MVE630 demouppgifter

2021-11-24

Vecka 44

5.1 19

Hitta ett uttryck på sluten form för

$$\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3). \tag{1}$$

Lösning: Vi vill använda följande sats:

Sats 1 (5.1 (d) i Adams)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{2}$$

om $r \neq 1$.

Vi får då att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\pi^k - 3) &= -3n + \pi \sum_{k=1}^{n} \pi^{k-1} \\ &= -3n + \pi \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}.\end{aligned}$$

5.4 21

Vi vet att

$$\int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}. \tag{3}$$

Beräkna

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1 - x^2}) \, \mathrm{d}x \,. \tag{4}$$

Lösning: Den första termen i (4) ser vi från (3) är $\frac{1}{3}$. Den andra termen kan vi identifiera med arean av en kvarts och den blir $\frac{\pi}{4}$.

5.4 36

Beräkna

$$\int_0^3 |2 - x| \, \mathrm{d}x \,.$$

Lösning:

$$\int_0^3 |2-x| \, \mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x) \, \mathrm{d}x + \int_2^3 -(2-x) \, \mathrm{d}x$$
$$= 2 + \frac{1}{2}.$$

5.5 16

Beräkna

$$\int_{-1}^{1} 2^x \, \mathrm{d}x \, .$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 2^x \, \mathrm{d}x &= [\log 2 \cdot 2^x]_{-1}^{1} \\ &= \log 2(2 - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{2} \log 2. \end{aligned}$$

5.5 25

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$\begin{aligned} &y = x^2 - 3x + 3, \\ &y = 1. \end{aligned}$$

Lösning: Eftersom kurvorna möts i $x = 1$ och $x = 2$ är arean (beloppet av)

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 3 - 1) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{6}.$$

5.5 44

Beräkna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\sin\theta}^{0} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x - \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -\frac{1}{1-\cos^2\theta} \sin\theta \\ &= -\sin\theta. \end{aligned}$$

och

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sin\theta}\left(\int_0^{\sin\theta} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cos\theta \\
&= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Vecka 45

5.6 6

Evaluera

$$
\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{x} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.
$$

Vi har därför att

$$
\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\cos\sqrt{x} + C.
$$

5.6 9

Evaluera

$$
\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Lösning: I Adams står det att

$$
\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.
$$

Vi börjar med att göra variabelsubstitutionen $u = \sin x$. Eftersom $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ har vi att

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin x}{2} + C.
\end{aligned}
$$

5.7 10

Hitta arean som begränsas av kurvorna

$$
\begin{aligned}
x &= y^2, \\
x &= 2y^2 - y - 2.
\end{aligned}
$$

Lösning: Kurvorna möts i $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är den inneslutna arean

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} y^2 - (2y^2 - y - 2)\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{2} -y^2 + y + 2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

6.1 2

Beräkna

$$\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning:

Sats 2 (partialintegrering)**.** *Om u och v är två deriverbara funktioner av x så gäller*

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x\,.$$

Låt $u = x+3$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x}$ ($v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$). Då har vi att

$$\begin{aligned}\int (x+3)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= (x+3)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left((x+3)\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + C.\end{aligned}$$

6.1 7

Beräkna

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi vill använda att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Så låt $u = \arctan x$ och $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$ ($v = x$). Partiell integrering ger då att

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C.\end{aligned}$$

6.1 21

Beräkna

$$\int \frac{\log\log x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Låt $u = \log x$. Då är $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ och

$$\begin{aligned} \int \frac{\log\log x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \log u\,\mathrm{d}u \\ &= u\log u - \int 1\,\mathrm{d}u \\ &= u\log u - u + C. \end{aligned}$$

6.2 7

Beräkna

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi använder oss av partialintegrering:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{(a-x)(a+x)} \\ &= \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} \end{aligned}$$

för några konstanter A och B. Vi kan bestämma dom genom att vi vet att

$$A(a+x) + B(a-x) = 1,$$

så $A = B = \frac{1}{2a}$. Nu är det lätt att integrera:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -A\log(a-x) + B\log(a+x) + C \\ &= \frac{1}{2a}\left(\log(a+x) - \log(a-x)\right) + C. \end{aligned}$$

6.2 22

Beräkna

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning: Vi har att

$$\frac{x^2+1}{x^3+8} = \frac{x^2}{x^3+8} + \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Eftersom $x^3 + 8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ kan vi dela upp

$$\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{2}{12(x^2-2x+4)} - \frac{x-2}{12(x^2-2x+4)} + \frac{1}{12(x+2)}.$$

Vi vet hur man integrerar varje term:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x &\overset{u=x^3}{=} \int \frac{1}{3(u+8)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\log|u+8| + C \\
&= \frac{1}{3}\log\left|x^3+8\right| + C, \\
\int \frac{x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &\overset{u=x^2-2x}{=} \int \frac{1}{2(u+4)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\log|u+4| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+4\right| + C, \\
\int \frac{2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &\overset{u+1=x}{=} \int \frac{2}{u^2+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C, \\
\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x &= \log|x+2| + C.
\end{aligned}
$$

Vi kombinerar dessa fyra identiteter för att erhålla

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{x^3+8} + \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\log\left|x^3+8\right| + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+4\right| + \log|x+2|\right) + C.
\end{aligned}
$$

6.5 8

Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Integranden kommer bete sig som $1/x$ runt $x = 0$, så vi gissar att integralen kommer divergera eftersom

$$
\begin{aligned}
\int_0^p \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^p \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}[\log x]_\epsilon^p \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\log p - \log\epsilon \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

för alla $p > 0$. Så vi vill visa att integralen divergerar.

Integranden är alltid positiv, så

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1/2}}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

vilket vi har visat divergerar mot oändligheten.

6.5 19

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

eller bevisa att den divergerar.

Lösning: Detta är en udda funktion integrerad över ett symmetriskt intervall, så integralen är 0 om den existerar. Dock är

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty} [\frac{1}{2}\log(1+x^2)]_0^M\\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\log(1+M^2)\\ &= \infty\end{aligned}$$

så integralen existerar inte.

6.5 34

Divergerar eller konvergerar

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2}?$$

Lösning: Konvergerar pga

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2}\\ &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

6.5 35

Divergerar eller konvergerar

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x?$$

Lösning: Divergerar pga

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x &\geq \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \infty.\end{aligned}$$

6.5 42a

Givet att

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

beräkna

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösning Vi kör lite partialintegrering med $u = x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x\mathrm{e}^{-x^2}$ $(v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2})$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= [-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2}]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Vecka 46

7.1 11

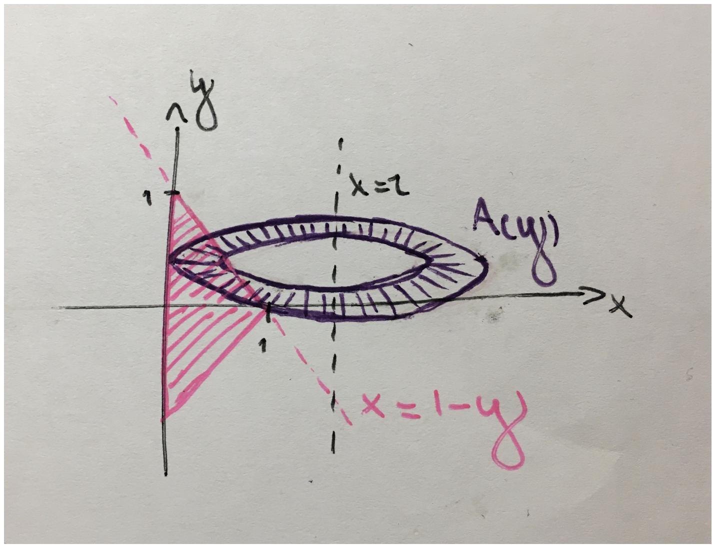
Hitta volymen av figuren som uppstår av att man roterar triangeln $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ kring $x = 2$.

Lösning: Definera arean $A(y)$ enligt figur 1. Då är

$$\begin{aligned}V &= 2\int_0^1 A(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 \left(\pi 2^2 - \pi(x-2)^2\right)\mathrm{d}y \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(4 - (-1-y)^2\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{10\pi}{3}.\end{aligned}$$

7.2 3

Hitta volymen av en figur som har höjd 1 och vars tvärsnitt vid höjden z är en ellips som har en radie z och en radie $\sqrt{1-z^2}$.



Figur 1:

Lösning: Vi gör ungefär som i förra uppgiften. En ellips med radierna a och b har arean $ab\pi$, så

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \pi z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= -\frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z \\ &= -\frac{\pi}{3}\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

7.2 7

Hitta volymen av en figur som har höjd h och vars tvärsnitt vid höjden z är en cirkelsektor med radien a och vinkel $2\pi(1-z/h)$.

Lösning: Med $A(z) = \pi a^2(1-z/h)$ har vi att

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^h \pi a^2(1-\frac{z}{h})\,\mathrm{d}z \\ &= \pi a^2\left[z-\frac{z^2}{2h}\right]_0^h \\ &= \pi a^2\frac{h}{2}. \end{aligned}$$

7.9 4

Lös den separabla differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2y^2.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y^2} &= x^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{y}\right) &= x^2 \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{3}x^3 + C \\
y &= -\frac{1}{x^3 + C'}.
\end{aligned}$$

7.9 12

Lös

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x^2} \\
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y &= \frac{1}{x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) &= \frac{1}{x} \\
xy &= \log x + C \\
y &= \frac{\log x + C}{x}.
\end{aligned}$$

7.9 19

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}
x^2y' + y &= x^2\mathrm{e}^{1/x}, \\
y(1) &= 3\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-1/x}y' + \mathrm{e}^{-1/x}\frac{1}{x^2}y &= 1 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-1/x}y) &= 1 \\
\mathrm{e}^{-1/x}y &= x + C \\
y &= \mathrm{e}^{1/x}(x + C).
\end{aligned}$$

$y(1) = 3\mathrm{e}$ medför att $C = 2$.

Review 7 12

Hitta en familj av kurvor som skär alla ellipser på formen

$$3x^2 + 4y^2 = C$$

vinkelrätt.

Lösning: I det övre halvplanet kan vi beskriva dessa ellipser som funktioner. Det gäller då att dessa funktioner uppfyller

$$\begin{aligned} 6x + 8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3x}{4y}. \end{aligned}$$

Men en kurva som är vinkelrät mot denna måste uppfylla (se exempel 6 i avsnitt 7.9 i Adams)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4y}{3x}.$$

Vi kan lösa denna diffekvation genom variabelseparation, men det går också att se direkt att $y = Cx^{4/3}$ är en familj lösningar.

Vecka 47

3.7 6

Hitta alla lösningar till

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Lösning: Vi har fall II (s. 207 i Adams), så den generella lösningen är på formen

$$y = A\mathrm{e}^{rt} + Bt\mathrm{e}^{rt}$$

där r är den dubbla roten till polynomet

$$x^2 - 2x + x = 0.$$

Vi har att $r = 1$.

3.7 15

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' + 4y + 5y &= 0, \quad (5) \\ y(0) &= 2, \quad (6) \\ y'(0) &= 2. \quad (7) \end{aligned}$$

Lösning: Vi har nu fall III ($b^2 - 4ac < 0$). Därför är den mest generella komplexa lösningen till (5)

$$y = A\mathrm{e}^{kt+i\omega t} + B\mathrm{e}^{kt-i\omega t}$$

där $k = -b/(2a) = -4/2 = -2$ och $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a) = \sqrt{4 \cdot 5 - 4^2}/2 = 1$. Begynnelsevillkoren (6) och (7) $\implies$

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ A(-2+i) + B(-2-i) &= 2. \end{aligned}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} B &= 2 - A, \\ A(-2+i) + (2-A)(-2-i) &= \\ 2iA - 4 - 2i &= 2 \\ &\implies \\ A &= 1 - 3i. \end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$\begin{aligned} y &= (1-3i)\mathrm{e}^{-2t+it} + (1+3i)\mathrm{e}^{-2t-it} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{-2t+it}\right\} + 2\,\mathrm{Im}\left\{3\mathrm{e}^{-2t+it}\right\} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2t}\cos t + 6\mathrm{e}^{-2t}\sin t \end{aligned}$$

Eftersom all koefficienter i diffekvationen och alla begynnelsevillkoren var rella är det betryggande att se att även lösningen är rell.

3.7 17

Visa att om a, b, $c > 0$ i diffekvationen

$$ay'' + by' + c = 0$$

så gäller $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ för alla lösningar.

Lösning: Vi har då att alla rötter till den karaktäristiska ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0$$

är negativa. I fall I beskrivs den mest generella lösningen av

$$y = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I fall II beskrivs den mest generella lösningen av

$$y = A\mathrm{e}^{rt} + B\mathrm{e}^{rt} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I fall III beskrivs den mest generella lösningen av

$$y = A\mathrm{e}^{kt}\cos\omega t + B\mathrm{e}^{kt}\sin\omega t,$$

som också går mot noll när $t \to \infty$ eftersom $k = -b/(2a) < 0$.

18.6 2

Hitta den mest generella lösningen till

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Lösning: Homogenlösningen ges av fall I:

$$y = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$$

där r_1 och r_2 är rötterna till $r^2 + r - 2 = 0$.

En partikulärlösning är

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}. \tag{8}$$

18.6 8

Hitta den mest generella lösningen till

$$y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}.$$

Lösning: Homogenlösningen ges av fall II:

$$A\mathrm{e}^{rt} + Bt\mathrm{e}^{rt}$$

där r är roten till $r^2 + 4r + 4 = 0$.

En partikulärlösning är

$$y = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}.$$

9.1 21

Beräkna gränsvärdet av

$$\left(\frac{n-3}{n}\right)^n.$$

när $n \to \infty$.

Lösning:

Sats 3 (sats 6 i avsnitt 3.4 i Adams)**.**

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Vi har att

$$\left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^n,$$

så gränsvärdet är e^{-3}.

9.2 7

Hitta gränsvärdet eller visa att serien divergerar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{\mathrm{e}^{k-3}}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{\mathrm{e}^{k-3}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\log 2(k+3)-(k-3)} \\
&= \mathrm{e}^{3(\log 2+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\log 2-1}\right)^k \\
&= (2\mathrm{e})^3 \sum_{k=0}^{\infty} (2/\mathrm{e})^k \\
&= (2\mathrm{e})^3 \frac{1}{1-2/\mathrm{e}} \\
&= \frac{8\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}-2}
\end{aligned}$$

9.2 21

En studsboll tappar 3/4 av sin höjd varje studs. Om den släpps från höjden a och låts studsa i all oändlighet, vad är gränsvärdet av sträckan som bollen färdas genom luften?

Lösning:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a\left(\frac{3}{4}\right)^k &= \frac{a}{1-\frac{3}{4}} \\
&= 4a.
\end{aligned}$$

9.2 31

Visa att påståendet är sant eller ge ett motexempel:

$$a_n > 0 \text{ för alla } n \text{ och } \textstyle\sum_n a_n \text{ konvergent } \implies \textstyle\sum_n (a_n)^2 \text{ konvergent.}$$

Lösning: Låt $a = \max_n a_n$.

Lemma 4. *a är väldefinerat.*

Bevis. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ enligt sats 4 från avsnitt 9.2, så för något N är $a_n < a_0$ för alla $n > N$. Alltså har mängden $\{ a_0, \dots \}$ ett max omm delmängden $\{ a_0, \dots, a_N \}$ har ett max, men detta är en ändlig mängd så den har uppenbarligen ett max. □

Vi har då att

$$
\begin{aligned}
\sum_n (a_n)^2 &= a^2 \sum_n \left(\frac{a_n}{a}\right)^n && (9) \\
&\leq a^2 \sum_n \left(\frac{a_n}{a}\right) && (10) \\
&\leq a \sum_n a_n && (11)
\end{aligned}
$$

som vi vet konvergerar :).