Domácí úkol na 17.3.2022

Runge-Kuttův algoritmus pro Lorenzův systém

Naprogramujte a odlaďte řešení nelineární soustavy tří diferenciálních rovnic pro jednoduchý Lorenzův model vedení tepla v atmosféře

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

s hodnotami parametrů $\sigma = 10$, $\rho = 28$ a $\beta = 8/3$, počátečními podmínkami $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (na počátečních podmínkách zase tolik nezáleží), s krokem $\Delta t = 0.01$ a na časovém intervalu $t \in \langle 0, 100\rangle$. Vykreslete graf $z(x)$, případně (nepovinně) vykreslete 3D graf funkce $z(x, y)$.

K řešení diferenciálních rovnic použijte Runge-Kuttovu metodu 4. řádu:

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}_i, t_i),$$
$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{k}_1\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right),$$
$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{k}_2\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right),$$
$$\boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{k}_3\Delta t, t + \Delta t\right),$$
$$\boldsymbol{\phi}_i = \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4\right),$$

kde $\boldsymbol{w} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{f}$ je pravá strana soustavy rovnic Lorenzova systému a integrační krok se dělá stejně jako u ostatních procvičovaných jednokrokových algoritmů,

$$\boldsymbol{w}_{i+1} = \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{\phi}_i\Delta t.$$

Výsledná křivka je slavný Lorenzův podivný atraktor ve tvaru motýlích křídel, krerý zpopularizoval teorii klasického chaosu.