数学物理中的偏微分方程复习提纲 [1]

学过微积分后, 分析问题能列新的方程: 积分方程, 微分方程 (常/偏微分方程, Ordinary/Partial Differential Equations, ODE/PDE). 本课学习**解**物理中 "微分方程的定解问题"!

一个 *(既去除积分常数/任意函数, 又刚好有解的)* 适定的定解问题由三块组成:

泛定方程 例如三类典型方程	$\Delta u = -f(x,y,z)$	Poisson	场位
	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(t,x,y,z)$	wave	波动/振动
	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(t,x,y,z)$	heat	热传导/扩散

初始条件 Initial Conditions　传导需已知 $u|_{t=0}$; 波动需两条 $u|_{t=0}$, $u_t|_{t=0}$

边界条件 Boundary Conditions 在某域 V 的边界或端点 ∂V

I 类 $u|_{\partial V}$　知边界值为某函数 (Dirichlet)　I 类齐次 边上锁定零 $u|_{\partial V}=0$

II 类 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial V}$　知边界的外力/外流 (Neumann)　II 类齐次 边上自由/绝热 $u_x|_{\partial V}=0$

III 类 $(k\frac{\partial u}{\partial n}+hu)|_S = h\theta$　(Robin)

周期性边界条件

自然边界条件 值域有界, 不出现无穷大　　组合成初值问题 *(Cauchy)*, 边值问题, 混合问题

针对各种维度, 有界/无界, 齐次/非齐, 稳定/发展等不同定解问题有不同方法, 需掌握:

○● 常系数常微分方程的**通解** [设 e^{kt} 得 k 的方程, 即特征方程. ODE二阶时解得 k_1, k_2 则有解 $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}$, 通解 $Ae^{k_1 t}+Be^{k_2 t}$; 若解为虚数 $k_{1,2}=i\omega_{1,2}$, 可写复指数, 也可写为 $C\cos\omega_1 t + D\sin\omega_2 t$; 若出现二重根 $k_1=k_2$, 则需另找独立解, 解为 $e^{k_1 t}, te^{k_1 t}$, 例如二重根 $k=0$ 情形 $C+Dt$]

○● 变系数 ODE Euler 方程 $r^2y''+bry'+cy=0$ 的通解 [$r=e^t$ 技, 变成常系数 $\ddot{Y}+(b-1)\dot{Y}+cY=0$, 设 $Y=e^{kt}$ 得特征方程 $k^2+(b-1)k+c=0$ 定出 $k_{1,2}$ 和通解 $e^{k_1 t}\oplus e^{k_2 t}=ar^{k_1}+br^{k_2}$ 或 $a+bt=a+b\ln r$]

* 偏微分方程的通解法　直接积分求解

□■　§1.4 达朗贝尔公式 [1+1 维二阶波动方程的**行波解**] [(**无界**) 初值问题的解 **d'Alembert 公式**]

★★★ (**有界**) 分离变量法 §2.1

㈠**分离变量**　㈡**解固有值问题, 解其余问题, 得特解**　㈢**叠加, 定系数**

常微分方程的固有值问题, 必须熟记会算左 II 右 II(PPT), 左 I 右 I(教材例题)边界情况下的**固有值** (善用 S-L 定理预判固有值能否取 0: 解题时必须指明是正? 还是非负?) 和**固有函数**!

□■　固有函数系正交性

□■　§2.4.1 非齐次问题: 独立作用的线性问题可基于**叠加原理**化成几个简单问题 [泛定方程齐次化: 特解法, 广义 Fourier 展开法, 冲量原理法, δ 点源叠加/混合问题 Green 函数法]

幂级数法得变系数 ODE 通解$P_n(\cos\theta)$, $J_\nu(\omega r)$, 固有值$n(n+1)$, ω_n^2, 固有函数$P_n(\cos\theta)$, $J_\nu(\omega_n r)$, 用于分离变量法:

□■　§3　Legendre多项式系 → 球内/球壳 (C_n, D_n 都可能不为零)/球外 ($C_0=?$) 问题　(按作业复习)

□■　Bessel 函数系 → 柱问题 先判断输入的 $\nu=?$, 再找 ω_n(标记清楚是非负根还是正根?) (复习课件例 2 例 3)

$\mathcal{F}$ $\lrcorner$　§4.1 (课件) Fourier 积分变换法　㈠ FT　㈡**解像**　㈢ $\mathrm{F^{-1}T}$　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\lambda^2+B\lambda}d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{\frac{B^2}{4A}}$

基本解方法的思想: 基于 (积分) 叠加原理, 先求点源引起的**点源函数**, 再 (对空间甚至对时间) 卷积实际源得解

□■　镜像法求 **Green 函数**. 并验算边界条件!　　审题先审几维三维而 $\frac{1}{4\pi r}$? 二维而 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$?

理解点源引起的格林函数, 如何联系一般**源**引起的函数, 如何和**边界**影响联系, 从而求定解问题.

□■　点用 δ 函数描述, 掌握其筛选性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)dx = \varphi(x)|_{x-\xi=0}=\varphi(\xi)$, 及其 FT 词典 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx = 1$

[1]Spring term, weihuang[AT]mail..