中国科学技术大学

2016–2017学年第二学期

数理方程B期末考试试卷

■ A 卷　　　　□ B 卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								

得分	

一、 (本题10分) 求方程$u_x + y u_{xy} = 0$的一般解。

得分	

二、 (本题10分)求解一维半无界弦的自由振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < +\infty, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = x,\ u_t|_{t=0} = 2\sin x,\ 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

得分	

三、 (本题20分)考察一维有界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t,x),\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3}{2}x,\ u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2},\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

1. 当$f(t,x) = 0$时，求出上述定解问题的解$u_1(t,x)$；
2. 当$f(t,x) = \sin\dfrac{x}{2}\sin\omega t,\ \omega \neq k + \dfrac{1}{2},\ k \in N$时，求出上述定解问题的解$u_2(t,x)$；
3. 指出定解问题中方程非齐次项$f(t,x)$、边界条件和初始条件的物理意义。

得分	

四、(本题15分)求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + u,\ t>0,\ 0<x<1, \\ u|_{x=0}\text{有界},\ u_x|_{x=1}=0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<1. \end{cases}$$

得分	

五、(本题15分)求解如下泊松方程的边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=z,\ x^2+y^2+z^2<1, \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=0. \end{cases}$$

得分	

六、(本题15分)设区域$\Omega=\{(x,y)|y\geqslant x\}$。

1. 求区域Ω上的泊松方程狄利克雷边值问题的格林函数;
2. 求解如下泊松方程的狄利克雷边值问题:

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\ (x,y)\in\Omega,\\ u(x,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

得分	

七、(本题15分)考察定解问题：

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 3u, \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

1. 求出上述定解问题相应的基本解；
2. 当$\varphi(x) = x$时，求解上述定解问题。

参　　考　　公　　式

1. 拉普拉斯算子Δ_3在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

2. 二阶欧拉方程：$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$，在作变量代换$x=e^t$ 下，可以约化为常系数线性微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(e^t)$。

3. Legendre方程:$\big[(1-x^2)y'\big]'+\lambda y=0$; n阶Legendre多项式：
$P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\dfrac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$;
Legendre多项式的母函数：$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,\ |t|<1$; Legendre多项式的模平方：$\|P_n(x)\|^2=\dfrac{2}{2n+1}$.

4. ν阶Bessel方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$; ν阶Bessel函数:
$J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}$; Bessel函数的母函数：$e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$;
Bessel函数在三类边界条件下的模平方：$N^2_{\nu 1n}=\dfrac{a^2}{2}J^2_{\nu+1}(\omega_{1n}a),\ N^2_{\nu 2n}=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2_{2n}}]J^2_\nu(\omega_{2n}a),\ N^2_{\nu 3n}=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2_{2n}}+\dfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega^2_{3n}}]J^2_\nu(\omega_{3n}a)$.

5. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$；$\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$;
$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2}]=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

6. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t,\ p=\sigma+is$; $L[e^{\alpha t}]=\dfrac{1}{p-\alpha}$,
$L[t^\alpha]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\ L[\sin t]=\dfrac{1}{p^2+1},\ L[\cos t]=\dfrac{p}{p^2+1},\ L[\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}]=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$。

7. 拉普拉斯方程$\Delta_3u=\delta(M)$的基本解：
二维，$U(x,y)=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$；
三维，$U(x,y,z)=-\dfrac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.