第3章 勒让德方程的固有值问题与相关性质.

1. 在解球形域上的三维稳态问题时，常把Laplace方程 $\Delta_3 u=0$ 作分离变量 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$.

令 $x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，作变换会转换成勒让德方程：

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+\lambda y=0 \quad (-1\le x\le 1) \qquad (1).$$

方程(1)在[-1,1]上的固有值问题的提法为

$$\begin{cases} \text{方程(1)}, & (-1<x<1) \\ |y(\pm 1)|<+\infty. \end{cases}$$

此固有值问题的固有值和固有函数为：

$$\lambda_n=n(n+1), \quad y_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

该勒让德多项式 $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

将固有值 $\lambda_n=n(n+1)$ 代入，在轴对称情况下，$\Delta_3 u=0$ 的级数解为

$$\boxed{u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta).}$$

注：球内问题的解：$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$.

球外问题的解：$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=0}^{+\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$.

2. 在解半球形域上的定解问题时，还会遇到固有值问题

$$\begin{cases} \text{方程(1)}, & 0<x<1, \\ y(0)=0\ (\text{或 } y'(0)=0), & |y(1)|<+\infty. \end{cases}$$

若 $y(0)=0$，固有值为 $\lambda_n=(2n+1)(2n+2)$, $y_n(x)=P_{2n+1}(x)$

若 $y'(0)=0$，固有值为 $\lambda_n=2n(2n+1)$, $y_n(x)=P_{2n}(x)$.

(这里固有值与固有函数不用刻意去记，其实在做题过程中会自动推导出来，见习题 28.29题)

3. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 的相关性质：

①. $\{P_n(x), n=0,1,2,3\cdots\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上形成正交系，即 $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=0$，$(m\neq n)$.

②. $P_n(x)$ 的母函数为 $w(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$.

相关递推关系 $(n\geq 1)$：

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

$$nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0$$

$$nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0$$

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$$

③. $\forall n$，$P_n(1)=1$，当 $|x|\leq 1$，$|P_n(x)|\leq 1$.

$$P_n(0)=\begin{cases}0, & n=2m+1\\ \dfrac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n=2m,\ m=1,2,3\cdots,\\ 1, & n=0\end{cases}$$

$$P_n'(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ \dfrac{(-1)^k(2m+1)!!}{(2m)!!}, & n=2m+1\end{cases}\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx=0$.

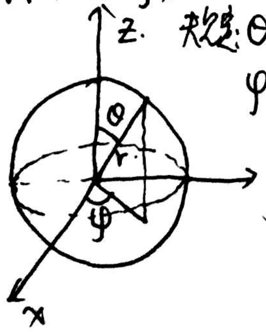
$$\int_0^1 P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}, & n=2k+1\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

④. $\|P_n(x)\|^2=\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$. $P_{2n}(x)$ 为偶函数，$P_{2n+1}(x)$ 为奇函数。

重点：① 熟悉勒让德方程与基本性质；

②. 利用勒让德方程会求球形域上的定解问题.

注意：球坐标系 (r,θ,φ).

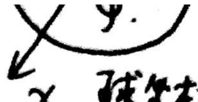


规定：θ 是与 z 轴正向的夹角，

φ 是与 x 轴正向的夹角.

人 $0\leq\theta\leq\pi$.

$0\leq\varphi\leq 2\pi$.



x 球坐标

($0\le\theta\le\pi$,

做题时,一般多由

不考虑φ. $u=u$

第四章 用积分变换法解题:

1. 用Fourier变换解题:

①基本公式:$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,在任意有界区间上逐段光滑,

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx.$$

以下为$f(x)\rightleftharpoons F(\lambda)$对应关系:

$$f(x-x_0)\rightleftharpoons e^{-i\lambda x_0}F(\lambda),\qquad e^{i\lambda_0 x}f(x)\rightleftharpoons F(\lambda-\lambda_0),$$

$$f^{(n)}(x)\rightleftharpoons(-i\lambda)^n F(\lambda),\qquad f*g\rightleftharpoons F(\lambda)\cdot G(\lambda),$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\rightleftharpoons e^{-a^2\lambda^2},\qquad \frac{e^{-a|x|}}{2a}\rightleftharpoons\frac{1}{\lambda^2+a^2}\quad(a>0).$$

②傅里叶变换解题的步骤:1)选用适当的自变量作积分变量,把泛定方程和定解条件都作傅里叶变换,得到关于未知函数的像函数的常微分方程的定解问题.

2)解此常微分方程的定解问题,求出未知函数的像函数.

3)对所得函数求逆变换,就得到原定解问题的解.

③对定义在$[0,+\infty)$上的函数,可以施行正弦变换及余弦变换:

$$\bar{f}_s(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx \rightsquigarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,dx,$$

$$\bar{f}_c(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx \rightsquigarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{f}_c(\lambda)\cos\lambda x\,dx.$$

2. 用Laplace变换解题:

①定义:$F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt.$

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-f^{(n-1)}(+0).$$

②.用Laplace变换解题时,需注意选择哪个自变量作Laplace变换!

对于常微分方程 $a^2\frac{d^2U}{dx^2}-p^2U+F(p)=0$ 的通解为 $U=C_1\exp\{-\frac{p}{a}x\}+C_2\exp\{\frac{p}{a}x\}+\frac{F(p)}{p^2}$.