ETH zürich



Theoretische Informatik

Olivér Kovács

29. Okt 2026

Midterm

Altklausuren: https://exams.vis.ethz.ch/

Stoff hat sich geändert:

- Kolmogorovkomplexität, Satz 3.1 nicht relevant.
- Relevant bis einschliesslich
  - Vorlesung am 03. Novemeber,
  - Blatt 6,
  - Quiz 7.
- Manches davon war früher nicht auf den Midterms!

Bemerkungen zur Serie

- 9 (b). Mathematische Angabe erheblich einfacher als Beschreibung des Konstruktionsverfahrens.
- 9 (c). Falls konkreter Automat verlangt ist, einfach Bild zeichnen. :)
- 10 (a). Für allgemeine Konstruktionen reicht ein Bild nicht.
- 10 (a). Regularität von L^R muss bewiesen werden.

Quiz

Gibt es Fragen zum Quiz?

Reduktionen

Definition 5.3. Die Sprache L_1 ist auf L_2 *rekursiv reduzierbar*, $L_1 \leq_{\mathsf{R}} L_2$, falls

$$L_2 \in \mathcal{L}_{\mathsf{R}} \implies L_1 \in \mathcal{L}_{\mathsf{R}}.$$

Definition 5.4. Die Sprache L_1 ist auf L_2 *EE-reduzierbar*, $L_1 \leq_{\mathsf{EE}} L_2$, falls eine TM M existiert, welche die Funktion f_M berechnet, so dass gilt

$$x \in L_1 \iff f_M(x) \in L_2.$$

Lemma 5.4. Für jede Sprache L gilt $L \leq_{\mathsf{R}} L^C$.

Beweis?

Diagonalsprache

Definition. Seien $w_1, w_2, w_3, \ldots$ die Wörter über $\{0,1\}$ in kanonischer Ordnung und $M_1, M_2, M_3, \ldots$ die Folge aller Turingmaschinen. Wir definieren die *Diagonalsprache* L_{diag} als

$$L_{\text{diag}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}.$$

Satz 5.5. $L_{\text{diag}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Lemma 5.5. $(L_{\text{diag}})^C \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Beweis?

Die universelle Sprache

Definition 5.6. Die *universelle Sprache* ist die Sprache

$$L_U = \{\mathsf{Kod}(M)\#w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } M \text{ akzeptiert } w\}.$$

Satz 5.6. $L_{\mathsf{U}} \in \mathcal{L}_{\mathsf{RE}}$.

Satz 5.7. $L_{\mathsf{U}} \notin \mathcal{L}_{\mathsf{R}}$.

Beweis?

Das Halteproblem

Definition 5.6. Das *Halteproblem* ist das Entscheidungsproblem $(\{0,1,\#\}, L_H)$, wobei

$$L_H = \{\mathsf{Kod}(M)\#w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } M \text{ hält auf } w\}.$$

Satz 5.8. $L_{\mathsf{H}} \notin \mathcal{L}_{\mathsf{R}}$.

Beweis?

L_{empty}

Definition. Sei L_{empty} die Sprache

$$L_{\text{empty}} = \{\text{Kod}(M) \mid L(M) = \varnothing\}.$$

Lemma 5.6. $(L_{\text{empty}})^C \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Lemma 5.7. $(L_{\text{empty}})^C \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$.

Beweis?

L_{empty}

Korollar 5.4. $L_{\text{empty}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$.

Korollar 5.5. Sei L_{EQ} die Sprache

$$L_{\text{EQ}} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(M') \mid L(M) = L(M')\}.$$

Es gilt $L_{\text{EQ}} \notin \mathcal{L}_R$.

Beweis?

Aufgaben

1. **Aufgabe 1.** Beschreibe informell eine NTM, welche die Sprache

$$L_{\text{composite}} = \{w = 0^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ist nicht prim}\}$$

   akzeptiert.
2. **Aufgabe 2.** Wir betrachten die Sprache

   $L_{\lambda+1} = \{\text{Kod}(M) \mid \text{TM } M \text{ akzeptiert } \lambda \text{ und mindestens ein weiteres Wort}\}$.

   Zeige, dass $L_{\lambda+1} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$.
3. **Aufgabe 3.** Beweise, dass für jede Sprache L gilt

$$L \in \mathcal{L}_{\text{RE}} \setminus \mathcal{L}_{\text{R}} \implies L^C \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}.$$

4. **Aufgabe 4.** Gibt es eine Sprache L, für die gilt $L \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ und $L^C \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$?