2013-2014 学年度第二学期数理方程（B）期末考试试题

考后回忆版本

一、求下列偏微分方程的通解 $u=u(x,y)$（16 分）

（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2 y$　　　　（2）$y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=xy$

二、求下列固有之问题的解。要求明确指出固有值及其所对应的固有函数（10 分）

$$\begin{cases} x^2 y''+xy'+\lambda x^2 y=0,(0<x<2) \\ |y(0)|<+\infty, y'(2)=0. \end{cases}$$

三、求第一象限 $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x>0, y>0\}$ 的第一边值问题的 Green 函数。（12 分）

四、用积分变换法求解下列方程。（12 分）

$$\begin{cases} u_t=a^2 u_{xx}+u,(-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u(0,x)=\varphi(x). \end{cases}$$

五、用分离变量法求解下列方程。（15 分）

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0,(r<2) \\ u|_{r=2}=\sin\theta+2\sin 5\theta-7\cos 4\theta. \end{cases}$$

六、用分离变量法求解下列方程。（15 分）

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx},(0<x<1,t>0) \\ u(t,0)=0, u(t,1)=1. \\ u(0,x)=\varphi(x)+x, u_t(0,x)=\delta(x-\dfrac{1}{2}). \end{cases}$$

七、用分离变量法求解下列方程。（15 分）

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=z,(x^2+y^2+z^2<1) \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=0 \end{cases}$$

八、求解下列定解问题。（5 分）

$$\begin{cases} 4u_{xx}=u_{tt}+2u_t+u,(-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u(0,x)=2\cos x. \\ u_t(0,x)=2x. \end{cases}$$

提示：先对泛定方程进行变换成为一个较为简单的泛定方程，再根据初始条件进行求解。

可能用到的公式：略。包括极坐标和球坐标下的 Laplace 变换公式、Fourier 级数及其系数的公式、Laplace 和 Fourier 所有性质和变换公式及求解过程中用到的反变换公式、勒让德方程的固有值和固有函数以及勒让德函数 n=1-5 时的表达式。