

Domácí úkol na 9.3.2022

Tlumené a buzené kyvadlo

Naprogramujte a odladte řešení pohybové rovnice pro pohyb tlumeného a buzeného kyvadla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \eta \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin \theta = A \sin \omega_0 t, \quad (1)$$

kde θ udává výchylku kyvadla od svislé osy, druhý člen popisuje tlumení v závěsu s koeficientem tlumení $\eta > 0$, třetí člen odpovídá gravitační síle (a způsobuje nelinearitu rovnice) a pravá strana modeluje harmonické buzení s úhlovou frekvencí ω_0 .

Pro numerické řešení převedte rovnici (1) na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu a k jejímu řešení použijte Eulerovu metodu 2. řádu a Runge-Kuttovu metodu 4. řádu:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_i + \mathbf{k}_1 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_i + \mathbf{k}_2 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3 \Delta t, t_i + \Delta t), \\ \phi_i &= \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \end{aligned}$$

kde \mathbf{y} je vektor hledaných funkcí, \mathbf{f} je vektor pravé strany soustavy řešených diferenciálních rovnic prvního řádu a Δt je časový krok. Integrační krok se dělá stejně jako u ostatních procvičovaných jednokrokových algoritmů,

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \phi_i \Delta t.$$

Uvažujte následující hodnoty parametrů

$$\eta = 0.5, \quad \omega = 1, \quad A = 1.$$

Pro frekvenci buzení volte tři různé hodnoty $\omega_0 = 0,2; 0,4; 0,8$ a řešte na časovém intervalu $t = \langle 0; 500 \rangle$ s počátečními podmínkami $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 1$. Otestujte stabilitu řešení volbou dvou různých časových kroků $\Delta t = 0,01$ a $\Delta t = 0,005$.

Vypracovaný úkol odešlete na e-mailovou adresu pcfyzika@pavelstransky.cz. Před odesláním se přesvědčte, že program neobsahuje žádné syntaktické chyby a že je z kódu pochopitelné, jak ho spustit, aby vrátil hledaný výsledek.