного предположения. Аналогичные выводы получаются на основании теста Хансена, который проверяет гипотезу о коинтегрированности в условиях структурной нестабильности модели (Р-значение больше 0,2) [25]. С помощью метода оценивания параметров DOLS (*Dynamic Ordinary Least Squares*) получено коинтеграционное регрессионное уравнение с линейным трендом (6), описывающее долгосрочную зависимость между переменными GGDP и GESI.

$$GGDP_t = 0,1806 \times GESI_t - 0,1018 \times t + 93,3046, \quad R^2 = 0,7169, DW = 1,3470. \quad (6)$$

Общее описание моделей и методики решения задач исследования. В силу короткой длины временных рядов в качестве исходных моделей для рассматриваемой задачи используются одномерные модели с марковскими переходами состояний со свободным членом, различающиеся составом экзогенных переменных. Упрощающие модельные предположения обусловлены итоговым видом полученных моделей в условиях относительно небольшой длины временных рядов.

В силу особенностей цикла экономической активности в рассматриваемый период времени выделяются два класса состояний экономической активности: «спад» (состояние 0, которое

включает также фазу «замедление»); «рост» (состояние 1, включающее фазу «восстановление»).

В случае, когда число классов состояний $L = 2$, при сделанных предположениях рассматриваемые модели в общем случае описываются моделью авторегрессии порядка p со свободным членом и m экзогенными переменными, обозначаемой MS(2)-ARX(p, m), вида:

$$y_t = c_{d(t)} + \sum_{i=1}^p \alpha_{d(t),i} y_{t-i} + \sum_{j=1}^m \beta_{d(t),j} x_{t,j} + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (7)$$

где для момента времени t : $y_t \in \mathbb{R}^1$ – моделируемый показатель, y_{1-p}, \dots, y_0 – его заданные начальные значения; $x_{t,1}, \dots, x_{t,m} \in \mathbb{R}^1$ – экзогенные переменные; $\eta_t \in \mathbb{R}^1$ – случайные ошибки наблюдения (*инновационный процесс*), имеющие нормальный закон распределения с нулевым средним значением и постоянной дисперсией σ^2 ; $d_t \equiv d(t) \in \{0, 1\}$ – номер класса состояния; $\{\alpha_{d(t)}\}$ – коэффициенты авторегрессии, $\{c_{d(t)}\}$ – свободный член и коэффициенты регрессии, зависящие от номера класса состояния $d(t)$.

Относительно номеров классов состояний делается следующее предположение: дискретные случайные величины $\{d_t\}$ образуют *однородную эргодическую цепь Маркова* (ОЦМ) с вероятностями начального состояния $\pi_0 = P\{d_1 = 0\} > 0$, $\pi_1 = 1 - \pi_0$, и переходными вероятностями $p_{kl} = P\{d_{t+1} = l \mid d_t = k\} \geq 0$ ($k, l \in \{0, 1\}$), $p_{00} + p_{01} = 1$, $p_{10} + p_{11} = 1$.

Для совместного оценивания номеров классов состояний $\{d_t\}$ ($t = 1, \dots, T$) и вектора неизвестных параметров θ , включающего параметры ARX-моделей для классов состояний и параметры ОЦМл, P , по временным

рядам $Y = \{y_t\}$, $X = \{x_t\}$ ($t = 1, \dots, T$) используются итерационные EM-алгоритмы [10; 11], результатом работы которых являются оценки искоемых параметров θ , а также оценки следующих характеристик:

- $P\{d_t = l \mid Y, X; \bar{\theta}\}$ – апостериорная вероятность класса состояния $l \in \{0, 1\}$ для момента времени t ;
- $P\{d_{t+1} = l \mid d_t = k; Y, X; \bar{\theta}\}$ – вероятность перехода системы из состояния $k \in \{0, 1\}$ в состояние $l \in \{0, 1\}$ в момент времени t при тех же условиях.

Оценки номеров классов $\{\bar{d}_t\}$ находятся по правилу *максимума апостериорной вероятности*:

$$\bar{d}_t = \arg \max_{l \in \{0, \dots, L-1\}} P\{d_t = l \mid Y, X; \bar{\theta}\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (8)$$

которое в случае двух классов эквивалентно правилу [4]:

$$\bar{d}_t = 0, \text{ если } P\{d_t = 0 \mid Y, X; \bar{\theta}\} > 0,5; \bar{d}_t = 1, \text{ если } P\{d_t = 0 \mid Y, X; \bar{\theta}\} \leq 0,5.$$

На основании оценок номеров классов состояний $\{\bar{d}_t\}$ определяются поворотные точки цикла («пик» и «дно») по следующему правилу: в момент времени $t = \tau$ имеет место: «пик», если $\bar{d}_\tau = 1$, $\bar{d}_{\tau+1} = 0$; «дно», если $\bar{d}_\tau = 0$, $\bar{d}_{\tau+1} = 1$.

Поскольку решающие правила статистической классификации временных рядов типа (8) имеют ненулевую вероятность ошибки [14], то возможно появление ложных сигналов о смене классов состояний, которые не должны приниматься во внимание. Необходимость исключения краткосрочных колебаний в рассматриваемой задаче обусловлена также ограничениями, имеющи-

Таблица 3

Результаты тестирования коинтеграции GGDP и GESI

Временные ряды	Тесты коинтеграции, нулевая гипотеза: ряды не коинтегрированные			
	Энга – Грейнджера		Филлипса – Улиариса	
	τ -статистика, Р-значение	z -статистика, Р-значение	τ -статистика, Р-значение	z -статистика, Р-значение
GGDP, GESI	-3,932 0,0415	-31,280 0,0152	-6,494 0,0000	-65,243 0,0000

Примечание. Разработка авторов.

ми экономическую интерпретацию: не менее двух кварталов пребывания экономической системы в текущем состоянии [19]. По этой причине требуется дополнительное «сглаживание» случайной последовательности $\{\bar{d}_t\}$ ($t = 1, \dots, T$). В [7; 23] сглаживание основано на использовании оценки матрицы переходных вероятностей \bar{P} , что требует высокой точности ее оценивания; в [9] предлагается статистический критерий «скользящего» тестирования последовательности $\{\bar{d}_t\}$ ($t = 1, \dots, T$), не требующий знания матрицы \bar{P} .

Построение и сравнительный анализ моделей с переключением состояний. С учетом обозначений $y_t = GGDP_t$, $x_{t,1} = t$, $x_{t,2} = GESI_t$, $GESI_t(-4)$ рассматриваются модели вида MS(2)-ARX(2,2):

$$M.0. GGDP_t = c_{d(t)} + \alpha_{d(t),1}y_{t-1} + \alpha_{d(t),2}y_{t-2} + \dots + \eta_t,$$

$$M.1. GGDP_t = c_{d(t)} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \beta_{d(t),1}t + \eta_t,$$

$$M.2. GGDP_t = c_{d(t)} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \beta_{d(t),1}t + \beta_{d(t),2}GESI_t + \eta_t,$$

$$M.3. GGDP_t = c_{d(t)} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \beta_{d(t),1}t + \beta_{d(t),2}GESI_{t-4} + \eta_t.$$

Модель M.0 без экзогенных переменных предполагает, что циклические изменения обусловлены аномалиями в инновационном процессе и ведут к скачкообразному изменению среднего уровня значений переменной GGDP, который определяется свободным членом $c_{d(t)}$. Остальные модели содержат экзогенные переменные. Модель M.1 допускает циклические изменения в трендовой компоненте. В основе модели M.2 лежит долгосрочная коинтеграционная зависимость между GGDP и GESI вида (6), которая включает линейный тренд. Модель M.3 в отличие от M.2 включает опережающую экзогенную переменную GESI(-4). Все коэффициенты при экзо-

генных переменных зависят от класса состояния экономической активности.

Цель исследования состоит в оценке эффектов включения в базовую модель M.0 альтернативных вариантов экзогенных переменных, которые отражаются на качестве идентификации поворотных точек и точности прогнозирования GGDP. В *таблице 4* приводятся характеристики оцененных моделей для обоих классов состояний с указанием параметров, подверженных циклическим изменениям.

На основании *таблицы 4* можно сделать следующие выводы: 1) свободный член и все включенные в модель экзогенные переменные подвержены циклическим

структурным изменениям; 2) параметры моделей M.0, M.1, M.2, соответствующие свободному члену c и экзогенным переменным t , GESI, чувствительны к резкому спаду экономической активности, о чем свидетельствуют статистически значимые значения параметров для состояния «спад». В то время как переход в состояние «рост» проявляется только в статистически значимом увеличении свободного члена; 3) модель M.3 с опережающей экзогенной переменной GESI(-4) обладает предиктивными способностями при определении двух классов состояний, поскольку статистически значимые изменения имеют место во всех параметрах модели в обоих случаях. В *таблице 5*

Таблица 4

Характеристики альтернативных моделей для двух классов состояний

Модель	Экзогенные переменные	Параметры	Оценки параметров / P-значения	
			состояние «спад»	состояние «рост»
M.0	нет	c	100,7035/0,000	103,5599/0,000
		α_1	0,4036/0,000	0,0829/0,743
		α_2	0,5533/0,000	-0,2713/0,178
M.1	t	c	104,3309/0,000	109,4102/0,000
		β_1	-0,0536/0,000	0,0050/0,840
M.2	t	c	92,415/0,000	101,6467/0,000
		β_1	-0,0690/0,000	0,0256/0,289
	ESI	β_2	0,1373/0,000	0,0750/0,254
M.3	t	c	73,7080/0,000	98,919/0,000
		β_1	-0,0622/0,000	-0,1169/0,000
	ESI(-4)	β_2	0,3569/0,000	0,1118/0,0001

Примечание. Разработка авторов.

Таблица 5

Оценки переходных вероятностей и соответствующие им P-значения

Модель	\bar{P}_{00}/p	\bar{P}_{01}	\bar{P}_{10}/p	\bar{P}_{11}	$\bar{\pi}_0$	$\bar{\pi}_1$
M.1	0,9784/0,000	0,0216	0,3430/0,204	0,6570	0,614	0,386
M.2	0,9611/0,000	0,0389	0,2050/0,172	0,7950	0,655	0,345
M.3	0,9288/0,000	0,0712	0,1163/0,124	0,8837	0,620	0,380

Примечание. Разработка авторов.

приводятся оценки начальных и переходных вероятностей, а также соответствующие им Р-значения (переменная p) для моделей с экзогенными переменными. В силу сравнительно небольшой длины временных рядов число смен состояний невелико, что является причиной малых значений оценок вероятностей p_{01} и p_{10} и, соответственно, их невысокой значимости.

Графическое представление результатов экспериментов с построенными моделями дано на рисунках 2–5. На рисунках представлена динамика годовых темпов роста реального ВВП GGDP и их прогнозов на основе рассматриваемых моделей с переключением состояний для периода оценивания (голубая линия) и периода прогнозирования (красная линия), а также отмечены интервалы, соответствующие классам состояний «рост» (серая полоса) и «спад» (белая полоса). На рисунке 2 для определения поворотных точек используется несглаженная последовательность номеров классов состояний $\{\bar{a}_t\}$ ($t = 1, \dots, T$), что объясняет появление на графике признаков краткосрочных колебаний состояния экономической активности. На рисунках 3–5 краткосрочные колебания исключаются с помощью процедуры сглаживания [9; 23].

В таблице 6 представлены поворотные точки бизнес-цикла, установленные с помощью фильтра Ходрика – Прескотта и моделей с переключением состояний, включающих индекс ESI. Следует отметить, что имеет место достаточно хорошая согласованность поворотных точек, полученных с использованием статистического фильтра и модели М.3 с опережающей экзогенной переменной GESI(-4). Причем поворотные точки, соответствующие модели М.3, в целом дают более ранние прогнозы о смене состояний. На рисунке 6 дается графическое представление классов состояний, полученных с помощью обоих методов: для модели М.3, состояния указаны вертикальными полосами, а цикл на основе фильтра Ходрика – Прескотта представлен зеленой линией.

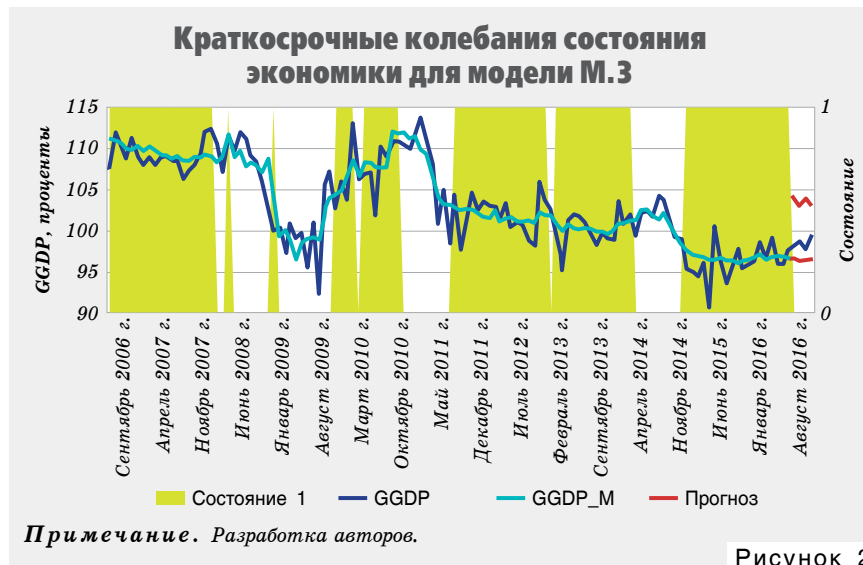


Рисунок 2



Рисунок 3



Рисунок 4



Рисунок 5



Рисунок 6

Заключение

Проведенные исследования моделей с марковскими переключениями состояний и экзогенными переменными на данных белорусской экономики позволяют сделать следующие выводы:

1) модели с марковскими переключениями состояний и экзогенными переменными, включающими опережающий индикатор, являются эффективным, гибким и многофункциональным инструментом анализа бизнес-цикла, позволяющим оценивать и прогнозировать поворотные точки цикла и значения базового экономического индикатора;

2) в качестве опережающего экономического индикатора целесообразно использовать индекс экономических настроений (ИЭН), построенный по прямому методу в соответствии с методикой ОСЭР-ЕК;

3) для построения эконометрических моделей целесообразно использовать годовые темпы роста реального ВВП и индекса ИЭН, которые являются сезонно скорректированными временными рядами значений анализируемых экономических переменных, имеют общие тренды, согласованные структурные изменения (удовлетворяют условиям кобрейкинга) и связаны долгосрочной коинтеграционной зависимостью;

4) поворотные точки, идентифицированные на основе модели с марковскими переключениями состояний и ИЭН в форме опережающего индикатора (ESI(-4)) предшествуют соответствующим

Таблица 6

Поворотные точки бизнес-цикла на основе фильтра Ходрика – Прескотта и модели с переключением состояний, использующей индекс ESI

Метод	Поворотные точки					
	Пик	Дно	Пик	Дно	Пик	Дно
Фильтр Ходрика – Прескотта	06.2008	09.2009	03.2011	09.2013	07.2014	01.2016
Модель М.0	Не имеют содержательной интерпретации					
Модель М.2	–	12.2008	09.2010	07.2011	–	–
Модель М.3	09.2007	10.2009	10.2010	06.2011	02.2014	–

Примечание. Разработка авторов.

поворотным точкам цикла, построенного на основе фильтра Ходрика – Прескотта, и, следовательно, позволяют давать более ранние прогнозы о смене фаз цикла;
5) получаемые модели годовых темпов роста реального ВВП для

различных классов состояний могут использоваться для построения краткосрочных прогнозов темпов роста экономики;
6) в силу установленного свойства кобрейкинга временных рядов годовых темпов роста реального ВВП и индекса ИЭН

представляет интерес использование построенных предиктивных эконометрических моделей, учитывающих их непосредственную статистическую зависимость.

* * *

Материал поступил 23.03.2020.

Библиографический список:

- Mitchell, W. *Statistical Indicators of Cyclical Revivals* / W. Mitchell, A. Burns. – New York: National Bureau of Economic Research, 1938.
- OECD System of Composite Leading Indicators [Electronic resource] / OECD, Methodology Guide-Line, 2008. – Mode of access: <http://www.oecd.org/std/li1.htm>.
- Handbook on Constructing Composite Indicators: Methodology and User Guide [Electronic resource] / OECD, 2008. – Mode of access: <https://www.oecd.org/sdd/42495745.pdf>.
- Hamilton, J.D. *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle* / J.D. Hamilton // *Econometrica*. – 1989. – № 57 (2). – P. 357–384.
- Макаревич, А.С. Сравнительный анализ фильтров Ходрика – Прескотта и Хамильтона при оценивании поворотных точек бизнес-цикла и индекса экономических настроений белорусской экономики / А.С. Макаревич, В.И. Малюгин // *Банкаўскі веснік*. – 2018. – № 8. – С. 49–56.
- Hamilton, J.D. *Regime switching models* / J.D. Hamilton. In: S.N. Durlauf, L.E. Blume (eds) // *New Palgrave Dictionary of Economics*, 2nd Edition. – Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2008. – P. 1755–1804.
- Krolzig, H.-M. *Markov switching vector autoregressions, Modelling statistical inference and application to business cycle analysis* / H.-M. Krolzig. – Berlin, Springer-Verlag, 1997. – 360 p.
- Малюгин, В.И. Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний / В.И. Малюгин, А.Ю. Новопольцев // *Весці НАН Беларусі*. – 2015. – № 2. – С. 26–36. – *Серыя фіз.-мат. навук*.
- Малюгин, В.И. Алгоритмы тестирования циклических структурных изменений в моделях векторной авторегрессии с переключением состояний / В.И. Малюгин // *Информатика*. – 2015. – № 4 (20). – С. 79–88.
- Malugin, V. *Statistical Estimation and Classification Algorithms for Regime-Switching VAR Model with Exogenous Variables* / V. Malugin, A. Novopoltsev // *Austrian Journal of Statistic*. – Vol. 46. – P. 47–56.
- Bilmes, J.A. *A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models: Technical Report* / J.A. Bilmes // *Int. Computer Science Institute, Berkeley CA. – Berkeley*, 1998. – 13 p.
- Droumaguet, M. *Markov-Switching Vector Autoregressive Models: Monte Carlo Experiment, Impulse Response Analysis, and Granger-Causal Analysis: thesis of Doctor of Economics* / M. Droumaguet // *European University Institute. – Florence*, 2012. – 167 p.
- Малюгин, В.И. Об оптимальности классификации случайных наблюдений, различающихся уравнениями регрессии / В.И. Малюгин, Ю.С. Харин // *Автоматика и телемеханика*. – 1986. – № 7. – С. 35–46.
- Малюгин, В.И. Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой / В.И. Малюгин. – Минск: БГУ, 2014. – 351 с.
- Малюгин, В.И. Анализ финансовой стабильности реального сектора экономики на основе микроданных: макроэкономический аспект / В.И. Малюгин, А.Ю. Новопольцев // *Банкаўскі веснік*. – 2019. – № 10. – С. 20–27.
- Hendry, D. *Co-Breaking: Recent Advances and a Synopsis of the Literature Article* / David F. Hendry, Michael Massmann // *Journal of Business and Economic Statistics*. – January-February. – 2007. – P. 33–51.
- Харин, Ю.С. *Эконометрическое моделирование: учеб. пособие* / Ю.С. Харин, В.И. Малюгин, А.Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2004. – 313 с.
- Stock, J. *New indexes of leading and coincidental economic indicators. In NBER macroeconomics Annual, Blanchard O, Fisher S (eds) / J. Stock, M. Watson. – Cambridge: Mass.: MIT Press*, 1989.
- Directorate-General for Economic and Financial Affairs. *The joint harmonized EU program of business and consumer surveys. – European Commission*, 2014. – 49 p.
- Крук, Д.Э. *Методология построения сводного индекса опережающих индикаторов для Беларуси [Электронный ресурс]* / Д.Э. Крук, А.В. Зарецкий // *Исследовательский центр ИПМ. Рабочий материал WP11/01. – 2011. – Режим доступа: <http://www.eng.research.by/webroot/delivery/files/wp2011r01.pdf>. – Дата доступа: 03.06.2016.*
- Малюгин, В.И. Индекс экономических настроений белорусской экономики: методические, модельные и инструментальные средства построения и применения / В.И. Малюгин, Д.Э. Крук, П.С. Милевский // *Банкаўскі веснік*. – Тэматычны выпуск «Исследования банка № 16». – Красавік, 2019. – 30 с.
- Hamilton, J. *What do the leading indicators lead?* / J. Hamilton, G. Pérez-Quiros // *Journal of Business*. – 1996. – № 69. – P. 27–49.
- Kim, Ch. *Predicting business cycle phases with indexes of leading and coincident economic indicators: a multivariate regime-shift approach* / Ch. Kim // *Working Paper. – Seoul: Korea University*, 1994. – 19 p.
- Time Series Econometrics. Unit Roots and trend Breaks. Vol. 1* / Ed. P. Perron. – New Jersey: World Scientific, 2018. – 743 p.
- Hansen, B.E. *Testing for Parameter Instability in Linear Models* / B.E. Hansen // *Journal of Policy Modeling*. – 1992. – Vol. 14. – P. 517–533.

MS-VARX Model and Its Use to Analyze the Business Cycle of the Belarusian Economy

Vladimir MALUGIN, *Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: Malugin@bsu.by.*

Anatoly MAKAREVICH, *Master's Degree Student, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: anatoly_mak@yahoo.com.*

Abstract. *The model with Markovian switching of conditions MS-VARX, the mathematical grounding of which was proposed by the author earlier, extends the well-known model MS-VAR, allowing for the possibility of use of exogenous variables. This article covers its economic verification. The problem of the business cycle analysis and forecasting of the growth rates of the real GDP of the Belarusian economy is considered. The developed model is based on the cointegration interrelation between the real GDP annual growth rates and the Economic Sentiment Index (ESI), which is used as an outstripping economic indicator in the exogenous manner. The advantages of the proposed model in forecasting the turning points of the cycle and the growth rates of economic activity are determined.*

Keywords: *MS-VARX model; outstripping economic indicator; real GDP; Economic Sentiment Index; business cycle analysis; cointegration; the Belarusian economy.*