批改时请按学生书写过程给分
方法不拘泥于参考答案给出的方法

一、(本题10分) 解：令$v(x,y)=u_x$, 则$v+yv_y=0$, 解之得$v=\dfrac{c_1(x)}{y}$. .... (5分)

故
$$u=\int vdx=\frac{f(x)}{y}+g(y),$$
其中f,g为任意可微函数. 原方程的通解为$u(x,y)=\dfrac{f(x)}{y}+g(y)$. .... (10分)

二、 (本题10分) 解：由于$u|_{t=0}=x$，$u_t|_{t=0}=2\sin x$ 在$(-\infty,\infty)$上为奇函数，故定解问题
$$\begin{cases} v_{tt}=9v_{xx}\ (t>0,-\infty<x<\infty),\\ v|_{t=0}=x,\ v_t|_{t=0}=2\sin x\end{cases}$$
的解在$x>0$上的限制即为原定解问题的解. .... (5分)

由d'Alembert公式知
$$v(t,x)=\frac{1}{2}\big((x+3t)+(x-3t)\big)+\frac{1}{2\cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t}2\sin\xi d\xi=x+\frac{2}{3}\sin x\ \sin 3t.\quad (8分)$$
故原问题的解为$u(t,x)=x+\frac{2}{3}\sin x\cdot\sin 3t(t>0,x>0)$. ....(10分)

三、 (本题20分) 解：1. 用分离变量法，设$u(t,x)=T(t)X(x)$，可得
$$\frac{T''(t)}{T}=\frac{X''(x)}{X}=-\lambda.$$
代入齐次边界条件得固有值问题$\begin{cases} X''+\lambda X=0\quad(0<x<\pi),\\ X(0)=0,\ X'(\pi)=0\end{cases}$ 和$T''+\lambda T=0$. (4分)

由Sturm-Liouville定理知有可数个非负固有值$\lambda_n=\omega_n^2$. 代入解得$\omega_n=n-\frac{1}{2}$. 相应的固有值和固有函数为$\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2$, $X_n=\sin(n-\frac{1}{2})x$. .... (6分)

同时$T_n(t)=A_n\cos(n-\frac{1}{2})t+B_n\sin(n-\frac{1}{2})t$. 故
$$u(t,x)=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n\cos(n-\frac{1}{2})t+B_n\sin(n-\frac{1}{2})t\big)\ \sin(n-\frac{1}{2})x.\ .... (8分)$$
代入初始条件得
$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{3}{2}x,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n(n-\frac{1}{2})\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{1}{2}x.\end{cases}$$

观察易知$A_n=\begin{cases}1, & n=2,\\ 0, & \text{else},\end{cases}\quad B_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$ .... (10分)

代入系数知齐次定解问题的解为

$u(t,x)=2\sin\dfrac{t}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{3}{2}t\cdot\sin\dfrac{3}{2}x.$ .... (12分)

2. 当$f(t,x)=\sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2}$时，由叠加原理，定解问题的解$u(t,x)$可以拆成$u=v+w$. 其中$v(t,x)$, $w(t,x)$分别是下述定解问题的解：

$$(1).\begin{cases}v_{tt}=v_{xx} \quad (t>0, 0<x<\pi),\\ v|_{x=0},\quad v_x|_{x=\pi}=0,\\ v|_{t=0}=\sin\frac{3}{2}x,\quad v_t|_{t=0}=\sin\frac{x}{2},\end{cases}\qquad (2).\begin{cases}w_{tt}=w_{xx}+\sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2} \quad (t>0, 0<x<\pi),\\ w|_{x=0},\quad w_x|_{x=\pi}=0,\\ w|_{t=0}=0,\quad w_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

.... (15分)

v的解已由第1题给出. 设$w(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n(t)\sin(n-\frac{1}{2})x$, 代入(2)得

$$\begin{cases}S_n''=-(n-\frac{1}{2})^2S_n+F_n(t),\\ S_n(0)=0,\ S_n'(0)=0\end{cases},\ \text{其中}F_n(t)=\begin{cases}\sin\omega t, & n=1,\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$

解之得$S_1=\dfrac{2\omega\sin\frac{t}{2}-\sin\omega t}{\omega^2-\frac{1}{4}}$, $S_n=0(n>1)$. 故

$$w(t,x)=\frac{2\omega\sin\frac{t}{2}-\sin\omega t}{\omega^2-\frac{1}{4}}\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

进而，当$f(t,x)=\sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2}$时，原定解问题的解为：

$u(t,x)=2\sin\dfrac{t}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{3}{2}t\cdot\sin\dfrac{3}{2}x+\dfrac{2\omega\sin\dfrac{t}{2}-\sin\omega t}{\omega^2-\dfrac{1}{4}}\cdot\sin\dfrac{x}{2}.$ .... (18 分)

3. 方程非齐次项$f(t,x)$为弦受迫振动中的外力密度函数（的ρ倍); 齐次边界条件的物理意义是弦振动过程中弦的左端点固定、右端点在竖直方向自由滑动；初始条件的物理意义是弦的初始位移和初始速度.................................. (20分)

四、(本题15分)解: 设 $u=X(x)T(t)$, 代入得 $\dfrac{T'}{T}-1=\dfrac{X''+\dfrac{1}{x}X'}{X}=-\lambda$. 代入齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases}x^2X''+xX'+\lambda x^2X=0 \quad (0<x<\pi),\\ X(0)\text{有界},\ X'(1)=0,\end{cases}$$

和$T' = (1-\lambda)T$……(5分)

$X(x)$的有界解为 $X(x) = J_0(\omega x)$. 固有值为0, ω_1^2, ω_2^2, $\cdots$, $\omega_n^2, \cdots$, (ω_n 为$J_1(x) = 0$ 正根), 固有函数为 1, $J_0(\omega_1 x)$, $J_0(\omega_2 x), \cdots$, $J_0(\omega_n x)$ $\cdots$. 代入解得$T(t) = e^{(1-\omega_n^2)t}$, 因此，级数解

$$u(t,x) = c_0 e^t + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\omega_n x) e^{(1-\omega_n^2)t} \qquad (*)$$ ……(10分)

当$t=0$ 时, $\varphi(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\omega_n x)$，其中

$$c_0 = 2\int_0^1 \varphi(x) x dx, c_n = \frac{2}{J_0^2(\omega_n)}\int_0^1 \varphi(x) x J_0(\omega_n x) dx, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

代入 $(*)$ 即得解……(15分)

五、(本题15分) 解: 观察得方程特解为 $\frac{1}{6}z^3$ ……(3分)

设 $w = u - \frac{1}{6}z^3$

在球坐标系下定解问题变为 $\begin{cases} \Delta_3 w = 0, \quad (r<1) \\ w|_{r=1} = -\frac{1}{6}\cos^3\theta. \end{cases}$ ……(5分)

球内轴对称问题的级数解为 $w = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$……(8分)

当 $r = 1$时, $-\frac{1}{6}\cos^3\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(\cos\theta)$……(10分)

可得$C_1 = -\frac{1}{10}$, $C_3 = -\frac{1}{15}$, 其它皆为 0……(13分)

$u = w - \frac{1}{6}z^3 = -\frac{1}{10}z + \frac{1}{10}z(x^2+y^2+z^2)$……(15分)

六、(本题15分) 解: 1. $\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(M - M_0)\,(M, M_0 \in \Omega) \\ G\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ ……(3分)

$M = (x,y)$, $M_0 = (\xi,\eta)$, $M_1 = (\eta,\xi)$

$G = \frac{1}{2\pi}\Big(\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \ln\frac{1}{r(M,M_1)}\Big) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ ……(8分)

2. 区域Ω的外法向量为 $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ....(10分)

$$u(\xi,\eta)=-\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}dl\ =-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\Big(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big|_{\partial\Omega}\sqrt{2}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\Big(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x}\Big)\Big|_{\partial\Omega}dx$$
$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{\eta-\xi}{(x-\eta)^2+(x-\xi)^2}dx$$ ....(15分)

七、(本题15分) 解：1. 所求基本解即为定解问题

$$\begin{cases} U_t=4U_{xx}+3U, & (-\infty<x<\infty,t>0),\\ U(0,x)=\delta(x) \end{cases}$$

的解. ....(3分)

令$\bar{U}=F[U]=\int_{-\infty}^{\infty}U(t,x)\mathrm{e}^{i\lambda x}d\mathrm{x}$为$U(t,x)$关于变元$x$的Fourier变换. 则

$$\begin{cases} \frac{d\bar{U}}{dt}=-4\lambda^2\bar{U}+3\bar{U}\\ \bar{U}(0,x)=1 \end{cases}$$

可得$\bar{U}=\mathrm{e}^{(-4\lambda^2+3)t}$. ....(8分)

故

$$\begin{aligned} U &= F^{-1}[\bar{U}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(-4\lambda^2+3)t}\mathrm{e}^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{16t}x^2+3t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2}d\lambda\\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{16t}x^2+3t} \end{aligned}$$

....(12分)

原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= U(t,x)*\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\cdot\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{3t}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}(x-\xi)^2}d\xi\\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{3t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-x)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}\xi^2}d\xi\\ &= \frac{x}{\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{3t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\xi^2}d\xi\\ &= x\cdot\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$$

....(15分)