ETH zürich



Theoretische Informatik

Olivér Kovács

05. Nov 2026

Bemerkungen zur Serie

Aufgabe 11 (Hilbert Hotel)

- In TI gilt $0 \in \mathbb{N}$.
- Es ist egal, wie man nummeriert, aber am Besten erwähnen.
- Konstruktive Lösung wäre schön. (Portier!)

Aufgabe 12 (Reduktionen)

- "Garbage" Elemente im Komplement nicht vergessen!
- Korrektheit beweisen.
- Lemma 5.3 zitieren.

Quiz

Gibt es Fragen zum Quiz?

Reduktionen

Lemma ($*$). Für jede Sprache L gilt

$$L \in \mathcal{L}_{\mathsf{RE}} \wedge L^C \in \mathcal{L}_{\mathsf{RE}} \implies L \in \mathcal{L}_{\mathsf{R}}.$$

Beweis?

Reduktionen

Lemma ($*$). Für jede Sprache L gilt

$$L \in \mathcal{L}_{\mathsf{RE}} \wedge L^C \in \mathcal{L}_{\mathsf{RE}} \implies L \in \mathcal{L}_{\mathsf{R}}.$$

Beweis: Seien M_1, M_2 TMs mit $L(M_1) = L(M_2)^C = L$. Die TM M simuliert abwechselnd M_1, M_2 auf gegebenes w, akzeptiert falls M_1 akzeptiert, verwirft falls M_2 akzeptiert. Da $w \in L$ oder $w \in L^C$ hält M immer und $L(M) = L$.

Übersicht Beweisideen

L	$L \notin \mathcal{L}_\mathsf{R}$	$L \in \mathcal{L}_\mathsf{RE}$	$L \notin \mathcal{L}_\mathsf{RE}$
L_diag	✓	-	Diag.-argument 2
$(L_\mathsf{diag})^C$	$\mathcal{L}_\mathsf{R} \not\ni L_\mathsf{diag} \leq_\mathsf{R} (L_\mathsf{diag})^C$	$(L_\mathsf{diag})^C \leq_\mathsf{EE} L_\mathsf{U}^{\in \mathcal{L}_\mathsf{RE}}$	-
L_U	$\mathcal{L}_\mathsf{R} \not\ni (L_\mathsf{diag})^C \leq_\mathsf{R} L_\mathsf{U}$	TM	-
$(L_\mathsf{U})^C$	✓	-	$(*)$, $L_\mathsf{U} \in \mathcal{L}_\mathsf{RE} \setminus \mathcal{L}_\mathsf{R}$†
L_H	$\mathcal{L}_\mathsf{R} \not\ni L_\mathsf{U} \leq_\mathsf{R} L_\mathsf{H}$	$L_\mathsf{H} \leq_\mathsf{EE} L_\mathsf{U}^{\in \mathcal{L}_\mathsf{RE}}$	-
$(L_\mathsf{H})^C$	✓	-	$(*)$, $L_\mathsf{H} \in \mathcal{L}_\mathsf{RE} \setminus \mathcal{L}_\mathsf{R}$†
L_empty	✓	-	$(*)$, $(L_\mathsf{empty})^C \in \mathcal{L}_\mathsf{RE} \setminus \mathcal{L}_\mathsf{R}$†
$(L_\mathsf{empty})^C$	$\mathcal{L}_\mathsf{R} \not\ni L_\mathsf{U} \leq_\mathsf{R} (L_\mathsf{empty})^C$	(N)TM	-
L_EQ	✓	-	$\mathcal{L}_\mathsf{RE} \not\ni$† $L_\mathsf{empty} \leq_\mathsf{EE} L_\mathsf{EQ}$
$(L_\mathsf{EQ})^C$†	✓	-	$\mathcal{L}_\mathsf{RE} \not\ni (L_\mathsf{H})^C \leq_\mathsf{EE} (L_\mathsf{EQ})^C$
$L_{\mathsf{H},\lambda}$	$\mathcal{L}_\mathsf{R} \not\ni L_\mathsf{H} \leq_\mathsf{R} L_{\mathsf{H},\lambda}$	$L_{\mathsf{H},\lambda} \leq_\mathsf{EE} L_\mathsf{H}^{\in \mathcal{L}_\mathsf{RE}}$†	-

Anm. -: *falsch* ✓: $L \notin \mathcal{L}_\mathsf{RE} \implies L \notin \mathcal{L}_\mathsf{R}$ TM/(N)TM: *direkte Konstruktion* $(*)$: $L, L^C \in \mathcal{L}_{RE} \implies L \in \mathcal{L}_R$ †: *nicht behandelt*

Semantisch nichttrivale Entscheidungsprobleme

Definition 5.7. Eine Sprache $L \subseteq$ KodTM heisst *semantisch nichttriviales Entscheidungsproblem über Turingmaschinen*, falls gilt:

1. $L \neq \varnothing$,
2. $L \neq$ KodTM, und
3. für alle TM A und B impliziert $L(A) = L(B)$, dass

$$\text{Kod}(A) \in L \iff \text{Kod}(B) \in L.$$

Spezifisches Halteproblem

Definition. Sei $L_{\mathsf{H},\lambda}$ die Sprache

$$L_{\mathsf{H},\lambda} = \{\mathsf{Kod}(M) \mid M \text{ hält auf } \lambda\}.$$

Lemma 5.8. Es gilt $L_{\mathsf{H},\lambda} \notin \mathcal{L}_{\mathsf{R}}$.

Beweis?

Der Satz von Rice

Satz 5.9 (Satz von Rice). Jedes semantisch nichttriviale Entscheidungsproblem über Turingmaschinen ist unentscheidbar.

Midterm survival guide

- Schlaft genug
- Stresst euch nicht zu viel
- Nimmt eine dumme Uhr mit
- Liest Angaben genau
- Schaut alle Aufgaben an, löst die einfachen zuerst

Midterm survival guide

Überprüfe

- EAs:
  - Startzustand markiert?
  - Akzeptierenden Zustände markiert? (insbesondere Startzustand!)
- DEAs:
  - Jeder Zustand hat genau eine ausgehende Kante pro Buchstabe.
  - Insbesondere hat jeder Zustand $|\Sigma|$ ausgehende Kanten.
- PL: $|w| \geq n_0$ erwähnt?
- Reduktion:
  - Wörter mit falschem Format behandelt?

Midterm survival guide

Ansätze

- Grenzfälle betrachten
  - Insbesondere bei Aussagen über $L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2, L_1 \setminus L_2, L_1 L_2, \ldots$:
    Falls möglich setze $L_1 = L_2$, $L_1 = L_2^C$, $L_2 = \varnothing$, usw.
    Wohlbekannte Beispiele einsetzen.
- Bei Minimalitätsbeweis: Falls man keine Wörter für Beweis finden kann
  Automat skizzieren, für jeden Zustand ein Wort suchen, der darin landet.
- Bei PL: Man darf Wörter rein- und rauspumpen.
- Denkt an λ.

Midterm survival guide

Beispiele

Sei Σ ein Alphabet (endlich, nichtleer).

- Abzählbar: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, Σ, Σ^*, KodTM, Menge aller endlichen Sprachen ü. Σ
- Überabzählbar: $[0, 1]$, $\mathbb{R}$, Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to M$, Menge aller unendlichen Wörter über Σ, Menge aller Sprachen über Σ.

Seien L_1, L_2 regulär, L_3 nicht regulär, L_4 endlich.

- Regulär: L_1^C, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, $L_1 \setminus L_2$, L_4, $\{w \mid |w|_a \equiv_m n\}$, $\{w \mid u \text{ ist Präfix/Infix/Suffix von } w\}$
- Nicht regulär: L_3^C, $\{a^{n^2}\}$, $\{a^{2^n}\}$, $\{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, $\{w \mid |w|_a \geq |w|_b\}$, verschachtelte Klammern

Aufgaben

1. **Aufgabe 1.** Verwende den Satz von Rice, um $L_{\lambda+1} \notin \mathcal{L}_{\mathsf{R}}$ zu beweisen.

   $$L_{\lambda+1} = \{\mathsf{Kod}(M) \mid \text{TM } M \text{ akzeptiert } \lambda \text{ und mindestens ein anderes Wort}\}$$

2. **Aufgabe 2.** Beweise $(L_{\mathsf{EQ}})^C \notin \mathcal{L}_{\mathsf{RE}}$.
   Hint: Beweise $(L_H)^C \notin \mathcal{L}_{RE}$ *und* $(L_H)^C \leq_{EE} (L_{EQ})^C$.
3. **Aufgabe 3.** Eine TM M heisst *hastig*, falls ein Wort w existiert, so dass M auf w nach höchstens $|w|/2$ Schritten hält. Sei L_{hasty} die Sprache

   $$L_{\mathsf{hasty}} = \{\mathsf{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine hastige TM}\}.$$

   Beweise, dass $(L_{\mathsf{hasty}})^C \notin \mathcal{L}_{\mathsf{RE}}$.
4. Oder was auch immer ihr noch besprechen möchtet!