Sciences de l'ingénieur

Résumés de cours, preuves et méthodes

MPSI — Collège Stanislas

Elias Kirkwood

Année 2025 - 2026

Table des matières

Partie I : Automatique

Partie II : Mécanique

PARTIE I

Automatique

Modélisation des SLCI

CHAPITRE 1.

Définition : SLCI

On appelle **SLCI** un système :
- *linéaire* : les équations qui le régissent sont linéaires (mais pas nécessairement homogènes),
- *continu* : les grandeurs qui le caractérisent sont continues,
- *invariant* : les équations qui le régissent ne dépendent pas du temps,
- *à entrée unique* : il n'y a qu'une seule grandeur d'entrée,
- *à sortie unique* : il n'y a qu'une seule grandeur de sortie.

On déduit de la linéarité les principes de superposition et de proportionnalité.

⚠ Ne pas confondre la caractéristique d'un système $s = f(e)$ avec la courbe de réponse en fonction du temps $s(t)$.

1.1 Équations différentielles d'ordre 1

Théorème SLCI d'ordre 1

Un SLCI d'ordre 1 est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t)$$

Où :
- τ est la constante de temps, de dimension $[T]$
- K est le gain statique, de dimension $\frac{[S]}{[E]}$

Propriété : Réponse temporelle à un échelon

On suppose l'entrée de la forme $e(t) = e_0 u(t)$, où $u(t)$ est la fonction de Heaviside. Alors :

$$s(t) = Ke_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

Valeurs remarquables de la réponse à un échelon :

t	τ	3τ	5τ
% de s_∞	63%	95%	99%

La pente de la tangente à l'origin est non-nulle et vaut $\frac{Ke_0}{\tau}$.

1.2 Équations différentielles d'ordre 2

Théorème SLCI d'ordre 2

Un SLCI d'ordre 2 est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t)$$

Où :

- ω_0 est la pulsation propre (*non amortie*), de dimension $[T^{-1}]$
- ξ est le coefficient d'amortissement, sans dimension
- K est le gain statique, de dimension $\frac{[S]}{[E]}$

Il faut distinguer trois cas selon la valeur de ξ :

1.2.1 Régime apériodique ($\xi > 1$)

La solution est de la forme, en prenant des conditions initiales nulles :

$$s(t) = Ke_0\left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]u(t)$$

Où T_1 et T_2 sont les constantes de temps du système, données par :

$$T_{1,2} = \frac{1}{\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Propriété

- La sortie tend vers sa valeur finale $s_\infty = Ke_0$ de manière monotone.
- La pente de la tangente à l'origine est nulle.
- Plus ξ est proche de 1, plus la réponse est rapide.
- Si $|T_2| \gg |T_1|$, la réponse peut être approchée par une réponse du premier ordre de constante de temps T_2 *(avec un retard égal à T_1)*.

1.2.2 Régime critique ($\xi = 1$)

Dans l'hypothèse des conditions initiales nulles, la solution est de la forme :

$$s(t) = Ke_0[1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}]u(t)$$

Il s'agit d'un cas particulier du régime apériodique, ainsi les propriétés sont identiques.

1.2.3 Régime pseudo-périodique ($\xi < 1$)

Si les conditions initiales sont nulles, la réponse est de la forme :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_p + \varphi\right) \right] u(t)$$

Où :

- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$ est la *pseudo-pulsation* de dimension $[T^{-1}]$,
- $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ le *déphasage* sans dimension

On note aussi $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ la *pseudo-période* de dimension $[T]$.

La réponse est visiblement oscillante, et présente donc des dépassements. Le temps du k-ième dépassement est donné par :

$$t_k = \frac{k}{2} T_p = \frac{k\pi}{\omega_p} = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Et le k-ième dépassement relatif vaut : $D_k^{\%} = \left| \frac{s(t_k) - s_\infty}{s_\infty} \right| = e^{-\xi t_k}$.

Pour l'identification de ξ, on a alors : $\xi = \left(1 + \frac{k^2\pi^2}{\ln^2\left(D_k^{\%}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Propriété

- Plus ξ est petit, plus les dépassements sont importants.
- La réponse tend vers sa valeur finale $s_\infty = Ke_0$ de manière oscillante.
- La pente de la tangente à l'origine est nulle.
- Plus ξ est proche de 0.69, plus la réponse est rapide. Le premier dépassement est alors d'environ 5%.

Transformée de Laplace

CHAPITRE 2.

Définition

Soit f une fonction du temps t, définie sur $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, on note $F(p)$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de la fonction $f(t)$, définie par :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Où p est une variable complexe.

Transformées de Laplace usuelles

$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$ (Dirac)	1
$Au(t)$	$\dfrac{A}{p}$
$at \cdot u(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$

$x(t)$	$X(p)$
$te^{-at} \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Formulaire 1. – Transformées de Laplace usuelles

2.1 Propriétés générales

Propriété

1. Bi-univocité :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}\} = F(p)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$$

2. Linéarité :

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\mathcal{L}\{g(t)\}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(p) + \mu G(p)\} = \lambda\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} + \mu\mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$$

Preuve.

1. **Bi-univocité**

C'est évident à partir de la définition de la transformée avec l'intégrale.

2. **Linéarité**

C'est évident avec la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} &= \int_{t=0}^{\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t + \mu \int_{t=0}^{\infty} g(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ \mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} &= \lambda\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

De même pour la linéarité de la transformée inverse. $\square$

Propriété : Transformée d'une dérivée

Soit f une fonction du temps et $n \in \mathbb{N}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = pF(p) - f(0^-)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} = p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0^-)$$

Preuve.
On prouve par intégration par parties.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \left[f(t)e^{-pt}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} pf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = pF(p) - f(0^-)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} &= \left[f(t)e^{-pt}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} pf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-)\end{aligned}$$

Avec une récurrence, on montre à l'ordre n. □

Propriété : Transformée d'une intégrale

Soit f une fonction du temps et $n \in \mathbb{N}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \dots \mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p^n}$$

Preuve.
Au premier ordre, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{t} f(\tau)e^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot \frac{e^{-pt}}{-p}\,\mathrm{d}\tau\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{f(t)}{p}e^{-pt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

□

2.2 Théorèmes

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$$

Preuve.
D'après l'expression de la transformée d'une dérivée, on a :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = pF(p) - f(0^-)$$

En faisant tendre p vers l'infini, on trouve :

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0^-) + \underbrace{\lim_{p \to \infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-pt} \,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[p \to \infty]{} 0} = f(0^-)$$

□

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

Preuve.
D'après l'expression de la transformée d'une dérivée d'ordre 1, on a :

$$\lim_{p \to 0} \int_{0^-}^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-pt} \,\mathrm{d}t = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0^-)$$

Or $\lim_{p \to 0} \int_{0^-}^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-pt} \,\mathrm{d}t = [f(t)]_{0^-}^\infty = \lim_{t \to \infty} f(t) - f(0^-)$ D'où

$$\lim_{t \to \infty} f(t) - f(0^-) = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0^-)$$

D'où le résultat.

□

Théorème du retard

Soit f une fonction du temps et $\tau > 0$. On suppose f nulle dans les temps négatifs. Alors :

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Preuve.
Par changement de variable $\sigma = t - \tau$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= \int_{-\sigma}^{\infty} f(\sigma)e^{-p(\sigma+\tau)}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{\infty} f(\sigma)e^{-p\sigma}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= e^{-p\tau}\int_{0^-}^{\infty} f(\sigma)e^{-p\sigma}\,\mathrm{d}\sigma \\
\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

□

Fonctions de transfert

CHAPITRE 3.

Pour des SLCI plus complexes, il faut utiliser utiliser la transformée de Laplace pour trouver la solution de l'équation différentielle.

3.1 Définition

Définition : Fonction de transfert

Soit un SLCI linéaire dont l'entrée est $e(t)$ et la sortie $s(t)$. On suppose que les conditions initiales sont nulles (hypothèse de Heaviside).
La fonction de transfert du système est définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Où $S(p)$ et $E(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la sortie $s(t)$ et de l'entrée $e(t)$.

Toute fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_n p^n}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_m p^d}$$

On appelle :

- K le **gain statique** du système, de dimension $\frac{[S]}{[E]}$
- α la **classe** du système, un entier naturel
- $d + \alpha$ l'**ordre** du système, un entier naturel

D'après les propriétés de la transformée de Laplace, la classe α est le nombre d'intégrateurs dans le système.

3.2 Formes canonique

Propriété : Fonctions de transfert

On obtient pour les 3 premiers ordres les formes canoniques suivantes :

$$H_0(p) = K \qquad H_1(p) = \frac{K}{1+\tau p} \qquad H_2(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Preuve.
C'est évident à partir des équations différentielles associées à ces fonctions de transfert.

□

3.3 Systèmes bouclés

Propriété

L'association en série de plusieurs fonctions de transfert correspond au produit de ces fonctions de transfert.
L'association en parallèle correspond à la somme de ces fonctions de transfert.

Théorème : Formule de Black

$$FTBF = \frac{FTCD}{1+FTBO} = \frac{FTCD}{1+FTCDFTCR}$$

Analyse temporelle

CHAPITRE 4.

4.1 Stabilité

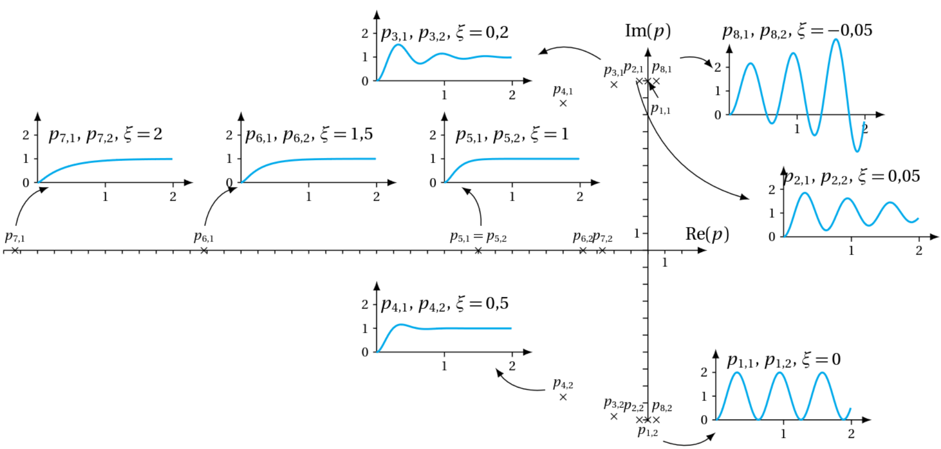
Propriété

Un système est stable (au sens EB-SB, « *entrée bornée-sortie bornée* ») si sa fonction de transfert ne possède pas de pôle à partie réelle positive ou nulle, donc en particulier une classe nulle.

Théorème : Critère de Routh-Hurwitz

- Ordre 1 : stable si $\tau > 0$
- Ordre 2 : stable si tous les coefficients du dénominateur sont non-nuls et de même signe
- Ordre 3 : stable si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe et que $a_0 a_3 < a_1 a_2$ (cri)

Position des pôles dans le plan complexe et stabilité d'un système du deuxième ordre



En général, les couples de pôles conjugués se trouvent dans un *gabarit* de stabilité, donné par un trapèze défini pas :

- une borne droite à $-\frac{3}{T_{\max}}$: pour garantir une convergence rapide
- $|\Re(p_i)| > |\Im(p_i)|$: pour éviter trop d'oscillations

4.2 Précision

Soit système asservi à retour unitaire. On note $H_{\text{bo}}(p) = FTBO$, K_{bo} son gain statique et α la classe. On a :

Type	**Impulsion**	**Position**	**Vitesse**	**Accélération**
Transformée	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p^3}$
$\alpha = 0$	0	$\frac{1}{1+K_{\text{bo}}}$	∞	∞
$\alpha = 1$	0	0	$\frac{1}{K_{\text{bo}}}$	∞
$\alpha = 2$	0	0	0	$\frac{1}{K_{\text{bo}}}$

Preuve.
On considère une entrée de la forme $E(p) = \frac{1}{p^\beta}$. On a

$$\mu(p) = E(p) - S(p) = \frac{E(p)}{1 + H_{\text{bo}(p)}}$$

D'où avec $H_{\text{bo}(p)} = \frac{K_{\text{bo}}}{p^\alpha} \frac{1+a_1p+...+a_dp^d}{1+b_1p+...+b_np^n}$, on en déduit une expression de $\mu_s = \lim_{p\to 0} p\mu(p)$.

Une disjonction de cas sur β puis α permet d'obtenir les résultats du tableau.

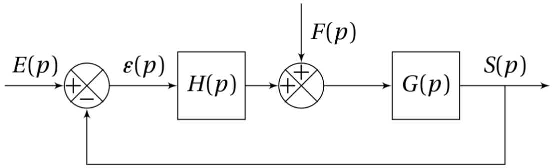
□

⚠ Le théorème de la valeur finale n'est utilisable que pour les systèmes stables.

4.3 Sensibilité aux perturbations

Propriété

Un système à retour unitaire est *insensible à une perturbation* en échelon s'il existe au moins une intégration dans la chaîne directe, en amont de la perturbation.



Preuve.
Le système est linéaire, il y a donc superposition des réponses à l'entrée et à la perturbation.

$$S(p) = \underbrace{\frac{H(p)G(p)}{1 + H(p)G(p)}E(p)}_{\text{Réponse à l'entrée}} + \underbrace{\frac{G(p)}{1 + H(p)G(p)}F(p)}_{\text{Réponse à la perturbation}}$$

On considère H de gain H_0 et de classe α et G de gain G_0 et de classe β.
On réalise une étude en *régulation*, donc $E(p) = 0$ et $F(p) = \frac{F_0}{p}$. Donc :

$$s_\infty = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} \frac{F_0 G(p)}{1 + H(p)G(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{G_0 F_0 p^\alpha}{p^{\alpha+\beta} + H_0 G_0}$$

D'où :

- Si $\alpha = \beta = 0$: $s_\infty = \frac{G_0 F_0}{1+H_0 G_0}$
- Si $\alpha = 0$ et $\beta \geq 1$: $s_\infty = \frac{G_0 F_0}{H_0 G_0}$
- Si $\alpha \geq 1$: $s_\infty = 0$

□

Analyse fréquentielle

CHAPITRE 5.

Théorème : Transformée de Fourier

Tout signal périodique de pulsation ω_0 peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

La réponse $S(p)$ en régime établi d'un SLCI de fonction de transfert H à une entrée $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ est donnée par : $s(t) = |H(j\omega)|\, e_0 \sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$.

5.1 Gain, phase et diagrammes de Bode

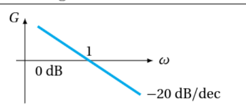
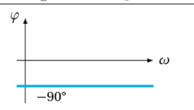
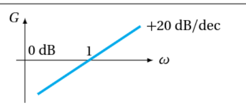
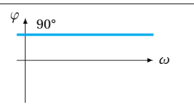
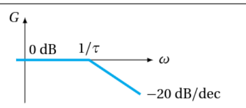
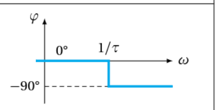
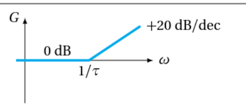
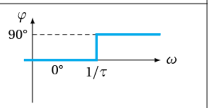
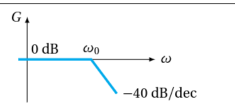
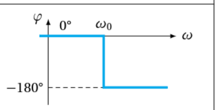
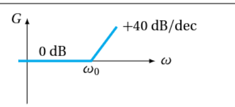
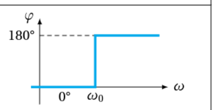
Fonction	Diagramme de module	Diagramme de phase
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$		
$H(p) = 1+\tau p$		
$H(p) = \frac{1}{1+2\frac{\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$		
$H(p) = 1+2\frac{\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}$		

Tableau 1. – Diagrammes de Bode asymptotiques

Pour un SLCI d'ordre 2, si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors le gain admet un maximum à la pulsation dite de **résonance** $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

Le gain à la résonance vaut alors $G(w_r) = 20\log(KQ_S)$ où Q_S est le **facteur de surtension** : $Q_S = \left|\frac{H(j\omega_r)}{K}\right| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \approx Q$ le facteur de qualité, pour ξ petit.

Quant à la phase, plus ξ est petit, plus elle est proche de ses asymptotes.

5.2 Stabilité et critères de Nyquist et du revers

Si la $FTBO(j\omega)$ se rapproche trop de -1 dans le plan complexe, le module de la $FTBF$, et la réponse n'est plus forcément bornée.

Théorème : Critère de Nyquist

On note :
- P le nombre de pôles de $FTBO$ dans le demi-plan droit ($\Re(p) > 0$)
- N le nombre de tours du lieu autour du point -1 dans le sens trigonométrique
- Z le nombre de pôles de $FTBF$ dans le demi-plan droit

Alors, $Z = P + N$.

Ainsi un système est stable si et seulement si $Z = 0$, c'est à dire $N = -P$; en particulier, si $FTBO$ est stable, il faut que son lieu ne fasse aucun tour autour de -1.

Théorème : Critère du revers

Si la $FTBO$ est stable, alors la $FTBF$ est stable si et seulement si le point critique -1 n'est pas contenu par le lieu.

Sur les diagrammes :
- de Black : le point critique est $(-180°, 0)$
- de Bode : les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :
  - $G(\omega) < 0$ dB pour $\varphi(\omega) = -180°$
  - $\varphi(\omega) > -180°$ pour $G(\omega) = 0$ dB

On appelle :
- **marge de phase** la grandeur $M_\varphi = 180 + \arg(FTBO(j\omega_u))$ où ω_u est la *pulsation gain unitaire* pour laquelle $|FTBO(j\omega_u)| = 1$ (*i.e.* $G(\omega_u) = 0$);
- **marge de gain** la grandeur $M_G = 0 - 20\log_{10}\left(\left|FTBO\left(j\omega_g\right)\right|\right)$ où ω_g est la *pulsation d'opposition de phase* pour laquelle $\arg\left(FTBO\left(j\omega_g\right)\right) = -180°$

La marge de gain n'est pas définie au premier et deuxième ordres car la phase n'atteint jamais $-180°$. La marge de gain n'est définie que si $K_{bo} \geq 1$.

Systèmes à évènements discrets

CHAPITRE 6.

Système	Temps continu	Temps discret	Séquentiel
Entrée	$t \in \mathbb{R}_+$	$t_k \in T_e\mathbb{N}$	$k \in \mathbb{N}$
Sortie $s \in \mathbb{R}$	Analogique	Echantillonée	$\times$
Sortie $n \in \mathbb{N}$	Quantifiée	Numérique	$\times$
Sortie $a \in \{0,1\}$	$\times$	$\times$	Séquentielle

On appelle **système (logique) combinatoire** un système tel qu'à toute combinaison d'entrées correspond une unique combinaison de sorties.

6.1 Algèbre de Boole

On considère l'ensemble $B = \{0,1\}$ muni des lois :

$$\text{OR} = + : \begin{cases} B \times B \to B \\ (a,b) \quad \mapsto (a = 1 \vee b = 1) \end{cases} \qquad \text{AND} = \times : \begin{cases} B \times B \to B \\ (a,b) \quad \mapsto (a = 1 \wedge b = 1) \end{cases}$$

On y ajoute la loi unaire NOT $= \neg$ qui est l'unique telle que $\forall a \in B, \begin{cases} a \text{ OR } \neg a = 1 \\ a \text{ AND } \neg a = 0 \end{cases}$

Cette définition ensemble-centrée rapproche OR et $\cup$, AND et $\cap$ et NOT du complémentaire dans un ensemble E, car $\mathcal{P}(E)$ est isomorphe à B^E (*i.e.* les indicatrices de parties de E).

Cependant, avec ces lois, $(B, \text{OR}, \text{AND})$ n'est pas un anneau car ainsi défini, OR n'admet pas d'inverse.

On introduit alors un « ou exclusif » (qui correspond à la différence symétrique Δ pour les ensembles) :

$$\text{XOR} = + : \begin{cases} B \times B \to B \\ (a,b) \quad \mapsto (a \text{ OR } b) \wedge \neg(a \text{ AND } b) \end{cases}$$

Dans ce cas $(B, \text{XOR}, \text{AND})$ est un anneau, qui s'identifie à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni de ses lois canoniques $+_2$ et $\times$. Dans ce cas on a simplement NOT : $a \mapsto 1 + a$.

6.2 Machines et diagrammes d'état

Une **action** est un traitement élémentaire (insécable), alors qu'une **activité** peut être interrompu à chaque instant (ou plutôt entre les actions le constituant).

Comportements associés à un état : *entry/action*, *do/activité* et *exit/action*.
Indication associées à une transition : *évènement [condition de garde]/effet*.

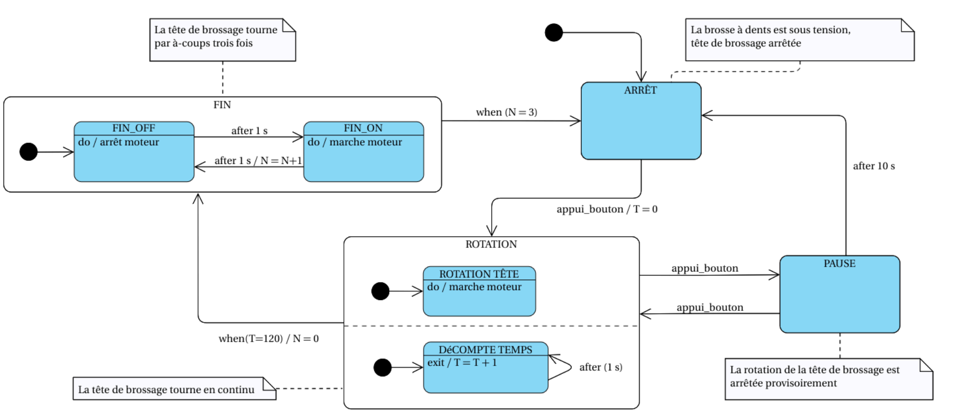
Il y a plusieurs types d'évènements :
- **de signal** : un front d'une variable binaire (stimulation externe)
- **de temps** : écoulement du temps, notée *after* T (relatif) ou *at* T (absolu)
- **de changement** : d'une expression booléenne, noté *when(expr)*

Pour les **points de jonction** (ronds), toutes les conditions de garde sont évaluées en même temps, au départ de l'état, alors que pour les **points de décisions** (losanges), elles sont évaluées au moment à l'arrivée au point.

Toutes conditions de garde simultanées (menant à des états différents) doivent être mutuellement exclusives.

Dans un **état orthogonal**, plusieurs états peuvent être actif en même temps, car il y a 2 flux (*linéairement*) indépendants.

Il y a 2 états historiques :
- *shallow* ou simple : la réactivation d'un état composite interrompu reprend un un niveau de profondeur 1
- *deep* : réactivation récursive.



PARTIE II

Mécanique

Cinématique des liaisons

CHAPITRE 1.

Actions mécaniques

CHAPITRE 2.