第1章 数学物理中的偏微分方程.

①二维Laplace方程极坐标形式 $\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

② $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0 \Rightarrow u(x,y)=f(x)+g(y)$, $f(x)$, $g(y)$是任意两个一次可微函数.

③ 变量代换, 常用的是 $\xi=x+at$, $\eta=x-at$, u是x,t的函数.

④ 三个典型方程及其物理背景.

i> 弦的微小横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)$$

($a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\rho}$, T为弦上张力, ρ为弦密度, $g(t,x)$为外力的分布密度)

ii> 热传导方程.

三维: $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_3 u+\frac{1}{c\rho}f(t,x,y,z)$, $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ (体密度ρ, 热传导系数k, 比热c, 热源密度$f(t,x,y,z)$)

稳定温度场 ($\frac{\partial u}{\partial t}=0$), 无热源: $\Delta_3 u=0$, 三维Laplace方程

有热源: $\Delta_3 u=g(x,y,z)$, $g(x,y,z)=-\frac{1}{k}f(x,y,z)$, 泊松方程.

iii> 静电场的场势方程.

$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$, $\rho(x,y,z)$为空间电荷分布

⑤初始条件和初始问题

指已知未知函数u及其对时间的各阶导数在初始时刻$t=0$的值.

⑥边界条件和边界问题

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_S=\varphi(x,y,z)$$

$\alpha=0 \Rightarrow$ 第一类边界条件

$\beta=0 \Rightarrow$ 第二类……

$\alpha,\beta\neq 0 \Rightarrow$ 第三类……

⑦ d'Alembert公式

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases} \Rightarrow u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

⑧ 叠加原理

书上P216，比较简单，不做复述

（一个小结论：$\Delta_2 u=0$ 通解 $u(x,y)=f(x+iy)+g(x-iy)$ ）

⑨ 齐次化原理.

i>
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Lu+f(t,M)\\ u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Lw\\ w|_{t=\tau}=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{w=\tau}=f(\tau,M)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=\int_0^t w(t,M;\tau)\,d\tau$$

ii>
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(t,M)\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=Lw\\ w|_{t=\tau}=f(\tau,M)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=\int_0^t w(t,M;\tau)\,d\tau$$